Sopra il teorema fondamentale dell'Algebra

Come sappiamo, il teorema fondamentale dell'Algebra afferma che un polinomio a coefficienti complessi

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n \qquad (a_n \neq 0) \tag{1}$$

di grado $n \geqslant 1$ ammette almeno una radice complessa.

Sul libro di testo c'è una dimostrazione che si basa sul teorema dell'indicatore logaritmico. In questi appunti vogliamo mostrare come il teorema fondamentale dell'Algebra possa dedursi anche da altri teoremi di Analisi Complessa.

1. (Teorema di Liouville) Supponiamo che il polinomio (1) non ammetta alcuna radice nel piano complesso. La funzione $1/p(z)$ sarà dunque olomorfa intera.

D'altra parte $p(z)$ presenta all'infinito un polo di ordine n e quindi, per criteri noti,

$$\lim_{z\to\infty} |p(z)| = +\infty,$$

ossia

$$\lim_{R\to+\infty} |p(Re^{i\vartheta}| = +\infty \tag{2}$$

uniformemente al variare di $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Questo implica che esiste un δ tale che, per $|z| > \delta$, si ha $1/|p(z)| < 1$. Essendo $p(z)$ continua nel disco $|z| \leqslant \delta$, e quindi ivi limitata, avremo che $1/|p(z)|$ è limitata dappertutto.

Per il teorema di Liouville la funzione $1/p(z)$ è costante, ossia $p(z)$ è costante, e questo è assurdo.

2. (Primo teorema integrale di Cauchy) Supponiamo che il polinomio (1) non ammetta alcuna radice nel piano complesso. La funzione $1/p(z)$ sarà dunque olomorfa intera.

Ponendo

$$q(z) = a_1 + a_2 z + \dots a_n z^{n-1} \tag{3}$$

risulta

$$p(z) = p(0) + zq(z).$$

Dividendo ambo i membri per $zp(z)$, otteniamo l'identità

$$\frac{1}{z} = \frac{p(0)}{zp(z)} + \frac{q(z)}{p(z)}\,. \tag{4}$$

Indichiamo con D_R il disco di centro l'origine e raggio R e integriamo la (4) su ∂D_R, ottenendo:

$$\int_{+\partial D_R} \frac{dz}{z} = \int_{+\partial D_R} \frac{p(0)}{zp(z)}\, dz + \int_{+\partial D_R} \frac{q(z)}{p(z)}\, dz\,.$$

Essendo q un polinomio (cfr. (3)) e quindi una funzione olomorfa intera, l'ultimo integrale nel secondo membro si annulla.

Valendo l'integrale a primo membro $2\pi i$, abbiamo

$$2\pi i = p(0) \int_{+\partial D_R} \frac{dz}{zp(z)}\,. \tag{5}$$

La (5) implica

$$2\pi \leqslant |p(0)| \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{|p(Re^{i\vartheta}|}\,. \tag{6}$$

Poiché $1/|p(Re^{i\vartheta})| \to 0$ per $R \to +\infty$, uniformemente al variare di $\vartheta \in [0, 2\pi]$ (vedi la (2)), abbiamo

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{|p(Re^{i\vartheta}|} = 0\,.$$

Passando al limite per $R \to +\infty$ nella (6), otteniamo l'assurdo: $2\pi \leqslant 0$.

3. (Secondo teorema integrale di Cauchy) Supponiamo che il polinomio (1) non ammetta alcuna radice nel piano complesso. La funzione $1/p(z)$ sarà dunque olomorfa intera.

Per il secondo teorema integrale di Cauchy, preso comunque un disco D_R di centro l'origine e raggio R, abbiamo

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_R} \frac{d\zeta}{p(\zeta)\,(\zeta - z)}$$

per $|z| < R$. Ponendo $z = 0$ otteniamo

$$\frac{1}{p(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_R} \frac{d\zeta}{\zeta\, p(\zeta)}\,,$$

ossia la (5), e come già sappiamo, questo porta ad un assurdo.

4. (Teorema dei residui) Supponiamo che il polinomio (1) non ammetta alcuna radice nel piano complesso. La funzione $1/p(z)$ sarà dunque olomorfa intera e la funzione

$$\frac{1}{z\,p(z)}$$

sarà olomorfa in tutto il piano privato dell'origine. Essendo

$$\lim_{z\to 0}\left(z\frac{1}{z\,p(z)}\right) = \frac{1}{p(0)}\,, \tag{7}$$

l'origine è un polo del primo ordine con residuo uguale a $1/p(0)$. Applicando il teorema dei residui a un qualsiasi disco D_R di centro l'origine e raggio R, troviamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_R}\frac{dz}{z\,p(z)} = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z\,p(z)}, 0\right) = \frac{1}{p(0)}\,.$$

Abbiamo così riottenuto la (5), che sappiamo essere assurda.

5. (Teorema della media) Supponiamo che il polinomio (1) non ammetta alcuna radice nel piano complesso. La funzione $1/p(z)$ sarà dunque olomorfa intera.

Per il teorema della media, preso comunque un disco D_R di centro l'origine e raggio R, abbiamo

$$\frac{1}{p(0)} = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial D_R}\frac{ds_z}{p(z)}\,,$$

ossia

$$\frac{1}{p(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{p(Re^{i\vartheta})}\,.$$

L'uguaglianza ora trovata implica evidentemente la (6), la quale, come abbiamo già visto, porta ad un assurdo.

6. (Lemma di Rouché) Dato il polinomio (1), poniamo

$$f(z) = a_n z^n, \qquad g(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_{n-1} z^{n-1}$$

e consideriamo la funzione razionale $g(z)/f(z)$. Poiché

$$\lim_{z\to\infty}\frac{g(z)}{f(z)} = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z}\right) = 0,$$

esiste un disco D di centro l'origine tale che

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus \mathring{D}. \tag{8}$$

Abbiamo, quindi, che f, g sono due funzioni continue su D e olomorfe in $\mathring{D}$ tali che

$$|g(z)| < |f(z)|, \qquad \forall\ z \in \partial D.$$

Il lemma di Rouché ci dice che f e $(f+g)$ hanno lo stesso numero di zeri in D. Essendo, evidentemente, il numero di zeri in D di $a_n z^n$ uguale ad n, anche $p = f + g$ ha lo stesso numero di zeri in D. Si noti che la (8) implica che non ci sono zeri di p fuori di D, dato che se esitesse uno di questi zeri, diciamo z_0, avremmo $|g(z_0)/f(z_0)| = 1$.