Sulla uniforme continuità

In queste nota dimostriamo alcuni criteri utili per verificare se una funzione è uniformemente continua oppure no. Un primo criterio discende immediatamente dal teorema di Heine-Cantor.

Esercizio 1 *Dire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue negli insiemi indicati:*

$$f(x) = \sin x \quad \text{in } [-\pi, \pi]; \qquad f(x) = x^2 + 3x - 1 \quad \text{in } [-5, 3];$$
$$f(x) = \tan x \quad \text{in } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]; \qquad f(x) = \log x \quad \text{in } [1, e].$$

Risol. Tutte queste funzioni risultano continue negli insiemi indicati. Essendo questi ultimi compatti (sono insiemi chiusi e limitati), il teorema di Heine-Cantor ne assicura l'uniforme continuità. $\square$

Teorema 1 *Sia I un insieme limitato di $\mathbb{R}$; se $f(x)$ è uniformemente continua in I, allora $f(x)$ risulta limitata in I.*

Dim. Supponiamo $f(x)$ non limitata; esiste allora una successione $\{x_n\}$ di punti di I tale che

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty. \tag{1}$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente: $x_{n_k} \to x_0$ (con x_0 non necessariamente in I !).

D'altra parte, per l'uniforme continuità della $f(x)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$, tale che, per ogni $x', x'' \in I$ con $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, risulta $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Sia ora k_0 tale che, per ogni $k' > k_0$, si abbia $|x_{n_{k'}} - x_0| < \delta_\varepsilon/2$. Allora, comunque presi due indici k', k'' maggiori di k_0, si ha

$$|x_{n_{k'}} - x_{n_{k''}}| \leqslant |x_{n_{k'}} - x_0| + |x_{n_{k''}} - x_0| < \delta_\varepsilon,$$

e quindi

$$|f(x_{n_{k'}}) - f(x_{n_{k''}})| < \varepsilon.$$

Fissiamo $n_{k''}$ e passiamo al limite per $k' \to \infty$; tenendo presente la (1), si ottiene l'assurdo $+\infty \leqslant \varepsilon$.

$\square$

Esercizio 2 *Studiare l'uniforme continuità delle funzioni seguenti negli insiemi indicati:*

$$f(x) = \log x \;\text{ in } (0,1]; \quad f(x) = \frac{1}{x} \;\text{ in } (0,1]; \quad f(x) = \tan x \;\text{ in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Risol. Per il teorema precedente, nessuna di queste funzioni risulta uniformemente continua negli insiemi indicati, dato che questi sono insiemi limitati e le funzioni risultano ivi illimitate. □

Il prossimo risultato fornisce un criterio utilissimo sia nel caso si voglia verificare la uniforme continuità di una funzione, sia nel caso si voglia dimostrare che non lo è.

Teorema 2 *La funzione $f(x)$ risulta uniformemente continua nell'insieme E se, e solo se, è soddisfatta la seguente condizione:*

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \subset E, \; |x_n - y_n| \to 0 \;\Rightarrow\; |f(x_n) - f(y_n)| \to 0. \tag{2}$$

Dim. Sia $f(x)$ uniformemente continua in E:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \text{t.c }. \forall x', x'' \in E, \; |x' - x''| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{3}$$

Se $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sono due successioni contenute in E tali che $|x_n - y_n| \to 0$, esiste un n_ε tale che, per ogni $n > n_\varepsilon$, si ha $|x_n - y_n| < \delta_\varepsilon$.

Per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha allora $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$; ciò significa che $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$.

Viceversa, supponiamo che valga la (2). Se la $f(x)$ non fosse uniformemente continua, dovrebbe esistere un $\varepsilon > 0$ e due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ contenute in E tali che

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Deve allora essere $|x_n - y_n| \to 0$, e quindi, per la (2), $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. Dalla (4) segue l'assurdo $0 \geqslant \varepsilon$. La $f(x)$ deve quindi essere uniformemente continua in E. □

Esercizio 3 *Studiare l'uniforme continuità delle seguenti funzioni negli insiemi indicati:*

(i) $f(x) = ax + b$ in $\mathbb{R}$; (ii) $ax^2 + bx + c$ in $\mathbb{R}$ $(a \neq 0)$;

(iii) $f(x) = \sin x$ in $\mathbb{R}$; (iv) $f(x) = \log x$ in $[1, +\infty)$;

(v) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in $[1, +\infty)$; (vi) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ in $(0, 1)$;

(vii) $f(x) = \sin(x^2)$ in $\mathbb{R}$; (viii) $f(x) = x \sin x$ in $\mathbb{R}$.

Risol. Si tratta di applicare il teorema 2.

La (i) è uniformemente continua: basta osservare che $f(x_n) - f(y_n) = a(x_n - y_n)$ e quindi se $|x_n - y_n| \to 0$, avremo anche $|f(x_n) - f(y_n| \to 0$.

La (ii) non è uniformemente continua: poniamo $x_n = n$, $y_n = n + 1/n$. Si ha $|x_n - y_n| = 1/n \to 0$, ma

$$f(x_n) - f(y_n) = an^2 + bn + c - [a(n + 1/n)^2 + b(n + 1/n) + c] =$$
$$-2a - \frac{a}{n^2} - \frac{b}{n} \to -2a \neq 0.$$

La (iii) è uniformemente continua: basta osservare che $|\sin x_n - \sin y_n| \leqslant |x_n - y_n|$ e quindi se $|x_n - y_n| \to 0$, anche $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$.

La (iv) è uniformemente continua: siano infatti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ due successioni contenute in $[1, +\infty)$; si ha:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - 1\right| = \left|\frac{x_n - y_n}{y_n}\right| \leqslant |x_n - y_n|$$

(si noti che $y_n \geqslant 1$). Quindi, se $|x_n - y_n| \to 0$, allora $x_n/y_n \to 1$, e $f(x_n) - f(y_n) = \log x_n - \log y_n = \log(x_n/y_n) \to 0$.

La (v) è uniformemente continua: basta osservare che se $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sono due successioni contenute in $[1, +\infty)$, allora

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n}\right| = \left|\frac{x_n - y_n}{x_n y_n}\right| \leqslant |x_n - y_n|$$

(si noti che $x_n, y_n \geqslant 1$). Infatti da questa relazione segue che se $|x_n - y_n| \to 0$, anche $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$.

La (vi) non è uniformemente continua: poniamo

$$x_n = (2n\pi)^{-1}; \quad y_n = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1}.$$

Si ha che $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ e quindi $|x_n - y_n| \to 0$, ma

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\sin(2n\pi) - \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 \not\to 0.$$

La (vii) non è uniformemente continua: poniamo

$$x_n = \sqrt{2n\pi}; \quad y_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Abbiamo

$$x_n - y_n = \sqrt{2n\pi} - \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\sqrt{2n\pi} - \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)\left(\sqrt{2n\pi} + \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}$$
$$\frac{2n\pi - (2n\pi + \frac{\pi}{2})}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \to 0,$$

ma

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\sin(x_n^2) - \sin(y_n^2)| = \left|\sin(2n\pi) - \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 \not\to 0.$$

La (viii) non è uniformemente continua: poniamo

$$x_n = 2n\pi; \quad y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}.$$

Abbiamo

$$|x_n - y_n| = \left|2n\pi - \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n} \to 0,$$

ma

$$f(x_n) - f(y_n) = x_n \sin x_n - y_n \sin y_n =$$
$$2n\pi \sin(2n\pi) - \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) = -2n\pi \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$$
$$\to -2\pi,$$

dato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

$\square$

Osserviamo che le funzioni (i) e (iv) forniscono esempi di funzioni uniformemente continue non limitate. Ciò mostra che nel teorema 1 l'ipotesi I limitato non può essere tolta.

La funzione (vi) è particolarmente interessante perché fornisce un esempio di funzione continua e limitata in un insieme limitato, ma non uniformemente continua. Questo significa che il teorema 1 non può essere invertito.

Esercizio 4 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni uniformemente continue, le funzioni $f(x)+g(x)$ e $f(x)g(x)$ sono uniformemente continue?*

Risol. La funzione $f(x)+g(x)$ risulta uniformemente continua; la facile dimostrazione viene lasciata al Lettore. La funzione $f(x)g(x)$, invece, in generale non risulta uniformemente continua. Un esempio di questo tipo è dato dalle funzioni $f(x) = g(x) = x$. Un altro esempio, in cui una delle due funzioni risulta anche limitata, è $f(x) = x, g(x) = \sin x$ (cfr. esercizio precedente). $\square$

Il prossimo teorema è utile per stabilire se una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ risulta uniformemente continua.

Teorema 3 *Sia f una funzione continua definita su $\mathbb{R}$. Supponiamo che esistano finiti i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Allora la funzione f risulta uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$.

Dim. Supponiamo che la funzione f non sia uniformemente continua. Negando la definizione di uniforme continuità (3), troviamo che

$$\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ \delta > 0,\ \exists\ x_\delta, y_\delta \in \mathbb{R} \mid |x_\delta - y_\delta| < \delta,\ |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geqslant \varepsilon.$$

Prendendo $\delta = 1/n$, otteniamo che

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, x_n, y_n \in \mathbb{R} \mid |x_n - y_n| < \frac{1}{n},\ |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon, \tag{6}$$

essendo ε un fissato numero positivo.

Esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in \mathbb{R}^*$ [(1)].

Notiamo che anche la sottosuccessione y_{n_k} tende allo stesso limite x_0. Questo segue dal fatto che possiamo scrivere

$$y_{n_k} = (y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k}$$

e

$$|y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0.$$

Supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}$. Essendo la funzione f continua, abbiamo che

$$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to f(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Ma questo è assurdo, dato che in virtù dell'ultima disuguaglianza in (6) dobbiamo avere

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon \tag{7}$$

da cui, passando al limite, $0 \geqslant \varepsilon$.

Se $x_0 = +\infty$, ricordando la prima delle (5), abbiamo

$$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to L - L = 0.$$

Di nuovo abbiamo un assurdo, dovendo sussistere la disuguaglianza (7).

Se, infine, $x_0 = -\infty$, abbiamo

$$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to l - l = 0$$

Anche ora arriviamo ad un assurdo, a causa della (7). $\square$

[(1)] Se la successione $\{x_n\}$ risulta limitata, l'esistenza della $\{x_{n_k}\}$ è garantita dal teorema di Bolzano-Weierstrass e il limite x_0 appartiene ad $\mathbb{R}$. Se la successione è illimitata superiormente, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ divergente positivamente (ossia $x_{n_k} \to +\infty$). Questo segue dalla definizione di successione illimitata superiormente. Analogamente, se la successione è illimitata inferiormente, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ divergente negativamente (ossia $x_{n_k} \to -\infty$). In ogni caso, quindi, possiamo trovare una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ regolare, potendo quest'ultima essere convergente o divergente.

Esercizio 5 *Dire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue su tutto* $\mathbb{R}$*:*

$$f(x) = \tanh x; \quad f(x) = \arctan x; \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Risol. Essendo le funzioni in esame continue su tutto $\mathbb{R}$ ed essendo

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

risultano tutte uniformemente continue su $\mathbb{R}$, in virtù del teorema 3. $\square$