Il lemma di ricoprimento di Vitali

Sia $\mathscr{I} = \{I\}$ una famiglia di intervalli chiusi contenuti in $\mathbb{R}$. Diremo che la famiglia $\mathscr{I}$ *ricopre l'insieme* E *nel senso di Vitali* (oppure che $\mathscr{I}$ è *un ricoprimento di Vitali di* E) se per ogni $x \in E$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intervallo $I \in \mathscr{I}$ tale che $x \in I$ e $l(I) < \varepsilon$. Inoltre nessun intervallo $I \in \mathscr{I}$ può degenerare in un punto, ossia $l(I) > 0$ per ogni $I \in \mathscr{I}$.

1 (Lemma di ricoprimento di Vitali) *Sia* $E \subset \mathbb{R}$ *un insieme di misura esterna finita e sia* $\mathscr{I}$ *un ricoprimento di Vitali di* E. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono* $I_1, \ldots, I_m \in \mathscr{I}$ *disgiunti a due a due e tali che*

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{m} I_j \right) < \varepsilon \ , \tag{1}$$

dove m^* *indica la misura esterna secondo Lebesgue.*

Dim. Essendo $m^*E < \infty$, esiste un aperto Ω con $m(\Omega) < \infty$ tale che $E \subset \Omega$. Ovviamente non è restrittivo supporre che tutti gli intervalli di $\mathscr{I}$ siano contenuti in Ω.

Costruiamo ora una successione $\{I_m\} \subset \mathscr{I}$. Supponiamo di aver già scelto $I_1, \ldots, I_m$ e vediamo come scegliere I_{m+1}. Se fosse

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{m} I_j \, ,$$

ossia

$$E \setminus \bigcup_{j=1}^{m} I_j = \emptyset \, , \tag{2}$$

la (1) è certamente soddisfatta, dato che in questo caso si ha

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{m} I_j \right) = 0 \, .$$

Altrimenti, poniamo

$$\mathscr{U}_m = \{ I \in \mathscr{I} \mid I \cap I_j = \emptyset, \ j = 1, \ldots, m \} \, .$$

La classe $\mathscr{U}_m$ risulta non vuota; infatti, essendo

$$E \setminus \bigcup_{j=1}^{m} I_j \neq \emptyset$$

scelto un x in questo insieme, esisterà, per la definizione di ricoprimento di Vitali, un $I \in \mathscr{I}$ contenente x e di diametro così piccolo da non intersecare gli I_j per $j = 1, \ldots, m$ (si ricordi che gli I_j sono chiusi !).

Poniamo

$$k_m = \sup\{l(I) \,|\, I \in \mathscr{U}_m\} \ ;$$

risulta ovviamente

$$0 < k_m \leqslant m(\Omega) < \infty.$$

Scegliamo I_{m+1} in modo tale che

$$I_{m+1} \in \mathscr{U}_m, \qquad l(I_{m+1}) > \frac{k_m}{2} \ . \tag{3}$$

Procedendo in questo modo, o troviamo un m per il quale la (2) è vera (e in tal caso abbiamo finito) oppure otteniamo una successione di insiemi $\{I_m\}$ di $\mathscr{I}$ soddisfacenti le (3). Questo implica che gli insiemi di $\{I_m\}$ risultano disgiunti a due a due e quindi

$$\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) \leqslant m(\Omega) < \infty \ . \tag{4}$$

Per la convergenza della serie, fissato un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} l(I_k) < \frac{\varepsilon}{5} \ . \tag{5}$$

Poniamo

$$R = E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k \ ;$$

dobbiamo dimostrare che $m^*R < \varepsilon$. Sia $x \in R$; esiste un $I \in \mathscr{I}$ tale che

$$x \in I \ , \qquad I \cap I_j = \emptyset, \ j = 1, \ldots, N.$$

Dico che esiste un m (che risulterà ovviamente $> N$) tale che

$$I \cap I_m \neq \emptyset \ . \tag{6}$$

Infatti, se la (6) fosse falsa, vorrebbe dire che $I \cap I_m = \emptyset$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, e quindi che $I \in \mathscr{U}_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Ma allora, per la (3),

$$l(I) \leqslant k_m < 2\, l(I_{m+1});$$

s d'altra parte, la (4) implica che $l(I_m) \to 0$ e quindi avremmo l'assurdo $l(I) = 0$.

Poniamo allora

$$p = \min\{m \in \mathbb{N} \mid I \cap I_m \neq \emptyset\} .$$

Si noti che, per quanto detto, l'insieme di numeri naturali del quale consideriamo il minimo è certamente non vuoto. Abbiamo dunque

$$I \cap I_j = \emptyset \qquad j = 1, \dots, p-1 \tag{7}$$

$$I \cap I_p \neq \emptyset\,. \tag{8}$$

La (7) mostra che $I \in \mathscr{U}_{p-1}$ e quindi

$$l(I) \leqslant k_{p-1} < 2\, l(I_p) .$$

Questo, unito alla (8), implica $I \subset J_p$, dove J_p indica l'intervallo concentrico a I_p, la cui lunghezza è cinque volte la lunghezza di I_p [(1)].

Ricordando che $x \in I$ abbiamo fatto vedere che

$$x \in \bigcup_{p=N+1}^{\infty} J_p$$

e, dovendo questo valere per ogni $x \in R$,

$$R \subset \bigcup_{p=N+1}^{\infty} J_p .$$

Dunque, ricordando anche la (5), possiamo scrivere

$$m^* R \leqslant m\left(\bigcup_{p=N+1}^{\infty} J_p\right) \leqslant \sum_{p=N+1}^{\infty} l(J_p) = 5 \sum_{p=N+1}^{\infty} l(I_p) < \varepsilon$$

e il lemma è dimostrato. $\square$

Il lemma di ricoprimento di Vitali può enunciarsi anche nel seguente modo:

[(1)] Basta osservare che, se $x \in I$, indicato con x_0 il centro di I_p, risulta $|x - x_0| \leqslant l(I) + l(I_p)/2 < (2 + \frac{1}{2})l(I_p) = \frac{5}{2}\, l(I_p)$.

2 *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di misura esterna finita e sia $\mathscr{I}$ un ricoprimento di Vitali di E. Esiste una successione di insiemi $\{I_n\} \subset \mathscr{I}$ disgiunti a due a due e tali che*

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right) = 0\,. \tag{9}$$

Dim. Questo risultato segue subito dalla dimostrazione del teorema 1. Basta, infatti, osservare che, costruita la successione $\{I_n\}$, risulta

$$E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \subset \quad E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j$$

qualunque sia l'intero N. Inoltre, nella dimostrazione del teorema 1, abbiamo fatto vedere che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un N tale che

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j \right) < \varepsilon$$

e quindi si ha

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right) < \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$, ossia la (9). □

Alcune proprietà delle funzioni monotone

Come ben noto, una funzione di una variabile reale $f : I \to \mathbb{R}$ (essendo I un intervallo dell'asse reale) si dice *monotona* se vale una delle seguente condizioni. In particolare f si dice rispettivamente *monotona non decrescente, crescente, non crescente, decrescente* se

$$\begin{aligned} x, y \in I,\ x < y &\implies f(x) \leqslant f(y); \\ x, y \in I,\ x < y &\implies f(x) < f(y); \\ x, y \in I,\ x < y &\implies f(x) \geqslant f(y); \\ x, y \in I,\ x < y &\implies f(x) > f(y). \end{aligned}$$

Una prima proprietà delle funzioni monotone è data dal seguente risultato.

3 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. La f risulta continua in $I \setminus N$, dove N è un insieme al più numerabile. Inoltre le discontinuità di f sono tutte di prima specie.*

Dim. Il fatto che una funzione monotona possa ammettere al più discontinuità di prima specie segue dal teorema di regolarità (ossia di esistenza del limite) delle funzioni monotone. Infatti, questo risultato implica l'esistenza e la finitezza dei due limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

per ogni $x+_0$ interno ad I. Quindi o questi due limiti sono uguali (e la funzione è continua in x_0) oppure sono diversi (e finiti) e x_0 è una discontinuità di prima specie.

Mostriamo ora che N è al più numerabile. Supponiamo, per fissare le idee, che sia f monotona non decrescente. Sia $J : N \to \mathbb{Q}$ l'applicazione definita nel modo seguente. Essendo $x_0 \in N$ abbiamo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) < \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

e possiamo scegliere un numero razionale $J(x_0)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) < J(x_0) < \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

L'applicazione J così definita è iniettiva. Infatti se $x_0 < x_1$, avremo

$$J(x_0) < \lim_{x \to x_0^+} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_1^-} f(x) < J(x_1)$$

e dunque $J(x_0) \neq J(x_1)$.

Essendo $J : N \to \mathbb{Q}$ iniettiva, la cardinalità di N deve essere minore o uguale a quella di $\mathbb{Q}$. $\square$

Un risultato più profondo è il seguente, che si basa sul lemma di ricoprimento di Vitali.

4 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona non decrescente. Esiste $f'(x)$ per quasi ogni $x \in (a, b)$, f' risulta sommabile e inoltre*

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leqslant f(b) - f(a). \tag{10}$$

Dim. Fissato un punto $x \in (a, b)$, consideriamo *i numeri (o derivate) del Dini*. Essi sono definiti dai seguenti quattro limiti

$$D^+ f(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,, \quad D_+ f(x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,,$$
$$D^- f(x) = \limsup_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,, \quad D_- f(x) = \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Ovviamente questi quattro limiti sono non negativi, visto che la f è monotona non decrescente, ma potrebbero essere uguali a $+\infty$. In ogni caso si ha:

$$D_- f(x) \leqslant D^- f(x), \quad D_+ f(x) \leqslant D^+ f(x)$$

Se facciamo vedere che risulta

$$D^- f(x) \leqslant D_+ f(x), \quad D^+ f(x) \leqslant D_- f(x) \tag{11}$$

quasi ovunque, avremo che

$$D_- f(x) = D^- f(x) = D_+ f(x) = D^+ f(x), \quad \text{q.o. in } (a, b), \tag{12}$$

ossia che esiste quasi ovunque il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(non necessariamente finito).

Dimostreremo solo la prima delle disuguaglianze in (11), essendo la dimostrazione dell'altra analoga.

Sia

$$E = \{x \in (a, b) \mid D_+ f(x) < D^- f(x)\}.$$

Dire che $D^- f(x) \leqslant D_+ f(x)$ q.o. significa dire che E ha misura nulla. Per dimostrare ciò, consideriamo due numeri razionali positivi u e v e introduciamo gli insiemi

$$E_{uv} = \{x \in (a, b) \mid D_+ f(x) < u < v < D^- f(x)\}.$$

Essendo

$$E = \bigcup_{\substack{u, v \in \mathbb{Q}^+ \\ u < v}} E_{uv}$$

per avere che $mE = 0$ basterà far vedere che $m^*E_{uv} = 0$.

Fissiamo $u, v \in \mathbb{Q}^+$, $u < v$, e poniamo $s = m^*E_{uv}$. Come noto dalla teoria della misura di Lebesgue, possiamo trovare un aperto O contenente E_{uv} e tale che

$$m(O) < s + \varepsilon\,. \tag{13}$$

Sia $x \in E_{uv}$. Essendo $D_+f(x) < u$, ossia [(2)]

$$\sup_{\delta>0} \inf_{0<h<\delta} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < u,$$

avremo, per ogni $\delta > 0$,

$$\inf_{0<h<\delta} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < u\ .$$

Risulta dunque

$$\forall\ \delta > 0,\ \exists\ 0 < h < \delta\ :\ f(x+h) - f(x) < hu. \tag{14}$$

Sia $\mathscr{I} = \{I\}$ la famiglia degli intervalli che soddisfano le seguenti condizioni:
$I = [x, x+h]$, con $x \in E_{uv}$;
$f(x+h) - f(x) < hu$;
$I \subset O$.

E' chiaro che, in virtù dei (14), esistono intervalli di questo tipo e costituiscono un ricoprimento di Vitali di E_{uv}. Per il Lemma di ricoprimento di Vitali 1, dato un $\varepsilon > 0$, esistono $I_1, \ldots, I_N \in \mathscr{I}$ tali che

$$m^*(E_{uv} \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j) < \varepsilon, \qquad I_h \cap I_k = \emptyset \quad (h \neq k). \tag{15}$$

Inoltre, posto $I_j = [x_j, x_j + h_j]$, risulta

$$\sum_{j=1}^{N} [f(x_j + h_j) - f(x_j)] < u \sum_{j=1}^{N} h_j$$

(2)In questa formula e in altre simili che seguiranno, sottointendiamo che δ è sufficientemente piccolo in modo tale che il punto $x + h$ (con $0 < h < \delta$) appartiene ancora all'intervallo (a, b). Non lo scriviamo esplicitamente per non appesantire la notazione.

Essendo gli I_h disgiunti a due a due, abbiamo anche (ricordando la (13))

$$\sum_{j=1}^{N} h_j = \sum_{j=1}^{N} m(I_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right) \leqslant m(O) < s + \varepsilon$$

e dunque (si ricordi che $u > 0$!)

$$\sum_{j=1}^{N} [f(x_j + h_j) - f(x_j)] < u(s + \varepsilon). \tag{16}$$

Poniamo

$$A = E_{uv} \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \mathring{I}_j, \qquad B = E_{uv} \cap \bigcup_{j=1}^{N} \mathring{I}_j.$$

Tenendo presente che gli insieme A e $E_{uv} \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ differiscono al più per un insieme finito di punti (che ha quindi misura esterna nulla), per la (15) possiamo scrivere

$$m^* A < \varepsilon. \tag{17}$$

Prendiamo ora un punto $y \in B$. Essendo $B \subset E_{uv}$, si ha $v < D^- f(y)$, ossia

$$v < \inf_{\delta > 0} \sup_{-\delta < h < 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h},$$

che possiamo riscrivere come

$$v < \inf_{\delta > 0} \sup_{0 < k < \delta} \frac{f(y) - f(y-k)}{k}\ .$$

Questo implica che, per ogni $\delta > 0$,

$$v < \sup_{0 < k < \delta} \frac{f(y) - f(y-k)}{k}\ .$$

Risulta dunque

$$\forall\ \delta > 0,\ \exists\ 0 < k < \delta\ :\ f(y) - f(y-k) > kv. \tag{18}$$

Sia $\mathscr{J} = \{J\}$ la famiglia degli intervalli che soddisfano le seguenti condizioni:

$J = [y-k, y]$, con $y \in B$;
$f(y) - f(y-k) > kv$;
esiste un j tale che $J \subset \mathring{I}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$.

Essendo gli intervalli $\mathring{I}_j$ aperti e sussistendo la (18), esistono intervalli di questo tipo e costituiscono un ricoprimento di Vitali di B. Per il Lemma di ricoprimento di Vitali 1, dato un $\varepsilon > 0$, esistono $J_1, \ldots, J_M \in \mathscr{J}$ tali che

$$m^*(B \setminus \bigcup_{h=1}^{M} J_h) < \varepsilon, \qquad J_h \cap J_k = \emptyset \quad (h \neq k). \tag{19}$$

Inoltre, posto $J_h = [y_h - k_h, y_h]$, risulta

$$\sum_{h=1}^{M} [f(y_h) - f(y_h - k_h)] > v \sum_{h=1}^{M} k_h = v \sum_{h=1}^{M} m(J_h) = v\, m \left(\bigcup_{h=1}^{M} J_h \right). \tag{20}$$

D'altra parte, essendo $E_{uv} = A \cup B$ e

$$B = \left(B \setminus \bigcup_{h=1}^{M} J_h \right) \cup \left(B \cap \bigcup_{h=1}^{M} J_h \right) \subset \left(B \setminus \bigcup_{h=1}^{M} J_h \right) \cup \left(\bigcup_{h=1}^{M} J_h \right),$$

si ha

$$m^*(E_{uv}) \leqslant m^*(A) + m^*(B) \leqslant m^*(A) + m^* \left(B \setminus \bigcup_{h=1}^{M} J_h \right) + m \left(\bigcup_{h=1}^{M} J_h \right),$$

da cui, ricordando la (17) e la (19), si trae

$$s \leqslant 2\varepsilon + m \left(\bigcup_{h=1}^{M} J_h \right).$$

Dalla (20) segue

$$\sum_{h=1}^{M} [f(y_h) - f(y_h - k_h)] > v\,(s - 2\varepsilon). \tag{21}$$

Essendo la f non decrescente, se consideriamo tutti e soli gli h tali che i corrispondenti intervalli J_h sono contenuti in un fissato intervallo I_j, abbiamo

$$\sum_{h} [f(y_h) - f(y_h - k_h)] \leqslant f(x_j + h_j) - f(x_j)$$

e quindi

$$\sum_{h=1}^{M}[f(y_h) - f(y_h - k_h)] \leqslant \sum_{j=1}^{N}[f(x_j + h_j) - f(x_j)].$$

In virtù delle (16) e (21), si trae

$$v\,(s - 2\varepsilon) \leqslant u\,(s + \varepsilon).$$

Dovendo valere questa disuguaglianza per ogni $\varepsilon > 0$, otteniamo

$$v\,s \leqslant u\,s.$$

Se $s > 0$ deduciamo $v \leqslant u$, che è assurdo. Deve quindi essere $s = 0$ e questo, come già osservato, implica che la prima disugualianza in (11) vale quasi ovunque.

Dato che la seconda si dimostra in modo analogo, abbiamo fatto vedere che la (12) sussiste quasi ovunque. Si badi che questo ancora non prova che esiste $f'(x)$ per q.o. x, dato che i quattro numeri del Dini potrebbero essere uguali a $+\infty$.

Poniamo

$$f(x) = f(b), \qquad x > b. \tag{22}$$

Osserviamo che, indicato con $g(x)$ la funzione definita quasi ovunque dalla (12), possiamo scrivere

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} n\,(f(x + 1/n) - f(x))$$

per q.o. $x \in (a, b)$. Essendo i rapporti incrementali appena scritti non negativi, il Lemma di Fatou porta a

$$\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} n \int_a^b (f(x + 1/n) - f(x))\,dx\,.$$

Inoltre, tenendo presente la (22) e che $f(a) \leqslant f(x)$, si ha

$$n \int_a^b (f(x + 1/n) - f(x))\,dx = n\left(\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right) =$$

$$n\left(\int_b^{b+1/n} f(x)\,dx - \int_a^{a+1/n} f(x)\,dx\right) \leqslant n\left(\frac{f(b)}{n} - \frac{f(a}{n}\right) = f(b) - f(a).$$

Segue

$$\int_a^b g(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a).$$

Questo mostra che g è sommabile in (a, b) e quindi finita quasi ovunque. Ciò implica che il limite del rapporto incrementale non solo esiste q.o., ma esiste **finito** q.o., ossia che f è derivabile q.o.. Inoltre sussiste la (10) e il teorema è dimostrato. $\square$