**Un'altra espressione della speranza**

**1.** *Sia $X$ una variabile aleatoria discreta definita su uno spazio degli eventi $\Omega$ al più numerabile. Allora*

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\omega)\,. \tag{1}$$

*Dim.* Per definizione la speranza è data dalla formula

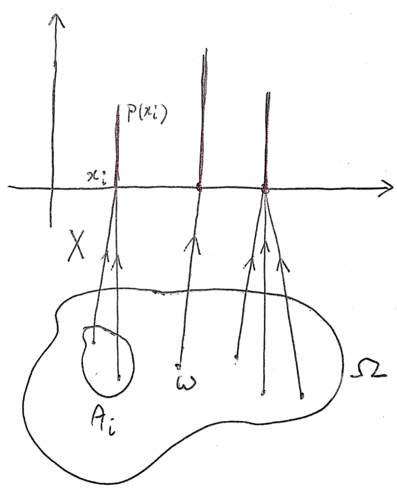
$$E[X] = \sum_i x_i\, p(x_i)\,,$$

dove $\{x_i\}$ sono i valori che $X$ assume e $\{p(x_i)\}$ sono le relative densità, cioè $p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$. Se denotiamo con $A_i$ la controimmagine $X^{-1}(x_i)$ ossia

$$A_i = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}\,,$$

possiamo scrivere, grazie alla $\sigma$-additività di $\mathbb{P}$ (cfr. figura),

$$p(x_i) = \sum_{\omega \in A_i} \mathbb{P}(\omega)\,.$$




Quindi

$$E[X] = \sum_i x_i \sum_{\omega \in A_i} \mathbb{P}(\omega) = \sum_i \sum_{\omega \in A_i} x_i\, \mathbb{P}(\omega) = \sum_i \sum_{\omega \in A_i} X(\omega)\, \mathbb{P}(\omega)$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che se $\omega \in A_i$, allora $X(\omega) = x_i$). Ma essendo

$$\bigcup_i \bigcup_{\omega \in A_i} \{\omega\} = \Omega$$

si ha anche

$$\sum_i \sum_{\omega \in A_i} X(\omega)\,\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\omega)$$

e la (1) è dimostrata. $\square$