Regolarità delle successioni monotone.

Ricordiamo che una successione di numeri reali $\{a_n\}$ si dice monotona (strettamente) crescente se

$$a_n \leqslant a_{n+1}, \ (a_n < a_{n+1}) \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

monotona (strettamente) decrescente se

$$a_n \geqslant a_{n+1}, \ (a_n > a_{n+1}) \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Il prossimo teorema mostra che una successione monotona ammette sempre limite, finito o no.

1 (Teorema di regolarità delle successioni monotone.) *Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente (decrescente). Esiste il limite della successione $\{a_n\}$ e risulta*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \ \ (\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n). \tag{2}$$

Dim. Per fissare le idee, consideriamo una successione $\{a_n\}$ crescente.

Supponiamo dapprima che la successione sia limitata, ossia che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty\,.$$

Posto

$$l = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

grazie alle due proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, abbiamo che:

$$a_n \leqslant l, \ \forall\ n \in \mathbb{N}; \tag{3}$$

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ a_{n_\varepsilon} > l - \varepsilon. \tag{4}$$

Fissato un $\varepsilon > 0$, tenendo presente (1), (3) e (4) possiamo scrivere per ogni $n > n_\varepsilon$

$$l - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leqslant a_n \leqslant l < l + \varepsilon.$$

Abbiamo dunque che per ogni $n > n_\varepsilon$, risulta $|a_n - l| < \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε segue la (2).

Se la successione $\{a_n\}$ è illimitata, ossia

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty\,,$$

abbiamo che

$$\forall\; k > 0,\; \exists\, n_k \in \mathbb{N} \;:\; a_{n_k} > k.$$

Essendo la successione monotona crescente (ossia, sussistendo la (1)) abbiamo che, fissato un $k > 0$, per ogni $n > n_k$ risulta

$$a_n \geqslant a_{n_k} > k.$$

.

Questo dimostra che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\,,$$

ossia la tesi. In modo analogo si dimostra il teorema per le successioni decrescenti. □