La formula di Taylor

Sappiamo che una funzione definita in un intervallo aperto I ed ivi derivabile è anche differenziabile, ossia che, fissato $x_0 \in I$, si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) \tag{1}$$

dove

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0. \tag{2}$$

In altro termini, se poniamo $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e $R_1(x) = \omega(x)(x - x_0)$, possiamo riscrivere la (1) nel modo seguente

$$f(x) = T_1(x) + R_1(x), \tag{3}$$

essendo (cfr. (2))

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0 \tag{4}$$

Quest'ultima relazione ci dice che il resto $R_1(x)$, che rappresenta l'errore che noi commettiamo sostituendo $T_1(x)$ a $f(x)$, è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $(x - x_0)$ per $x \to x_0$. Questo fatto si può esprimere, utilizzando uno dei simboli di Landau, scrivendo [(1)]

$$R_1(x) = o(x - x_0) \qquad (\text{per } x \to x_0).$$

Questa scrittura è perfettamente equivalente alla (4). La formula (3), con la condizione (4), ci dice che il polinomio $T_1(x)$ è il polinomio di primo grado che meglio approssima la funzione f in un intorno di x_0.

E' naturale chiedersi se - in generale - possiamo trovare un polinomio di grado n che meglio approssima la funzione f in un intorno di x_0. Ovviamente ci aspettiamo che considerando polinomi di grado più grande, l'approssimazione migliori.

Per cercare l'analogo di $T_1(x)$ di grado n, cominciamo con l'osservare che il polinomio T_1 soddisfa le seguenti condizioni:

$$T_1(x_0) = f(x_0), \qquad T_1'(x_0) = f'(x_0). \tag{5}$$

[(1)]Scrivendo $f(x) = o(g(x))$ (si legge: $f(x)$ è un "o" piccolo di $g(x)$) intendiamo, con Landau, che la funzione f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g.

Non è difficile convincersi che il polinomio di primo grado T_1 è proprio caratterizzato da queste condizioni (ossia, un polinomio di primo grado p_1 tale che $p_1(x_0) = f(x_0)$, $p_1'(x_0) = f'(x_0)$, deve coincidere con $T_1(x)$. Il lettore lo dimostri per esercizio).

Viene spontaneo, allora, vedere se possiamo determinare un polinomio di grado al più n, che chiameremo $T_n(x)$, mediante le condizioni analoghe alle (5):

$$T_n(x_0) = f(x_0),\ T_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \tag{6}$$

Per convincersi di questo, premettiamo un lemma.

Lemma 1 *Sia $p(x)$ un polinomio di grado al più n e sia x_0 un fissato punto di $\mathbb{R}$. Si ha*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{7}$$

Dim. Non è difficile verificare che un polinomio $p(x)$ può sempre scriversi nel modo seguente

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \ldots + \alpha_n(x - x_0)^n. \tag{8}$$

Da qui segue subito che

$$p(x_0) = \alpha_0.$$

Derivando (8) rispetto a x otteniamo

$$p'(x) = \alpha_1 + 2\,\alpha_2(x - x_0) + \ldots + n\alpha_n(x - x_0)^{n-1}$$

e questo implica

$$p'(x_0) = \alpha_1.$$

Derivando un'altra volta, troviamo

$$p''(x) = 2\,\alpha_2 + 3 \cdot 2\,\alpha_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)\alpha_n(x - x_0)^{n-2}$$

e quindi

$$p''(x_0) = 2\,\alpha_2.$$

Iterando il procedimento, troviamo

$$p^{(k)}(x_0) = k!\,\alpha_k$$

per $k = 0, 1, \ldots, n$, ossia la tesi. $\square$

Da questo lemma segue subito che il polinomio

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{9}$$

è quello che soddisfa le condizioni (6) (basta tenere presente la (7)). Il polinomio (9) prende il nome di *polinomio di Taylor della funzione f*.

Nel caso sia $x_0 = 0$, il polinomio

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

prende il nome di *polinomio di Mac Laurin della funzione f*.

Vediamo che tipo di errore si commette sostituendo a $f(x)$ il polinomio $T_n(x)$.

Teorema 1 (Teorema di Peano) *Sia $f \in C^n(I)$ e sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di grado n della funzione f relativo a un fissato punto $x_0 \in I$. Detto $R_n(x)$ il resto nella formula*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \tag{10}$$

risulta

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \qquad (\textit{per } x \to x_0). \tag{11}$$

Dim. Dimostrare la tesi significa verificare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \tag{12}$$

Essendo $R_n(x)$ definito come $f(x) - T_n(x)$, dobbiamo far vedere che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

La funzione f è per ipotesi derivabile n volte in I, così come $T_n(x)$, dato che è un polinomio. D'altra parte le condizioni (6) ci dicono che la differenza

$f(x) - T_n(x)$ si annulla, con tutte le derivate fino all'ordine n, nel punto x_0. Possiamo quindi applicare la regola di de l'Hôpital più volte e scrivere

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \frac{0}{0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \frac{0}{0} = \dots \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0) - T_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0\end{aligned}$$

e la (12) è dimostrata [2]. □

Non sarebbe difficile dimostrare (ma ne omettiamo la dimostrazione) che $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado n che soddisfa la condizione (11).

La formula (10), ossia

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) \tag{13}$$

prende il nome di *formula di Taylor* (*di Mac Laurin*, se $x_0 = 0$).

Come esempio, determiniamo i polinomi di Mac Laurin della funzione $\sin x$. Essendo

$$\begin{cases} f(x) = \sin x = f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x) \dots \\ f'(x) = \cos x = f^{(5)}(x) = f^{(9)}(x) \dots \\ f''(x) = -\sin x = f^{(6)}(x) = f^{(10)}(x) \dots \\ f'''(x) = -\cos x = f^{(7)}(x) = f^{(11)}(x) \dots , \end{cases} \tag{14}$$

[2] Il teorema continua a sussistere se supponiamo solo che $f \in C^{n-1}(I)$ ed esiste $f^{(n)}(x_0)$. Infatti, ragionando come nel testo, applicando più volte la regola di de l'Hôpital, ma fermandoci al passo $(n-1)$-simo, troviamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}.$$

Ora, osservando che $T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - (f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0))}{n!\,(x-x_0)} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x-x_0)} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

si ha

$$\begin{cases} f(0) = 0 = f^{(4)}(0) = f^{(8)}(0) \dots \\ f'(0) = 1 = f^{(5)}(0) = f^{(9)}(0) \dots \\ f''(0) = 0 = f^{(6)}(0) = f^{(10)}(0) \dots \\ f'''(x) = -1 = f^{(7)}(0) = f^{(11)}(0) \dots . \end{cases}$$

Le derivate di ordine pari, quindi, sono tutte nulle nell'origine, mentre quelle di ordine dispari sono uguali a ± 1. Possiamo dunque scrivere

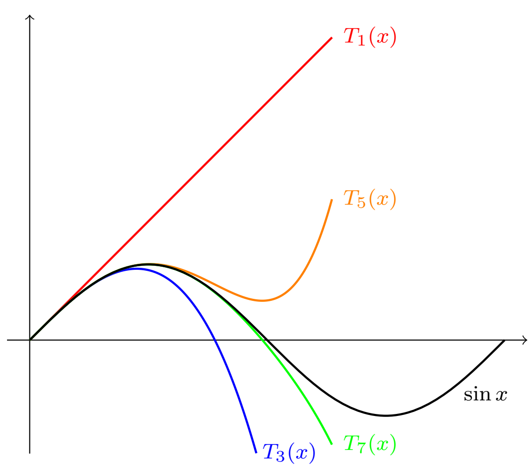
$$f^{(2k)}(0) = 0, \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \qquad k = 0, 1, \dots .$$

e avremo

$$T_1(x) = x, \quad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \quad T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \tag{15}$$

e così via. Osserviamo che, annullandosi tutte le derivate di ordine pari nell'origine, avremo $T_2(x) \equiv T_1(x)$, $T_4(x) \equiv T_3(x)$, $T_6(x) \equiv T_5(x)$, ecc.

Nella figura seguente sono disegnati i grafici dei primi polinomi di Taylor della funzione seno. E' ben chiaro dalla figura come i vari polinomi approssimino sempre meglio la funzione seno in un intorno dello 0, mentre allontanandosi dall'origine i valori di questi polinomi si discostino notevolmente dai valori della funzione.



Volendo stimare l'errore che si commette sostituendo alla funzione un suo polinomio di Taylor, è necessario avere un'espressione quanto più esplicita del resto $R_n(x)$. Tra le tante note, ci limiteremo all'espressione del resto detta *di Lagrange*.

Teorema 2 *Sia $f \in C^{n+1}(I)$ e sia x_0 un punto fissato di I. Sia $R_n(x)$ il resto nella formula di Taylor* (13). *Per ogni $x \in I$, esiste un punto c compreso tra x_0 e x tale che*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{16}$$

Dim. Poniamo $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Osserviamo che

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0, \; g^{(n)}(x) = (n+1)!\,(x - x_0). \tag{17}$$

Abbiamo anche (cfr. le (6), ricordando che $R_n(x)$ non è altro che $f(x) - T_n(x)$)

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \ldots = R^{(n-1)}(x_0) = 0, \; R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0). \tag{18}$$

Supponiamo, per fissare le idee, $x_0 < x$ e consideriamo il rapporto

$$\frac{R_n(x)}{g(x)}.$$

Tenendo presente le prime delle (17)-(18) e applicando il teorema di Cauchy, troviamo che esiste un punto c_1 tale che

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}, \tag{19}$$

con $x_0 < c_1 < x$. Ma essendo anche $R_n'(x_0) = g'(x_0) = 0$, abbiamo che esiste c_2 tale che

$$\frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R_n'(c_1) - R_n'(x_0)}{g'(c_1) - g'(x_0)} = \frac{R_n'(c_2)}{g'(c_2)}\,,$$

con $x_0 < c_2 < c_1 < x$. Iterando il ragionamento, possiamo affermare che esistono dei punti $c_1, \ldots, c_n$ tali che

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \ldots = \frac{R_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)}\,, \tag{20}$$

con $x_0 < c_n < \ldots < c_1 < x$.

D'altra parte

$$\frac{R_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{f^{(n)}(c_n) - f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!\,(x - x_0)}\,. \tag{21}$$

Per il teorema di Lagrange, esiste un punto c_{n+1}, con $x_0 < c_{n+1} < c_n$, tale che

$$\frac{f^{(n)}(c_n) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0} = f^{(n+1)}(c_{n+1})\,.$$

Dalle (19), (20), (21) segue che

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

ossia la tesi [3]. $\square$

Come esempio di applicazione di quanto svolto, calcoliamo il numero e con due cifre decimali esatte. Il polinomio di Mac Laurin della funzione e^x è dato da

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

dato che $f^{(k)}(x) = e^x$, e quindi $f^{(k)}(0) = 1$, per ogni k. Abbiamo dunque

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n(1).$$

L'espressione di Lagrange del resto ci permette di stimare $R_n(1)$. Infatti sappiamo che esiste un punto $c \in (0,1)$ tale che

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}\,.$$

Questo implica

$$0 < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

(qui abbiamo usato il fatto che $e^c < e < 3$). Non appena abbiamo un n tale che

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{2}\,10^{-2} \iff (n+1)! > 600, \tag{22}$$

[3] Nella dimostrazione non abbiamo mai usato la continuità della f^{n+1} ma solo la sua esistenza. Questo significa che il teorema continua a sussistere se si suppone che la funzione f sia di classe $C^n(I)$ e che esista la derivata f^{n+1} in tutti punti di I. Con queste ipotesi, ponendo $n = 0$, riotteniamo esattamente il teorema di Lagrange.

il resto $R_n(1)$ sarà minore di $10^{-2}/2$ e l'espressione

$$T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

fornirà il numero e con due cifre decimali esatte.

Dato che

$$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720,$$

il più piccolo naturale n che soddisfa la (22) è $n = 5$ (niente ci impedisce di prendere un n più grande, ma, ovviamente, più piccolo è n, più semplici saranno i conti). Calcoliamo dunque $T_5(1)$, ossia

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60} = 2,71\overline{6}\,.$$

Questo numero fornisce la soluzione cercata. Infatti, il numero e con 15 cifre esatte, è dato da $2,718281828459045$ [(4)].

Come altra applicazione, consideriamo la funzione $\sin x$. Per quanto detto in precedenza (cfr. la (15)), abbiamo

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(x)$$

(si ricordi anche che $T_{2n+2}(x) \equiv T_{2n+1}(x)$). L'espressione del resto di Lagrange (16) ci permette di maggiorare il resto nel modo seguente

$$|R_{2n+2}(x)| = \left| \frac{f^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

dato che $|f^{(2n+3)}(c)| = |\pm \cos c\,| \leqslant 1$ (si ricordi la (14)).

[(4)] E' interessante osservare come la successione data da $T_n(1)$ converga al numero e molto più rapidamente di quanto non faccia la successione che abbiamo usato nella definizione, ossia

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Infatti, per ottenere due cifre decimali con questa ultima, dobbiamo prendere $n = 164$, che fornisce $a_{164} = 2,71004$, laddove $a_{163} = 2,7099901$.