La formula di De Moivre-Stirling.

Sia p un numero naturale; consideriamo il rettangolo di vertici $(p,0)$, $(p,\log(p+1))$, $(p+1,\log(p+1))$, $(p+1,0)$ (cfr. figura). L'area di questo rettangolo è evidentemente $\log(p+1)$. D'altra parte, quest'area sarà uguale alla somma dell'area del triangolo T di vertici $(p,\log p)$, $(p,\log(p+1))$, $(p+1,\log(p+1))$ e dell'area del trapezio R di vertici $(p,0)$, $(p,\log p)$, $(p+1,\log(p+1))$, $(p+1,0)$.

Risulta:

$$\text{area}\, T = \frac{1}{2}[\log(p+1) - \log p]$$
$$\text{area}\, R = \int_p^{p+1} \log x \, dx - \varepsilon_p$$

essendo ε_p l'area della regione tratteggiata in figura. Si ha quindi:

$$\log(p+1) = \int_p^{p+1} \log x \, dx - \varepsilon_p + \frac{1}{2}[\log(p+1) - \log p] \ . \tag{1}$$

Essendo

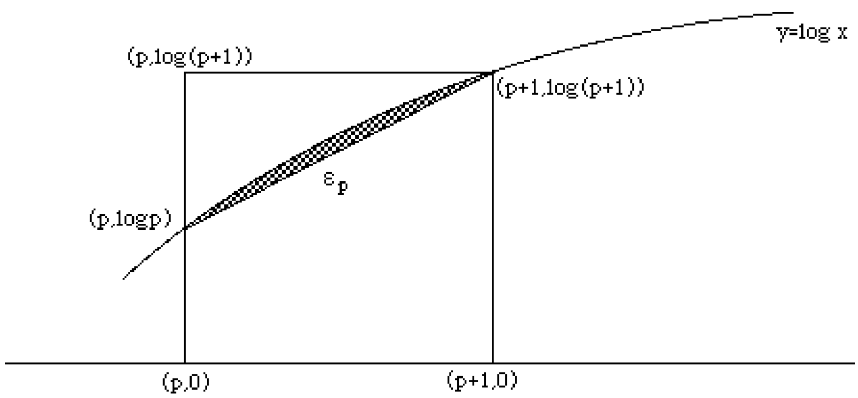
$$\int_p^{p+1} \log x \, dx = [x \log x - x]_p^{p+1} = (p+1)\log(p+1) - p \log p - 1,$$

dalla (1) si ricava:

$$\varepsilon_p = (p + \frac{1}{2}) \log(1 + \frac{1}{p}) - 1.$$

Risulta $\varepsilon_p > 0$ e vogliamo dimostrare che

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p < +\infty \ . \tag{2}$$



Si ha [1]

$$\lim_{p\to\infty} p^2\varepsilon_p =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\log(1+t)-1}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)\log(1+t)-t}{t^3} = \frac{0}{0} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\log(1+t)+\left(1+\frac{t}{2}\right)\frac{1}{1+t}-1}{3t^2} = \frac{0}{0} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-\left(1+\frac{t}{2}\right)\frac{1}{(1+t)2}}{6t} = \frac{1}{12}\ .$$

Quindi ε_p è un infinitesimo del secondo ordine rispetto a $\frac{1}{p}$; applicando il criterio dell'ordine di infinitesimo (cfr. Picone-Fichera, Corso di Analisi Matematica II, Vol. II, p.18) si ottiene la (2).

Scriviamo ora la (1) per $p = 1, 2, .., n-1$; sommando le uguaglianze così ottenute e tenendo presente che $\log n! = \sum_{p=1}^{n-1}\log(p+1)$, si trova :

$$\log n! = \int_1^n \log x\,dx + \frac{1}{2}\log n - \sum_{p=1}^{n-1}\varepsilon_p = n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\log n - \sum_{p=1}^{n-1}\varepsilon_p\ ,$$

ossia:

$$\log\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) = 1 - \sum_{p=1}^{n-1}\varepsilon_p. \tag{3}$$

In base alla (2) esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$$

e quindi la successione (monotona decrescente)

$$x_n = \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} \tag{4}$$

tende a un limite x_0 finito e diverso da zero. Per il calcolo di x_0 conviene servirsi della formula di Wallis (cfr. Picone-Fichera, Corso di Analisi Matematica, Vol. II, p.102, nota (19)):

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{\sqrt{n}\,(2n-1)!!} =^{(2)} \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}$$

[1] Dove compare la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si è applicata la regola di De L'Hospital.
[2] Si osservi che $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!\,;\ (2n)!! = 2^n n!$.

Esprimendo $n!$ e $(2n)!$ tramite la (4) si ottiene:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} \frac{(x_n n^n \sqrt{n}\, e^{-n})^2}{x_{2n}(2n)^{2n}\sqrt{2n}\, e^{-2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x_n^2}{x_{2n}} \ .$$

Poiché $x_n \to x_0$ con x_0 finito e diverso da zero, si ha $x_0 = \sqrt{2\pi}$. Abbiamo così dimostrato la formula di De Moivre - Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} = 1 \ .$$

A titolo informativo, avvertiamo che è possibile precisare la rapidità con la quale la successione $\{x_n\}$ converge. Infatti sussiste la seguente disuguaglianza:

$$1 + \frac{1}{12n+1} < \frac{n!\, e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} < 1 + \frac{1}{12n-1} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

La dimostrazione si può ottenere tramite uno studio più approfondito della serie $\sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p$ (cfr. Taylor- Mann, Advanced Calculus, p. 699-705).