Sugli spazi riflessivi

Sia X uno spazio normato. Con il simbolo X^* indichiamo il duale (topologico) di X, ossia lo spazio dei funzionali lineari e continui da X in $\mathbb{R}$ munito della norma usuale

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|\langle f,x\rangle|}{\|x\|}$$

X^{**} indicherà dunque il biduale di X, ossia il duale di X^*.

Sia J l'applicazione canonica da X in X^{**}, ossia l'applicazione che associa ad ogni $x \in X$ il funzionale Jx definito come

$$\langle Jx, f\rangle = \langle f,x\rangle \qquad \forall\, x \in X. \tag{1}$$

Essendo

$$|\langle Jx, f\rangle| = |\langle f,x\rangle| \leqslant \|f\|\,\|x\|, \qquad \forall\, f \in X^* \tag{2}$$

effettivamente la (1), per ogni $x \in X$, definisce un elemento di X^{**}.

L'applicazione J è evidentemente lineare ed essendo, in virtù della (2),

$$\|Jx\| \leqslant \|x\|, \qquad \forall\, x \in X,$$

l'applicazione J risulta lineare e continua.

Essendo poi

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} |\langle f,x\rangle| = \sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} |\langle Jx,f\rangle| \leqslant \|Jx\|\,\|f\| = \|Jx\|\,,$$

abbiamo che

$$\|Jx\| = \|x\|\,, \qquad \forall\, x \in X,$$

ossia J risulta un'isometria.

Lo spazio X si dice riflessivo se risulta $J(X) = X^{**}$. Non è difficile far vedere che se la dimensione di X è finita, allora X è riflessivo.

1 *Se X è riflessivo, X è uno spazio di Banach.*

DIM. Se X è riflessivo, risulta $JX = X^{**}$. Ma X^{**} è uno spazio completo (lo sono tutti gli spazi duali!) ed essendo J un'isometria, anche X lo deve essere. $\square$

Come conseguenza di questo risultato, si ha che uno spazio normato non completo non può essere riflessivo. Esistono, comunque, spazi completi che non sono riflessivi. Un esempio è dato da $L^1(\Omega)$ (dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e la misura è quella di Lebesgue), dato che, come sappiamo, il suo duale è isomorfo a $L^\infty(\Omega)$ e il duale di $L^\infty(\Omega)$ non è isomorfo a $L^1(\Omega)$.

Si noti che se X è uno spazio riflessivo, X e X^{**} risultano isomorfi. Tuttavia dire che uno spazio X è riflessivo **non** è equivalente al fatto che X e X^{**} sono isomorfi. In effetti può accadere che X e X^{**} sono isomorfi tramite un certo operatore S, ma che risulti $J(X) \neq X^{**}$.

2 *Sia H uno spazio di Hilbert. H risulta riflessivo.*

DIM. Sia $\psi : H \to H^*$ l'operatore che a ogni $y \in H$ associa il funzionale $\psi(y)$ dato da

$$\langle \psi(y), x \rangle = (x, y).$$

Grazie al teorema di rappresentazione di Riesz, ψ è un'isometria di H su tutto H^*.

Dati due funzionali f e g di H^*, definiamo il loro prodotto scalare nel modo seguente

$$[f, g] = (\psi^{-1}(g), \psi^{-1}(f)).$$

Lasciamo al lettore la verifica che si tratta di un prodotto scalare che induce la norma usuale su H^*. Sia $\Phi : H^* \to H^{**}$ l'applicazione analoga alla ψ, ossia

$$\langle \Phi(f), g \rangle = [g, f].$$

Si consideri ora l'applicazione $\Phi \circ \psi : H \to H^{**}$. Essendo

$$\langle \Phi \circ \psi(y), f \rangle = [f, \psi(y)] = (y, \psi^{-1}(f)) = \langle f, y \rangle$$

l'applicazione $\Phi \circ \psi$ non è altro che l'applicazione canonica. Essendo sia ψ che Φ degli isomorfismi, abbiamo che H è riflessivo. $\square$

Con dimostrazione analoga (lasciata per esercizio) si dimostra che gli spazi L^p con $1 < p < \infty$ risultano riflessivi.

3 *Sia X uno spazio di Banach. X risulta riflessivo se e solo se X^* è riflessivo.*

DIM. Supponiamo che X sia riflessivo. Fissiamo un $\Phi \in X^{***}$.

Essendo $JX = X^{**}$, per ogni funzionale $F \in X^{**}$ esiste un $x \in X$ tale che $F = Jx$. Abbiamo quindi

$$\langle \Phi, F \rangle = \langle \Phi, Jx \rangle.$$

Posto $f = \Phi \circ J$, risulta $f \in X^*$ e, ricordando anche la definizione di J, possiamo scrivere

$$\langle \Phi, F \rangle = \langle f, x \rangle = \langle Jx, f \rangle \ ,$$

Abbiamo dunque che, per ogni $\Phi \in X^{***}$ esiste un $f \in X^*$ tale che

$$\langle \Phi, F \rangle = \langle F, f \rangle \qquad \forall\, F \in X^{**}$$

e questo mostra che X^* è riflessivo.

Viceversa, supponiamo che X^* sia riflessivo. Se X non fosse riflessivo, avremmo che $J(X)$ è un sottospazio chiuso (X è un Banach e J un'isometria!) di X^{**} che non coincide con X^{**}. Per una conseguenza del teorema di Hahn-Banach, possiamo trovare un funzionale $\Phi \in X^{***}$ non nullo che si annulla su $J(X)$. Se indichiamo con $\widetilde{J}$ l'applicazione canonica da X^* in X^{***}, esiste un $f \in X^*$ tale che $\widetilde{J}f = \Phi$ e risulta

$$\langle \Phi, Jx \rangle = 0 \qquad \forall\, x \in X.$$

D'altra parte

$$\langle \Phi, Jx \rangle = \langle \widetilde{J}f, Jx \rangle = \langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle$$

e quindi

$$\langle f, x \rangle = 0 \qquad \forall\, x \in X$$

ossia $f = 0$. Ma allora $\Phi = \widetilde{J}f = 0$ e questo è assurdo. Deve quindi essere $J(X) = X^{**}$.

$\square$

Come conseguenza di questo Teorema, si ha che e $L^\infty(\Omega)$ non è riflessivo. Se lo fosse, infatti, lo dovrebbe essere anche $L^1(\Omega)$ e questo non è vero.

Sia ora X uno spazio normato e sia M un suo sottospazio chiuso. Definiamo in X una relazione di equivalenza dicendo che $f \sim g$ se e solo se $f - g \in M$. Lo spazio quoziente X/M è costituito dalle classi di equivalenza determinate dalla relazione appena introdotta. La classe di equivalenza contenente l'elemento x viene indicata con $[x]$. Nello spazio quoziente X/M rimangono definite in modo naturale la somma e il prodotto per uno scalare:

$$[x] + [y] = [x + y], \qquad a[x] = [ax] \qquad (x, y \in X, a \in \mathbb{R}).$$

Si può dotare lo spazio vettoriale X/M della norma seguente:

$$\| [x] \| = \inf_{x \in [x]} \|x\| .$$

Lasciamo come esercizio la verifica che si tratta di una norma. Si può dimostrare che se X è uno spazio di Banach, allora anche lo spazio quoziente X/M è un Banach.

Dato un sottospazio M di X, denotiamo con $M^\perp$ il seguente insieme

$$M^\perp = \{ f \in X^* \mid \langle f, m \rangle = 0, \ \forall m \in M \}.$$

E' facile verificare che $M^\perp$ risulta un sottospazio chiuso di X^*. Consideriamo lo spazio quoziente $X^*/M^\perp$ e definiamo l'applicazione

$$T : \ X^*/M^\perp \to M^*$$

che associa ad una classe di equivalenza $[f]$ dello spazio quoziente $X^*/M^\perp$ la restrizione $g|_M$ di un qualsiasi funzionale g appartenente alla classe di equivalenza $[f]$.

Questa definizione è ben posta. Infatti, se f e g appartengono alla medesima classe di equivalenza $[f]$, vuol dire che $f - m \in M^\perp$, ossia che f e g coincidono su M. E' poi ovvio che la restrizione a M di un funzionale di X^* risulta lineare e continua su M, ossia che essa appartiene a M^*.

Lo spazio quoziente $X^*/M^\perp$ può essere pensato come lo spazio che si ottiene identificando due funzionali di X^* che coincidono su M. Il prossimo teorema mostra che in questo modo si ottiene di fatto M^*.

4 *L'applicazione T ora definita risulta un isometria da $X^*/M^\perp$ su M^*.*

DIM. L'operatore T risulta continuo. Infatti, essendo per ogni $g \in [f]$ [(1)]

$$\| T[f] \| = \|g|_M\| \leqslant \|g\| ,$$

risulta

$$\| T[f] \| \leqslant \inf_{g \in [f]} \|g\| = \| [f] \| .$$

[(1)] Si noti che la norma della restrizione $g|_M \in M^*$ è minore della norma del funzionale $g \in X^*$:

$$\|g|_M\| = \sup_{\substack{m \in M \\ m \neq 0}} \frac{|\langle g, m \rangle|}{\|m\|} \leqslant \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|\langle g, x \rangle|}{\|x\|} = \|g\| .$$

Inoltre, per il teorema di Hahn-Banach, per ogni $[f] \in X^*/M^{\perp}$, esiste un funzionale $h \in X^*$ tale che

$$h|_M = T[f], \qquad \|h\| = \|h|_M\|.$$

Da ciò segue

$$\|\,[f]\,\| = \inf_{g \in [f]} \|g\| \leqslant \|h\| = \|h|_M\| = \|\,T[f]\,\|.$$

Risulta così dimostrato che T è un'isometria, ossia che $\|\,T[f]\,\| = \|\,[f]\,\|$, per ogni $[f] \in X^*/M^{\perp}$.

Per concludere la dimostrazione, basta osservare che il codominio di T è tutto M^*. Ciò segue ancora dal teorema di Hahn-Banach, dato che - in virtù di questo - ogni funzionale $g \in M^*$ può essere visto come la restrizione di un funzionale $f \in X^*$. □

5 *Sia X uno spazio riflessivo. Se M è un suo sottospazio chiuso, anche M risulta riflessivo.*

DIM. Sia Φ un fissato elemento di M^{**}. In base al Teorema 4, per ogni $\varphi \in M^*$ esiste un $f \in X^*$ tale che $\varphi = T[f]$.

Consideriamo l'applicazione che ad ogni $f \in X^*$ associa il numero $\langle \Phi, T[f] \rangle$. E' ovvio che tale applicazione risulta lineare. Essa è anche continua, dato che

$$|\langle \Phi, T[f] \rangle| \leqslant \|\Phi\|\,\|\,T[f]\,\| = \|\Phi\|\,\|\,[f]\,\| \leqslant \|\Phi\|\,\|f\|,$$

ossia è un elemento di X^{**}, che indicheremo con F.

D'altra parte, essendo X riflessivo, esiste un $x \in X$ tale che $Jx = F$. Risulta quindi

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \langle \Phi, T[f] \rangle = \langle F, f \rangle = \langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle \tag{3}$$

per ogni $\varphi \in M^*$, essendo $f \in X^*$ tale che $T[f] = \varphi$.

Dimostriamo che x deve appartenere a M. Supponiamo che ciò non sia vero, ossia che $x \notin M$. Per una conseguenza del teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale $f \in X^*$ tale che $f|_M = 0$, $\langle f, x \rangle = 1$ (qui si sfrutta il fatto che M è un sottospazio chiuso). Sia $\varphi = T[f]$. Essendo $f|_M = 0$, abbiamo $[f] = 0$ e quindi $\varphi = 0$.

Scrivendo la (3) per questa particolare f, otteniamo

$$0 = \langle \Phi, \varphi \rangle = \langle f, x \rangle = 1,$$

che è palesemente assurdo.

Deve quindi essere $x \in M$. Indichiamo con m questo elemento. Tenendo presente la (3) e il fatto che $m \in M$, possiamo scrivere

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \langle f, m \rangle = \langle f|_M, m \rangle = \langle T[f], m \rangle = \langle \varphi, m \rangle .$$

Abbiamo così dimostrato che per ogni $\Phi \in M^{**}$, esiste un $m \in M$ tale che

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \langle \varphi, m \rangle \qquad \forall\ \varphi \in M^*,$$

ossia la tesi. $\square$