Il teorema multinomiale

1 *Fissato un intero positivo m e un intero non negativo n, si ha*

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{b_1+\cdots+b_m=n} \binom{n}{b_1, \ldots, b_m} x_1^{b_1} \ldots x_m^{b_m} .$$

Dim. Se $n = 0$ la formula è ovvia. Sia $n \geq 1$. Osserviamo che

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = (x_1 + \cdots + x_m) \cdots (x_1 + \cdots + x_m) \ , \tag{1}$$

dove, a secondo membro, compaiono n copie di $(x_1 + \cdots + x_m)$. Quando sviluppiamo tutti i prodotti, otteniamo una somma di termini del tipo

$$C_{b_1,\ldots,b_m} x_1^{b_1} \cdots x_m^{b_m} \ ,$$

dove $C_{b_1,\ldots,b_m}$ è un numero intero che dipende dagli interi non negativi b_i e che è dato dal numero di termini del tipo $\prod_{i=1}^m x_i^{b_i}$ che troviamo nello sviluppo. Inoltre, dato che prendiamo da ciascuna copia di $(x_1 + \cdots + x_m)$ uno degli x_i, dobbiamo avere $b_1 + \cdots + b_m = n$ e dunque

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{b_1+\cdots+b_m=n} C_{b_1,\ldots,b_m} x_1^{b_1} \ldots x_m^{b_m} .$$

Per determinare il coefficiente $C_{b_1,\ldots,b_m}$, fissiamo $(b_1, \cdots b_m)$. In quanti modi diversi possiamo ottenere $x_1^{b_1} \cdots x_m^{b_m}$ sviluppando il secondo membro della (1) ?

Per esempio, consideriamo $(x_1 + x_2 + x_3)^4$ e prendiamo $(b_1, b_2, b_3) = (3, 1, 0)$. Il coefficiente $C_{3,1,0}$ è uguale al numero di termini del tipo $x_1^3 x_2$ che possiamo ottenere sviluppando il prodotto

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3).$$

Questi li otteniamo prendendo x_2 dalla prima copia di $(x_1 + x_2 + x_3)$ e x_1 da tutte le altre, prendendo x_2 dalla seconda copia di $(x_1 + x_2 + x_3)$ e x_1 da tutte le altre e così via. In definitiva tutti i modi in cui possiamo ottenere il prodotto $x_1^3 x_2$ sono i seguenti:

$$x_2\, x_1\, x_1\, x_1,\ \ x_1\, x_2\, x_1\, x_1,\ \ x_1\, x_1\, x_2\, x_1,\ \ x_1\, x_1\, x_1\, x_2. \tag{2}$$

Questi non sono altro che gli “anagrammi della parola” $x_1\,x_1\,x_1\,x_2$.

Tornando al caso generale (1), ragionando in modo analogo, avremo che i modi in cui possiamo ottenere il termine $x_1^{b_1}\cdots x_m^{b_m}$ sono tanti quanti sono gli “anagrammi della parola”

$$\underbrace{x_1\cdots x_1}_{b_1}\ \underbrace{x_2\cdots x_2}_{b_2}\ \cdots\ \underbrace{x_m\cdots x_m}_{b_m}\,.$$

D’altra parte sappiamo che il numero di anagrammi cercato è dato dal coefficiente multinomiale e dunque

$$C_{b_1,\ldots,b_m}=\binom{n}{b_1,\ldots,b_m}.$$

Nel caso particolare (2) considerato, ritroviamo

$$C_{3,1,0}=\binom{4}{3,1,0}=\frac{4!}{3!\,1!\,0!}=4\,.$$

$\square$

Come esempio, sviluppiamo

$$(x_1+x_2+x_3)^4.$$

Dapprima osserviamo che i multi-indici (b_1,b_2,b_3) tali che $b_1+b_2+b_3=4$ sono $\binom{6}{2}$ (perché?) e sono dati da

$$\begin{gathered}(4,0,0),\ (0,4,0),\ (0,0,4),\\ (3,1,0),\ (3,0,1),\ (1,3,0),\ (0,3,1),\ (1,0,3),\ (0,1,3),\\ (2,2,0),\ (2,0,2),\ (0,2,2),\\ (2,1,1),\ (1,2,1),\ (1,1,2),\end{gathered}$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
(x_1+x_2+x_3)^4 = \sum_{b_1+b_2+b_3=4} \binom{4}{b_1,b_2,b_3} x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3} =& \\
\binom{4}{4,0,0}x_1^4 + \binom{4}{0,4,0}x_2^4 + \binom{4}{0,0,4}x_3^4& \\
+\binom{4}{3,1,0}x_1^3x_2 + \binom{4}{3,0,1}x_1^3x_3 + \binom{4}{1,3,0}x_1x_2^3& \\
+\binom{4}{0,3,1}x_2^3x_3 + \binom{4}{1,0,3}x_1x_3^3 + \binom{4}{0,1,3}x_2x_3^3& \\
+\binom{4}{2,2,0}x_1^2x_2^2 + \binom{4}{2,0,2}x_1^2x_3^2 + \binom{4}{0,2,2}x_2^2x_3^2& \\
+\binom{4}{2,1,1}x_1^2x_2x_3 + \binom{4}{1,2,1}x_1x_2^2x_3 + \binom{4}{1,1,2}x_1x_2x_3^2.&
\end{aligned}
$$

Essendo

$$
\begin{gathered}
\binom{4}{4,0,0} = \binom{4}{0,4,0} = \binom{4}{0,0,4} = \frac{4!}{4!\,0!\,0!} = 1, \\
\binom{4}{3,1,0} = \binom{4}{3,0,1} = \binom{4}{1,3,0} = \binom{4}{0,3,1} \\
= \binom{4}{1,0,3} = \binom{4}{0,1,3} = \frac{4!}{3!\,1!\,0!} = 4, \\
\binom{4}{2,2,0} = \binom{4}{2,0,2} = \binom{4}{0,2,2} = \frac{4!}{2!\,2!\,0!} = 6, \\
\binom{4}{2,1,1} = \binom{4}{1,2,1} = \binom{4}{1,1,2} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12,
\end{gathered}
$$

troviamo

$$
\begin{gathered}
(x_1+x_2+x_3)^4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \\
+4\,x_1^3x_2 + 4\,x_1^3x_3 + 4\,x_1x_2^3 + 4\,x_2^3x_3 + 4\,x_1x_3^3 + 4\,x_2x_3^3 \\
+6\,x_1^2x_2^2 + 6\,x_1^2x_3^2 + 6\,x_2^2x_3^2 \\
+12\,x_1^2x_2x_3 + 12\,x_1x_2^2x_3 + 12\,x_1x_2x_3^2.
\end{gathered}
$$