A. Cialdea

Appunti sugli Spazi di Sobolev.

Complementi al Corso di Analisi Superiore
Versione V, 2020

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi della Basilicata

1. I mollifiers.

Sia ϱ una funzione ≥ 0 tale che [(1)]

$$1)\ \varrho \in C^\infty(I\!R^n); \qquad 2)\ \varrho(-x) = \varrho(x); \qquad 3)\ \operatorname{spt}\varrho \subset B_1(0) \qquad 4)\ \int_{I\!R^n} \varrho(x)\,dx = 1.$$

Una siffatta ϱ è, per esempio, la funzione seguente

$$\varrho(x) = \begin{cases} k\,e^{-\frac{1}{1-|x|}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

dove la costante K è data da

$$K = \frac{1}{\displaystyle\int_{|x|<1} e^{-\frac{1}{1-|x|}}\,dx} \ .$$

Definiamo ora, per $\varepsilon > 0$,

$$\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\,\varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ .$$

Le funzioni ϱ_ε sono tali che

$$1)\ \varrho_\varepsilon \in C^\infty(I\!R^n); \qquad 2)\ \varrho_\varepsilon(-x) = \varrho_\varepsilon(x); \qquad 3)\ \operatorname{spt}\varrho_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0) \qquad 4)\ \int_{I\!R^n} \varrho_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

Le prime tre relazioni sono ovvie; per quanto riguarda la quarta, si ha

$$\int_{I\!R^n} \varrho_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{I\!R^n} \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{I\!R^n} \varrho(y)\,\varepsilon^n dy = 1 \ .$$

Funzioni $\{\varrho_\varepsilon\}$ con queste caratteristiche sono dette *mollifiers*.

Scrivendo $A \subset\subset \Omega$ intendiamo che A e Ω sono due aperti di $I\!R^n$ e che la chiusura di A è un compatto contenuto in Ω (ciò implica, ovviamente, che A è limitato).

Con A_ε indichiamo l'insieme $\{x \in I\!R^n \mid \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}$. Una volta fissati Ω e $A \subset\subset \Omega$, fisseremo ε_0 numero positivo tale che $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(A, \partial\Omega)$, ossia tale che $A_{\varepsilon_0} \subset\subset \Omega$.

---

(1) Ricordiamo che, data una funzione ϱ continua definita in un aperto Ω, si definisce il suo supporto come l'insieme

$$\operatorname{spt}\varrho = \overline{\{x \in \Omega \ \ \varrho(x) \neq 0\}}.$$

Sia Ω un aperto di $I\!R^n$. Data una funzione $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e fissato un $A \subset\subset \Omega$, si chiama *regolarizzata* della u la funzione

$$R_\varepsilon u(x) \equiv u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy, \qquad x \in A,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{1.1}$$

Osserviamo che la funzione u_ε risulta effettivamente definita in A, dato che, essendo

$$x \in A,\ y \notin \overline{A}_\varepsilon,\ \Longrightarrow\ |x-y| > \varepsilon\ \Longrightarrow\ \varrho_\varepsilon(x-y) = 0, \tag{1.2}$$

la (1.1) si può scrivere

$$u_\varepsilon(x) = \int_{A_\varepsilon} u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy, \qquad x \in A,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

L'integrale, quindi, si può pensare esteso all'insieme limitato A_ε; dato che $u \in L^1(A_\varepsilon)$ e la ϱ_ε è limitata, l'integrale in questione esiste finito.

Osserviamo che se $u \in L^1(\Omega)$, allora l'integrale in (1.1) esiste finito per ogni $x \in I\!R^n$ e quindi u_ϵ è definita dappertutto.

Come dimostrato per la prima volta da Friedrichs (che introdusse il concetto di mollifier) le funzioni u_ε sono di classe C^∞ e approssimano la u, dove il tipo di approssimazione dipende dal grado di regolarità della funzione u. Ciò sarà dimostrato nei prossimi teoremi.

I. *Sia $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $A \subset\subset \Omega$. Sia u_ε la regolarizzata (1.1) ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$). La funzione u_ε risulta di classe $C^\infty(A)$. Se $u \in C^0(\Omega)$ ed è dotata di derivata parziale $u_{x_h} \in C^0(\Omega)$, allora*

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)_\varepsilon (x) \qquad x \in A. \tag{1.3}$$

Poiché $\varrho_\varepsilon(x-y) \in C^\infty(I\!R^n \times I\!R^n)$, è lecita ogni derivazione sotto il segno di integrale e quindi (1.1) implica

$$D^\alpha u_e(x) = \int_\Omega D^\alpha_x[\varrho_\varepsilon(x-y)]\, u(y)\, dy$$

per ogni multiindice α [(2)].

[(2)] Dato un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ossia un vettore a n componenti intere non negative, scrivendo D^α intendiamo la derivata

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

dove $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ è detta *lunghezza* del multi-indice α.

In particolare abbiamo

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_h}(x) = \int_{A_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_h}[\varrho_\varepsilon(x-y)]\, u(y)\, dy.$$

Possiamo quindi scrivere, ricordando la (1.2),

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_h}(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial x_h}[\varrho_\varepsilon(x-y)]\, u(y)\, dy,$$

ossia

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_h}(x) = -\int_{B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial y_h}[\varrho_\varepsilon(x-y)]\, u(y)\, dy.$$

Integrando per parti e tenendo presente che $\varrho_e(x-y)$ è nulla per $y \in \partial B_\varepsilon(x)$,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_h}(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \varrho_\varepsilon(x-y)\, \frac{\partial u(y)}{\partial y_h}\, dy$$

ossia la (1.3).

II. *Sia* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *e* $A \subset\subset \Omega$. *Se* $\operatorname{spt} u \subset A$ [3], *allora* $\operatorname{spt} u_\varepsilon \subset A_\varepsilon$.

Se $\operatorname{spt} u \subset A$, si ha

$$u_\varepsilon(y) = \int_A u(x)\, \varrho_\varepsilon(y-x)\, dx$$

e la tesi segue subito dalla (1.2).

Per semplificare l'esposizione dei prossimi risultati, indicheremo con $\mathcal{L}^p(\Omega)$ (o brevemente $\mathcal{L}$) uno dei seguenti spazi

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \begin{cases} L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \text{se } 1 \le p < \infty \\ \\ C^0(\Omega) & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

dove Ω è un fissato aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $A \subset\subset \Omega$ e $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, con $\|u\|_A$ indicheremo la relativa norma in A, ossia

$$\|u\|_A = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_A |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \le p < \infty \\ \displaystyle\max_{x \in \overline{A}} |u(x)| & \text{se } p = \infty\ . \end{cases}$$

---

[3] Osserviamo che essendo la funzione u definita solo quasi ovunque, non ha senso la definizione di supporto data per funzioni continue. In questo caso il supporto della u viene definito come il complementare dell'unione di tutti gli aperti contenuti in Ω nei quali risulta $u = 0$ q.o.. Si noti che l' ipotesi del testo implica $u \in L^1(\Omega)$, e quindi che la u_ε è definita dappertutto.

III. *Sia $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e $A \subset\subset \Omega$. Risulta*

$$\|u_\varepsilon\|_A \leq \|u\|_{A_\varepsilon} \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0).$$

Sia $1 < p < \infty$. Per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ed $x \in A$ si ha

$$|u_\varepsilon(x)|^p = \left| \int_\Omega u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy \right|^p = \left| \int_\Omega u(y)\, [\varrho_\varepsilon(x-y)]^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\, dy \right|^p \leq$$
$$\left(\int_\Omega |u(y)|^p \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy \right) \left(\int_\Omega \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy \right)^{\frac{p}{q}} = \int_\Omega |u(y)|^p \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy$$

e quindi, tenendo presente anche la (1.2),

$$\|u_\varepsilon\|_A^p = \int_A |u_\varepsilon(x)|^p dx \leq \int_A dx \int_\Omega |u(y)|^p \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy = \int_\Omega |u(y)|^p dy \int_A \varrho_\varepsilon(x-y)\, dx =$$
$$\int_{A_\varepsilon} |u(y)|^p dy \int_A \varrho_\varepsilon(x-y)\, dx \leq \int_{A_\varepsilon} |u(y)|^p dy = \|u\|_{A_\varepsilon}^p.$$

Lasciamo al Lettore il compito di scrivere l'analoga dimostrazione nei casi $p = 1$ e $p = \infty$.

IV. *Siano $f, g \in \mathcal{L}$ con $\operatorname{spt} g \subset A \subset\subset \Omega$. Si ha*

$$\int_\Omega f\, R_\varepsilon g\, dx = \int_\Omega g\, R_\varepsilon f\, dx \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0).$$

Essendo $\operatorname{spt} g_\varepsilon \subset A_\varepsilon$ per il lemma II, si ha

$$\int_\Omega f\, R_\varepsilon g\, dx = \int_{A_\varepsilon} f\, R_\varepsilon g\, dx = \int_{A_\varepsilon} f(x)\, dx \int_\Omega g(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy =$$
$$\int_{A_\varepsilon} f(x)\, dx \int_A g(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy$$

(dato che $\operatorname{spt} g \subset A$). Per i teoremi di Tonelli e Fubini possiamo scambiare l'ordine di integrazione e scrivere

$$\int_\Omega f\, R_\varepsilon g\, dx = \int_A g(y)\, dy \int_{A_\varepsilon} f(x)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

Tenendo presente, poi, che la ϱ_ε è pari si ottiene

$$\int_\Omega f\, R_\varepsilon g\, dx = \int_A g(y)\, dy \int_{A_\varepsilon} f(x)\, \varrho_\varepsilon(y-x)\, dy = \int_A g(y)\, dy \int_\Omega f(x)\, \varrho_\varepsilon(y-x)\, dy$$

(si ricordi la (1.2)!) ossia la tesi.

V. *Sia $f \in \mathcal{L}$ e $A \subset\subset \Omega$. Risulta*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|R_\varepsilon u - u\|_A = 0.$$

Cominciamo dal caso $p = \infty$. Considerato il compatto $\overline{A}_{\varepsilon_0}$, per il teorema di Heine-Cantor,

$$\forall\ \sigma > 0,\ \exists\ \delta_\sigma > 0 \quad | \quad \forall\ x, y \in \overline{A}_{\varepsilon_0},\ |x - y| < \delta_\sigma \implies |f(x) - f(y)| < \sigma.$$

Per le proprietà dei mollifiers si ha

$$R_\varepsilon f(x) - f(x) = \int_\Omega f(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy =$$
$$\int_{B_\varepsilon(x)} [f(y) - f(x)]\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy \qquad x \in A.$$

Scegliendo $0 < \varepsilon < \delta_\sigma$ (si noti che $x \in A, y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow x, y \in A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon_0}$) risulta

$$|R_\varepsilon f(x) - f(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - f(x)|\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy < \sigma \int_{B_\varepsilon(x)} \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy = \sigma \qquad \forall x \in A$$

e quindi la tesi.

Sia ora $f \in \mathcal{L}$, con $1 \leq p < \infty$. Fissato un $\sigma > 0$, scegliamo una $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ (ad esempio un polinomio) tale che

$$\|f - g\|_{A_{\varepsilon_0}} < \sigma\,.$$

Si ha dunque (per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$), ricordando il lemma III,

$$\|R_\varepsilon f - f\|_A \leq \|R_\varepsilon f - R_\varepsilon g\|_A + \|R_\varepsilon g - g\|_A + \|g - f\|_A \leq$$
$$\|f - g\|_{A_\varepsilon} + \|R_\varepsilon g - g\|_A + \|g - f\|_A \leq 2\, \|f - g\|_{A_{\varepsilon_0}} + \|R_\varepsilon g - g\|_A < 2\, \sigma + \|R_\varepsilon g - g\|_A\ .$$

Per quanto appena dimostrato per le funzioni continue, risulta

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \|R_\varepsilon f - f\|_A \leq 2\, \sigma$$

ossia la tesi, per l'arbitrarietà di σ.

Una conseguenza del precedente teorema è il seguente *lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni*:

VI. *Sia Ω un aperto di $I\!R^n$ e sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega u\,\varphi\,dx = 0 \qquad \forall\,\varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega). \tag{1.4}$$

Allora $u = 0$ q.o. in Ω.

Sia $A \subset\subset \Omega$ e sia $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(A, \partial\Omega)$. Fissato un $x \in A$ la funzione della y: $\varrho_\varepsilon(x-y)$ appartiene a $\mathring{C}^\infty(\Omega)$ per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. La (1.4) implica

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\,\varrho_\varepsilon(x-y)\,dy = 0 \qquad \forall\,x \in A.$$

D'altra parte, per il teorema precedente, $\|u - u_\varepsilon\|_A \to 0$, e dunque $\|u\|_A = 0$. Quindi $u = 0$ q.o. in A. Per l'arbitrarietà di A si ha la tesi.

È interessante osservare che l'uso dei mollifiers permette di dimostrare rapidamente il seguente lemma, noto come *lemma di Uryshon* (il lemma in realtà si dimostra in ambienti molto più generali di $I\!R^n$, cfr. ad es. W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Ed. Boringhieri, p. 54 e p.432).

VII. *Sia $K \subset A \subset I\!R^n$ con K compatto e A aperto. Esiste una funzione $\varphi \in \mathring{C}^\infty(I\!R^n)$ tale che* $\operatorname{spt}\varphi \subset A$ *e* $\varphi(x) = 1,\ \forall\,x \in K$.

Sia δ tale che $0 < 2\delta < \operatorname{dist}(K, \partial A)$. La funzione

$$\varphi(x) = \int_{K_\delta} \varrho_\delta(x-y)\,dy = \int_{\boldsymbol{R}^n} \chi_{K_\delta}(y)\,\varrho_\delta(x-y)\,dy$$

soddisfa le condizioni richieste. Infatti $\varphi \in C^\infty(I\!R^n)$ e inoltre per il lemma II $\operatorname{spt}\varphi \subset K_{2\delta}$ e ciò dimostra che $\operatorname{spt}\varphi \subset A$. Infine, se $x \in K$, risulta $B_\delta(x) \subset K_\delta$ e quindi

$$\varphi(x) = \int_{K_\delta} \varrho_\delta(x-y)\,dy = \int_{\boldsymbol{R}^n} \varrho_\delta(x-y)\,dy = 1.$$

Il lemma di Uryshon appena dimostrato permette di ottenere il seguente teorema, noto come teorema della *partizione dell'unità*. Esistono varie versioni di questo teorema; noi ne dimostreremo una sola, che è quella che ci sarà utile in seguito.

VIII. *Sia K un compatto e siano $U_1, \ldots, U_m$ degli aperti tali che*

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m U_j.$$

Esistono delle funzioni $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ tali che: $\vartheta_j \in \mathring{C}^\infty(I\!R^n)$, $\operatorname{spt}\vartheta_j \subset U_j,\ 0 \le \vartheta_j \le 1$,

$$\sum_{j=1}^m \vartheta_j(x) = 1 \qquad \forall\,x \in K. \tag{1.5}$$

Le funzioni $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ forniscono la cosiddetta partizione dell'unità su K subordinata al ricoprimento $U_1, \ldots, U_m$.

Per ogni $x \in K$ esiste (almeno) un j tale che $x \in U_j$; ad ogni $x \in K$ associamo, allora, una palle $B_{\delta_x}(x)$ tale che $B_{\delta_x}(x) \subset\subset U_j$ per qualche j. Ovviamente abbiamo che

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\delta_x}(x)$$

e quindi, per la compattezza di K, esistono $x_1, \ldots, x_s \in K$ tali che

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Per ogni j consideriamo tutte le $B_{\delta_{x_i}}(x_i)$ tali che $B_{\delta_{x_i}}(x_i) \subset\subset U_j$ e chiamiamo H_j l'unione delle loro chiusure:

$$H_j = \bigcup \overline{B}_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Dato che ogni $\overline{B}_{\delta_{x_i}}(x_i)$ è contenuta in almeno uno degli U_j, avremo che nell'unione degli H_j compaiono tutte le $\overline{B}_{\delta_{x_i}}(x_i)$ e quindi si ha

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\delta_{x_i}}(x_i) \subset \bigcup_{j=1}^{m} H_j \ . \tag{1.6}$$

L'insieme H_j risulta un compatto (magari vuoto) contenuto in U_j. Per il lemma di Uryshon VII esistono delle funzioni $\varphi_j \in \overset{\circ}{C}^\infty(I\!R^n)$ tali che $\operatorname{spt} \varphi_j \subset U_j$ e $\varphi_j(x) = 1, \ \forall\, x \in H_j$ (se $H_j = \emptyset$, allora prendiamo $\varphi_j \equiv 0$).

Poniamo

$$\begin{gathered}
\vartheta_1 = \varphi_1, \\
\vartheta_2 = \varphi_2(1 - \varphi_1), \\
\ldots \\
\vartheta_m = \varphi_m(1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_{m-1})
\end{gathered}$$

Le funzioni $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ sono tali che: $\vartheta_j \in \overset{\circ}{C}^\infty(I\!R^n)$, $\operatorname{spt} \vartheta_j \subset U_j$, $0 \le \vartheta_j \le 1$. Rimane da verificare la (1.5). Osserviamo che

$$\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_m = 1 - \prod_{j=1}^{m} (1 - \varphi_j) \ . \tag{1.7}$$

infatti la (1.7) è vera per $m = 1$; supponiamo che sia

$$\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_{m-1} = 1 - \prod_{j=1}^{m-1} (1 - \varphi_j)$$

e mostriamo che sussiste la (1.7):

$$\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_m = 1 - \prod_{j=1}^{m-1} (1-\varphi_j) + \varphi_m \prod_{j=1}^{m-1} (1-\varphi_j) =$$

$$1 - (1-\varphi_m) \prod_{j=1}^{m-1} (1-\varphi_j) = 1 - \prod_{j=1}^{m} (1-\varphi_j).$$

La (1.7) rimane così dimostrata per induzione. Sia ora $x \in K$; in base alla (1.6) abbiamo che esiste almeno un j tale che $x \in H_j$ e quindi $\varphi_j(x) = 1$. Si deve quindi avere

$$\prod_{j=1}^{m} (1-\varphi_j(x)) = 0$$

da cui segue la (1.5), in base alla (1.7).

2. Derivate forti e derivate deboli.

Sia $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ e $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$; applicando la formula di integrazione per parti in un dominio regolare contenuto in Ω e contenente al suo interno il supporto di φ, si trova

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u\; \varphi\, dx.$$

Questa semplice osservazione suggerisce la seguente definizione. Sia $u \in \mathcal{L}$; diremo che $v_\alpha \in \mathcal{L}$ è *la derivata debole* α-sima di u se accade che

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha\, \varphi\, dx \qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

L'osservazione precedente mostra che se $u \in C^k(\Omega)$, allora u le sue derivate (in senso classico) di ordine minore od uguale a k sono anche derivate deboli.

IX. *Le derivate deboli sono uniche.*

Supponiamo che v_α e v'_α siano entrambe derivate deboli α-sime della u, ossia che sussista la (2.1) e, inoltre,

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v'_\alpha\, \varphi\, dx \qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega).$$

Dovrà allora essere

$$\int_\Omega (v_\alpha - v'_\alpha)\, \varphi\, dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$$

e questo, per il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni VI, implica $v_\alpha - v'_\alpha = 0$ q.o., ossia la tesi.

Ad esempio, la derivata debole della funzione di una variabile $|x|$ è la funzione

$$H(x)\begin{cases} = 1 & \text{se } x > 0 \\ = -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Infatti si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, \varphi'(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{0} x\, \varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} x\, \varphi'(x)\, dx = -[x\, \varphi(x)]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx +$$
$$[x\, \varphi(x)]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^{\infty}(I\!R).$$

Si badi, però, che in generale non accade che una derivata esistente q.o. in senso classico (ossia come limite del rapporto incrementale) è anche derivata debole, come nel caso appena visto. Per convincerci di questo, consideriamo la $H(x)$; la sua derivata in senso classico esiste q.o. ed è nulla; però la derivata debole della H non esiste, dato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = -2\, \varphi(0) \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^{\infty}(I\!R)$$

e non esiste alcuna funzione $v \in L^1_{loc}(I\!R)$ tale che

$$(2.2) \qquad 2\, \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^{\infty}(I\!R).$$

Infatti, se esistesse una v siffatta, presa una $\varrho \in \mathring{C}^{\infty}(I\!R)$ tale che $0 \le \varrho \le 1$, $\varrho(0) = 1$, la (2.2) scritta per $\varphi(x) = \varrho(nx)$ implicherebbe

$$2\, \varrho(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\, \varrho(nx)\, dx \qquad \forall\, n \in I\!N$$

ossia

$$2 = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} v(x)\, \varrho(nx)\, dx \qquad \forall\, n \in I\!N$$

e questo è assurdo, dato che

$$\left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} v(x)\, \varrho(nx)\, dx \right| \le \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |v(x)|\, dx \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue.

Un altro concetto importante è quello di derivata forte. Sia $u \in \mathcal{L}$; diremo che $w_\alpha \in \mathcal{L}$ è *la derivata forte* α-sima di u se accade che, per ogni aperto $A \subset\subset \Omega$, esiste una successione $\{u_n\} \subset C^{|\alpha|}(\overline{A})$ tale che

$$(2.3) \qquad \|u_n - u\|_A \to 0, \qquad \|D^\alpha u_n - w_\alpha\|_A \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

X. *I concetti di derivata forte e di derivata debole coincidono.*

Supponiamo $u \in \mathcal{L}$ dotata di derivata forte $w_\alpha \in \mathcal{L}$. Allora possiamo scrivere

$$\int_A u_n\, D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_A D^\alpha u_n\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(A),$$

essendo $\{u_n\} \subset C^{|\alpha|}(\overline{A})$ una successione tale che valga (2.3).

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega w_\alpha\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(A)$$

che, per l'arbitrarietà di A, mostra che w_α è una derivata debole.

Il viceversa è più delicato. Sia $u \in \mathcal{L}$ dotata di derivata debole $v_\alpha \in \mathcal{L}$. Fissiamo un $A \subset\subset \Omega$ e consideriamo le regolarizzate

$$R_\varepsilon u(x) = \int_\Omega u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0).$$

in base ai lemmi IV, I, risulta

$$\int_A R_\varepsilon u\ D^\alpha \varphi\ dx = \int_A u\ R_\varepsilon D^\alpha \varphi\ dx = \int_A u\ D^\alpha R_\varepsilon \varphi\ dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(A).$$

Poiché se $\varphi \in \mathring{C}^\infty(A)$ il spt $R_\varepsilon \varphi$ è contenuto in A per ε abbastanza piccolo (lemma II), possiamo scrivere, tenendo presente la (2.1) e il lemma IV,

$$\int_A R_\varepsilon u\ D^\alpha \varphi\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_A v_\alpha\ R_\varepsilon \varphi\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_A R_\varepsilon v_\alpha\ \varphi\ dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(A).$$

D'altra parte, essendo $R_\varepsilon u$ regolare, si può integrare per parti nell'integrale a primo membro e scrivere

$$\int_A R_\varepsilon u\ D^\alpha \varphi\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_A D^\alpha R_\varepsilon u\ \varphi\ dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(A)$$

e quindi

$$\int_A (R_\varepsilon v_\alpha - D^\alpha R_\varepsilon u)\ \varphi\ dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(A).$$

Il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni mostra che

$$D^\alpha R_\varepsilon u = R_\varepsilon v_\alpha \qquad \text{q.o. in } A. \tag{2.4}$$

In altri termini abbiamo fatto vedere che la (1.3) sussiste anche per le derivate deboli.

Sappiamo poi, dal teorema V, che

$$\|R_\varepsilon u - u\|_A \to 0\ , \qquad \|R_\varepsilon v_\alpha - v_\alpha\|_A \to 0$$

e quindi, per la (2.4),

$$\|R_\varepsilon u - u\|_A \to 0\ , \qquad \|D^\alpha R_\varepsilon u - v_\alpha\|_A \to 0$$

ossia v_α è una derivata forte.

Una conseguenza immediata di questo teorema è l'unicità delle derivate forti.

3. Gli spazi di Sobolev.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e siano p un numero reale $1 \le p < \infty$ e k un intero positivo; si definisce lo *spazio di Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ nel modo seguente

$$W^{k,p}(\Omega) = \big\{ u \in L^p(\Omega) \;\big|\; D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\, \alpha \ :\ |\alpha| \le k \big\}$$

dove le derivate $D^\alpha u$ sono da intendersi come derivate deboli. Tale spazio si considera munito della norma

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

o anche da una delle seguenti norme, tutte tra loro equivalenti (dimostrarlo !):

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p = \sum_{|\alpha|\le k} \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{k,p} = \max_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p \ .$$

Nel caso particolare $p = 2$ la norma è indotta dal prodotto scalare:

$$(f, g) = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha f \ D^\alpha g \ dx \ .$$

XI. *Qualunque sia l'intero $k \ge 0$ e il numero reale $p \ge 1$, $W^{k,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach e, in particolare, $W^{k,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Inoltre $W^{k,p}(\Omega)$ risulta separabile e, per $1 < p < \infty$, riflessivo.*

Per semplicità, consideriamo solo il caso $k = 1$.

Sia $\{u_m\}$ una successione di Cauchy in $W^{1,p}(\Omega)$. Allora le successioni

$$\{u_m\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right\}$$

risultano di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Essendo $L^p(\Omega)$ completo, esistono delle funzioni v_0, v_1, $\dots v_n$ di $L^p(\Omega)$ tali che

$$\|u_m - v_0\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \qquad \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - v_h \right\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \qquad\qquad (h = 1, \dots, n).$$

Le funzioni $v_1, \dots, v_n$ sono proprio le derivate deboli della v_0, dato che dall'essere

$$\int_\Omega u_m \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\, dx = - \int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_h}\, \varphi \, dx \qquad\qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$$

si trae, passando al limite per $m \to \infty$,

$$\int_\Omega v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\, dx = -\int_\Omega v_h\, \varphi\, dx \qquad\qquad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$$

e questo mostra che $v_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre

$$\|u_m - v_0\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u_m - v_0\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{h=1}^n \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_h} - v_h \right\|^p_{L^p(\Omega)} \to 0$$

ossia la successione $\{u_m\}$ risulta convergente in $W^{1,p}(\Omega)$. Ciò dimostra che lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è completo.

Sia ora J l'applicazione da $W^{1,p}(\Omega)$ in $[L^p(\Omega)]^{n+1}$ definita da

$$Ju = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

È evidente che J è un'isometria di $W^{1,p}(\Omega)$ su un sottospazio chiuso di $[L^p(\Omega)]^{n+1}$. Poiché $L^p(\Omega)$, e quindi $[L^p(\Omega)]^{n+1}$, è separabile, si ha che $J\big(W^{1,p}(\Omega)\big)$ è separabile. Essendo J un'isometria, anche $W^{1,p}(\Omega)$ risulta separabile.

Infine, è noto che sottospazi chiusi di uno spazio riflessivo sono riflessivi e quindi, essendo $L^p(\Omega)$ riflessivo (per $1 < p < \infty$), si ha la riflessività di $J\big(W^{1,p}(\Omega)\big)$ (per $1 < p < \infty$). Essendo J un'isometria, anche $W^{1,p}(\Omega)$ risulta riflessivo.

Sia ora $C^{k,p}(\Omega) = \big\{ u \in C^k(\Omega) \;\big|\; \|u\|_{k,p} < \infty \big\}$. Si definisce spazio di Sobolev anche il seguente spazio

$$H^{k,p}(\Omega) = \overline{C^{k,p}(\Omega)}^{\;\|\cdot\|_{k,p}}$$

dove il simbolo $^{\|\cdot\|_{k,p}}$ indica che il completamento dello spazio $C^{k,p}(\Omega)$ è considerato rispetto alla topologia indotta dalla norma indicata.

Ciò significa che una funzione u appartiene ad $H^{k,p}(\Omega)$ se e solo se esiste una successione $\{u_n\}$ di funzioni di $C^{k,p}(\Omega)$ tale che $\|u_n - u\|_p \to 0$ e le successioni $\{D^\alpha u_n\}$ (per $|\alpha| \le k$) sono tutte di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Esistono quindi delle funzioni $w_\alpha \in L^p(\Omega)$ tali che $\|D^\alpha u_n - w_\alpha\|_p \to 0$, e quindi la u è dotata di tutte le derivate forti (ossia deboli) di ordine minore od uguale a k.

Abbiamo così mostrato che $H^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$. In effetti è vero anche il viceversa:

XII. *Qualunque sia l'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si ha $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$.*

Questo teorema, del quale non daremo la dimostrazione, è stato dimostrato per la prima volta da Meyers e Serrin nel 1964 ($H = W$, Proc. Nat. Ac. Sci., 1964). Una dimostrazione può essere trovata nel testo E. Giusti, *Equazioni ellittiche del secondo ordine*, Quaderni dell'UMI, Pitagora, p.17.

A volte, nel caso di aperti Ω limitati, gli spazi di Sobolev vengono definiti nel seguente modo

$$\widehat{H}^{k,p}(\Omega) = \overline{C^k(\overline{\Omega})}^{\;\|\cdot\|_{k,p}}.$$

È bene avvisare, però, che quest'ultima definizione non è perfettamente equivalente alle due date precedentemente. In effetti è ovvio che $\widehat{H}^{k,p}(\Omega) \subset H^{k,p}(\Omega)$ mentre il viceversa vale solo se la frontiera di Ω è di classe C^k.

In generale i due spazi **non** coincidono (cfr. esempio 1), § 10).

4. Alcuni lemmi.

XIII. *Sia X uno spazio misurabile rispetto alla misura (positiva) μ. Siano $f_1, \dots, f_n$ funzioni misurabili non-negative. Si ha*

$$\int_X \prod_{j=1}^n f_j \, d\mu \le \left(\prod_{j=1}^n \int_X {f_j}^n d\mu \right)^{\frac{1}{n}} . \tag{4.1}$$

Dimostriamo questo lemma per induzione. Per la disuguaglianza di Cauchy, il lemma è vero per $n = 2$:

$$\int_X f \, g \, d\mu \le \left(\int_X f^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X g^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Supponiamo quindi che la tesi sia vera per n, ossia supponiamo vera la (4.1), e dimostriamola per $n+1$. Tenendo presente la disuguaglianza di Cauchy-Hölder e che l'esponente coniugato di $n+1$ è dato da $\frac{n+1}{n}$, si ha

$$\int_X \prod_{j=1}^{n+1} f_j \, d\mu = \int_X f_{n+1} \prod_{j=1}^{n} f_j \, d\mu \le$$

$$\left(\int_X f_{n+1}^{n+1} d\mu \right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_X \left(\prod_{j=1}^n f_j \right)^{\frac{n+1}{n}} d\mu \right)^{\frac{n}{n+1}} =$$

$$\left(\int_X f_{n+1}^{n+1} d\mu \right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_X \prod_{j=1}^n f_j^{\frac{n+1}{n}} d\mu \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

Ma per la (4.1) risulta

$$\int_X \prod_{j=1}^n f_j^{\frac{n+1}{n}} d\mu \le \left(\prod_{j=1}^n \int_X \left[f_j^{\frac{n+1}{n}} \right]^{\frac{1}{n}} d\mu \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{j=1}^n \int_X {f_j}^{n+1} d\mu \right)^{\frac{1}{n}}$$

e quindi la tesi.

Siano ora $f_1, \dots, f_n$ delle funzioni definite in $\mathbb{R}^n$, misurabili (rispetto alla misura di Lebesgue), tali che f_j **non** dipende dalla variabile x_j, ossia siano del tipo $f_j(\hat{x}_j)$, dove $\hat{x}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

XIV. *Assegnate le funzioni misurabili non negative $f_1(\hat{x}_1), \dots, f_n(\hat{x}_n)$ si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n f_j(\hat{x}_j) \, dx \le \prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} [f_j(\hat{x}_j)]^{n-1} \, d\hat{x}_j \right)^{\frac{1}{n-1}} . \tag{4.2}$$

Anche questo risultato sarà dimostrato per induzione. Per $n = 2$ è evidente dato che

$$\int_{I\!R^2} f_1(\hat{x}_1)\, f_2(\hat{x}_2)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_1)\, dx_1 \ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_2)\, dx_2.$$

Supponiamo quindi la tesi vera per n e dimostriamola per $n+1$. Intanto, osservato che l'esponente coniugato di n è $\frac{n}{n-1}$, per la disuguaglianza di Cauchy-Hölder si ha

$$\int_{I\!R^{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} f_j(\hat{x}_j)\, dx = \int_{I\!R^n} f_{n+1}(\hat{x}_{n+1})\, d\hat{x}_{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} f_j(\hat{x}_j)\, dx_{n+1} \leq$$

(4.3)

$$\left(\int_{I\!R^n} \left[f_{n+1}(\hat{x}_{n+1})\right]^n\, d\hat{x}_{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{I\!R^n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} f_j(\hat{x}_j)\, dx_{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}} d\hat{x}_{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Essendo per il lemma precedente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} f_j(\hat{x}_j)\, dx_{n+1} \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_j(\hat{x}_j)\right]^n dx_{n+1}\right)^{\frac{1}{n}},$$

ossia

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} f_j(\hat{x}_j)\, dx_{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_j(\hat{x}_j)\right]^n dx_{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

possiamo scrivere

$$\int_{I\!R^n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} f_j(\hat{x}_j)\, dx_{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}} d\hat{x}_{n+1} \leq \int_{I\!R^n} \prod_{j=1}^{n} g_j(\widetilde{x}_j)\, d\hat{x}_{n+1} \tag{4.4}$$

dove abbiamo posto $\widetilde{x}_j = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ e

$$g_j(\widetilde{x}_j) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_j(\hat{x}_j)\right]^n dx_{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Per la (4.2) si ha

$$\int_{I\!R^n} \prod_{j=1}^{n} g_j(\widetilde{x}_j)\, d\hat{x}_{n+1} \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{I\!R^{n-1}} \left[g_j(\widetilde{x}_j)\right]^{n-1} d\widetilde{x}_j\right)^{\frac{1}{n-1}} =$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\int_{I\!R^{n-1}} d\widetilde{x}_j \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_j(\hat{x}_j)\right]^n dx_{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{I\!R^n} \left[f_j(\hat{x}_j)\right]^n d\hat{x}_j\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

(si noti che $d\widetilde{x}_j\, dx_{n+1} = d\hat{x}_j$). Da ciò e dalle (4.3), (4.4) segue

$$\int_{I\!R^{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} f_j(\hat{x}_j)\, dx = \int_{I\!R^n} f_{n+1}(\hat{x}_{n+1})\, d\hat{x}_{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} f_j(\hat{x}_j)\, dx_{n+1} \le$$

$$\left(\int_{I\!R^n} [f_{n+1}(\hat{x}_{n+1})]^n \, d\hat{x}_{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{I\!R^n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} f_j(\hat{x}_j)\, dx_{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}} d\hat{x}_{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \le$$

$$\left(\int_{I\!R^n} [f_{n+1}(\hat{x}_{n+1})]^n \, d\hat{x}_{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\int_{I\!R^n} [f_j(\hat{x}_j)]^n \, d\hat{x}_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

ossia la tesi.

XV. $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(I\!R^n)$ *è denso in* $W^{1,p}(I\!R^n)$.

Cominciamo col dimostrare che, se $u \in L^p(I\!R^n)$, allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|R_\varepsilon u - u\|_p = 0 \ . \tag{4.5}$$

Si noti che, se la u ha il supporto compatto, diciamo K, allora la (4.5) è certamente vera. Infatti sappiamo che, in questo caso,anche $R_\varepsilon u$ ha il supporto compatto e che tale supporto è contenuto in K_ε. Inoltre, per il teorema V, $R_\varepsilon u$ tende ad u in norma L^p su ogni compatto; essendo la norma L^p su tutto $I\!R^n$ uguale alla norma presa su una palla abbastanza grande da contenere $\overline{K}_\varepsilon$, si ha la (4.5).

Consideriamo ora una qualsiasi $u \in L^p(I\!R^n)$. Dato un $\sigma > 0$, sia v una funzione di $L^p(I\!R^n)$ a supporto compatto e tale che

$$\|u - v\|_p < \sigma \ .$$

Osserviamo che $\|R_\varepsilon u\|_p \le \|u\|_p$ (ciò si ottiene adattando la dimostrazione del lemma III) e quindi $R_\varepsilon u \in L^p(I\!R^n)$. Essendo poi $\|R_\varepsilon(u - v)\|_p \le \|u - v\|_p$, abbiamo

$$\|R_\varepsilon u - u\|_p \le \|R_\varepsilon u - R_\varepsilon v\|_p + \|R_\varepsilon v - v\|_p + \|v - u\|_p \le 2\sigma + \|R_\varepsilon v - v\|_p$$

e quindi, essendo la v a supporto compatto,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \|R_\varepsilon u - u\|_p \le \sigma$$

ossia la (4.5).

La (4.5) mostra quindi che $C^\infty(I\!R^n) \cap L^p(I\!R^n)$ è denso in $L^p(I\!R^n)$ (si noti che il supporto di $R_\varepsilon u$ in generale non è compatto !).

Per completare la dimostrazione introduciamo la funzione $\psi(x) = R_{\frac{1}{2}}\chi(x)$, dove $\chi(x)$ è la funzione caratteristica della palla $B_{\frac{3}{2}}(0)$. La funzione $\psi(x)$ è tale che

$$\begin{cases} \psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n) & \\ 0 \le \psi(x) \le 1 & \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\ \psi(x) = 1 & \forall\, x \in B_1(0) \\ \psi(x) = 0 & \forall\, x \notin B_2(0). \end{cases}$$

Sia, infine,

$$w_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x)\ R_\varepsilon u(x)$$

dove $\psi_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon\, x)$. La funzione w_ε risulta di classe $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, dato che la ψ_ε è nulla al di fuori della palla $B_{\frac{2}{\varepsilon}}(0)$.

Si ha

$$\|w_\varepsilon - u\|_p \le \|\psi_\varepsilon\,(R_\varepsilon u - u)\|_p + \|\psi_\varepsilon u - u\|_p \le \|R_\varepsilon u - u\|_p + \|\psi_\varepsilon u - u\|_p \to 0 \tag{4.6}$$

per quanto appena dimostrato e per il fatto che $\|\psi_\varepsilon u - u\|_p \to 0$ [(4)].

Abbiamo così dimostrato che $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sia ora $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Indicata con D una qualsiasi derivata prima, risulta (cfr. la (2.4))

$$Dw_\varepsilon(x) = D\psi_\varepsilon(x)\ R_\varepsilon u(x) + \psi_\varepsilon(x)\ DR_\varepsilon(x) = \varepsilon\ D\psi(\varepsilon\, x)\ R_\varepsilon u(x) + \psi_\varepsilon(x)\ R_\varepsilon Du(x)$$

e quindi

$$\|Dw_\varepsilon - Du\|_p \le C\,\varepsilon\,\|R_\varepsilon u\|_p + \|\psi_\varepsilon R_\varepsilon Du - Du\|_p \le C\,\varepsilon\,\|u\|_p + \|\psi_\varepsilon R_\varepsilon Du - Du\|_p$$

dove $C = \max|D\psi|$. Per la (4.6), si ha $\|\psi_\varepsilon R_\varepsilon Du - Du\|_p \to 0$ e quindi

$$\|Dw_\varepsilon - Du\|_p \to 0.$$

Questa relazione e la (4.6) mostrano che le funzioni a supporto compatto w_ε tendono a u nella norma di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, ossia l'asserita densità.

Osservazione. Se $\Omega \ne \mathbb{R}^n$ il risultato di densità appena ottenuto è in generale falso. Si noti la diversità col caso $k = 0$ nel quale si ha **sempre** la densità di $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ in $W^{0,p}(\Omega) \equiv L^p(\Omega)$, qualunque sia l'aperto Ω.

Un ultimo lemma che vogliamo dimostrare in questo paragrafo riguarda gli spazi L^p. Sia (X,μ) uno spazio di misura; è ben noto che, se $\mu(X) < \infty$, allora $L^r(X) \subset L^p(X)$

---

(4) Questo segue dall'osservare che, essendo $\psi_\varepsilon(x) = 1$ sulla palla $B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$, $\psi_\varepsilon u \to u$ quasi ovunque. Inoltre, essendo $|\psi_\varepsilon(x)\,u(x) - u(x)|^p = (1 - \psi_\varepsilon(x))^p |u(x)|^p \le |u(x)|^p$ (si ricordi che $0 \le \psi_\varepsilon(x) \le 1$) , si può applicare il teorema della convergenza dominata e concludere che $\|\psi_\varepsilon u - u\|_p \to 0$.

se $p < r$. Ciò segue immediatamente dalla ovvia disuguaglianza $|u|^p < 1 + |u|^r$, oppure dalla disuguaglianza di Hölder:

$$\|u\|_p{}^p = \int_X |u|^p d\mu \leq \left(\int_X |u|^r d\mu \right)^{\frac{p}{r}} [\mu(X)]^{1-\frac{p}{r}}$$

ossia

$$\|u\|_p \leq \|u\|_r \, [\mu(X)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \tag{4.7}$$

Nel caso di spazi di misura infinita, invece, tale inclusione non è più vera. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1 + |\log x|)^{-1}$$

appartiene a $L^2(\mathbb{R}^+)$, ma non appartiene a nessun $L^p(\mathbb{R}^+)$ per $p \neq 2$ (dimostrarlo!).

Sussiste, tuttavia, il seguente risultato di *interpolazione*.

XVI. *Sia $r < p < s$. Allora, posto*

$$p = \lambda s + (1-\lambda) r \qquad \lambda \in (0,1), \tag{4.8}$$

risulta

$$\|u\|_p{}^p \leq \|u\|_s{}^{\lambda s} \|u\|_r{}^{(1-\lambda) r} \tag{4.9}$$

e quindi $L^r(X) \cap L^s(X) \subset L^p(X)$. Si ha anche

$$\|u\|_p \leq \|u\|_s + \|u\|_r \; . \tag{4.10}$$

Poiché $\frac{1}{\lambda}$ e $\frac{1}{1-\lambda}$ sono esponenti coniugati, tenendo presente la (4.8), si ha

$$\int_X |u|^p d\mu = \int_X |u|^{\lambda s + (1-\lambda) r} d\mu \leq \left(\int_X |u|^s d\mu \right)^{\lambda} \left(\int_X |u|^r d\mu \right)^{1-\lambda}$$

ossia la (4.9).

A volta la (4.9) si trova scritta in maniera leggermente diversa. Intanto si può riscrivere come

$$\|u\|_p \leq \|u\|_s{}^{\frac{\lambda s}{p}} \, \|u\|_r{}^{\frac{(1-\lambda) r}{p}} .$$

Dato che, se poniamo $\alpha = \frac{\lambda s}{p}$, risulta $\frac{(1-\lambda) r}{p} = 1 - \alpha$ (cfr. la (4.8)), la (4.9) diventa

$$\|u\|_p \leq \|u\|_s{}^{\alpha} \, \|u\|_r{}^{1-\alpha} \tag{4.11}$$

dove $\alpha \in (0,1)$ è tale che

$$\frac{\alpha}{s} + \frac{1-\alpha}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{p} = \frac{1}{p}$$

ossia

$$\frac{\alpha}{s} + \frac{1-\alpha}{r} = \frac{1}{p} \; .$$

Per quanto riguarda la (4.10) basta osservare che la disuguaglianza di Young permette di scrivere [5]

$$\|u\|_s^{\alpha} \; \|u\|_r^{1-\alpha} \le \alpha \, \|u\|_s + (1-\alpha) \, \|u\|_r \le \|u\|_s + \|u\|_r$$

e quindi la (4.10) segue dalla (4.11)

Si noti che la (4.9) significa che la funzione $\varphi(p) = \log \|u\|_p^p$ è una funzione convessa, dato che tale formula non è altro che

$$\varphi(p) \le \lambda \, \varphi(r) + (1-\lambda) \, \varphi(s).$$

5. I teoremi di immersione in $\mathbb{R}^n$.

Le funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ sono, per definizione, delle particolari funzioni di $L^p(\Omega)$. Il fatto, però, che esistano le derivate deboli in $L^p(\Omega)$ ha diverse conseguenze interessanti. Vediamo, ad esempio, in dettaglio cosa accade in un intervallo limitato $I = (a, b)$ di $\mathbb{R}^1$.

Premettiamo un lemma, noto come *secondo lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni*

XVII. *Se $\gamma \in L^1(I)$ è tale che*

$$\int_a^b \gamma(x) \, \varphi'(x) \, dx = 0 \qquad\qquad \forall \; \varphi \in \mathring{C}^{\infty}(I) \tag{5.1}$$

allora γ è costante (nel senso che coincide q. o. con una funzione costante).

Osserviamo che una funzione Φ è la derivata φ' di una funzione $\varphi \in \mathring{C}^{\infty}(I)$ se e solo se

$$\Phi \in \mathring{C}^{\infty}(I), \qquad\qquad \int_a^b \Phi(t) \, dt = 0 \; . \tag{5.2}$$

---

[5] Di solito la disuguaglianza di Young si scrive:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \, ,$$

dove $a, b \ge 0$, p e q esponenti coinugati (ossia tali che $1/p + 1/q = 1$). Osservando che, se $0 < \alpha < 1$, gli esponenti $1/\alpha$ e $1/(1-\alpha)$ sono coniugati, possiamo scrivere $ab \le \alpha a^{1/\alpha} + (1-\alpha) b^{1/(1-\alpha)}$. Se nell'ultima formula abbiamo $a = x^{\alpha}$ e $b = y^{1-\alpha}$, otteniamo:

$$x^{\alpha} y^{1-\alpha} \le \alpha x + (1-\alpha) y.$$

Infatti, se $\Phi = \varphi'$ con $\varphi \in \mathring{C}^\infty(I)$, la (5.2) è ovvia. Se, invece, sussiste la (5.2) poniamo

$$\varphi(x) = \int_a^x \Phi(t)\, dt \ ;$$

risulta $\varphi \in C^\infty(I\!R)$, $\Phi = \varphi'$ e il supporto di φ è contenuto in (a, b), come si verifica facilmente.

Sia ϱ una funzione di $\mathring{C}^\infty(I)$ tale che

$$\int_a^b \varrho(x)\, dx = 1.$$

Dato che, se prendiamo una qualsiasi $\psi \in \mathring{C}^\infty(I)$ la funzione

$$\Phi(x) = \psi(x) - \varrho(x) \int_a^b \psi(t)\, dt$$

soddisfa la (5.2), la (5.1) si può riscrivere come

$$\int_a^b \gamma(x) \left[\psi(x) - \varrho(x) \int_a^b \psi(t)\, dt\right] dx = 0 \qquad\qquad \forall\ \psi \in \mathring{C}^\infty(I)$$

ossia

$$\int_a^b \psi(t) \left[\gamma(t) - \int_a^b \gamma(x)\, \varrho(x)\, dx\right] dt = 0 \qquad\qquad \forall\ \psi \in \mathring{C}^\infty(I).$$

Ma questo, per il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni VI, implica

$$\gamma(t) = \int_a^b \gamma(x)\, \varrho(x)\, dx \qquad\qquad \text{q.o. } t \in (a, b)$$

ossia la tesi.

XVIII. *Se $u \in W^{1,1}(I)$, allora u è una funzione assolutamente continua in I (nel senso solito, e cioè che u coincide q.o. con una funzione assolutamente continua). Viceversa, una funzione u assolutamente continua in I appartiene a $W^{1,1}(I)$. In simboli: $W^{1,1}(I) = AC(I)$.*

Dire che $u \in W^{1,1}(I)$ significa che $u \in L^1(I)$ ed esiste una funzione $\psi \in L^1(I)$ tale che

$$\int_a^b u\, \varphi'\, dx = - \int_a^b \psi\, \varphi\, dx \qquad\qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(I). \tag{5.3}$$

D'altra parte, per il teorema di Torricelli-Barrow, possiamo scrivere

$$\varphi(x) = -\int_x^b \varphi'(t)\,dt \qquad\qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(I)$$

e quindi

$$\int_a^b u\,\varphi'\,dx = \int_a^b \psi(x)\,dx \int_x^b \varphi'(t)\,dt = \int_a^b \varphi'(t)\,dt \int_a^t \psi(x)\,dx$$

ossia

$$\int_a^b \left[u(t) - \int_a^t \psi(x)\,dx\right] \varphi'(t)\,dt = 0 \qquad\qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(I).$$

Il secondo lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni XVII implica

$$u(t) = c + \int_a^t \psi(x)\,dx \qquad\qquad \text{q.o. } t \in (a,b) \tag{5.4}$$

ed è ben noto che questo equivale all'assoluta continuità della funzione u nell'intervallo (a,b).

Per il viceversa, si moltiplichi la 18 per una $\varphi'(t)$ e si integri su (a,b). Con passaggi analoghi a quelli appena svolti, si ottengono le (5.3).

Il teorema appena dimostrato mostra che una funzione u di $W^{1,p}(I)$ $(1 \le p < \infty)$ è in realtà una funzione continua (anzi, assolutamente continua), quindi più regolare di quanto richiesto a priori nella definizione. Si esprime questo fatto dicendo che lo spazio $W^{1,p}(I)$ è immerso nello spazio $AC(I)$ delle funzioni assolutamente continue in I (e, nel caso particolare $p = 1$, i due spazi coincidono !).

In dimensione superiore, purtroppo,le funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ non sono, in generale, continue. Tuttavia sussistono diversi teoremi di immersione, allo studio dei quali è dedicato questo paragrafo e i prossimi.

XIX. *Sia $p < n$ e sia p^* definito da $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ (ossia $p^* = \frac{np}{n-p}$). Esiste una costante C dipendente solo da n e p tale che*

$$\|u\|_{p^*} \le C\ \|\operatorname{grad} u\|_p \qquad\qquad \forall\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{5.5}$$

e quindi $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ con immersione continua.

Cominciamo col far vedere che la (5.5) sussiste per una qualsiasi $u \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sia $p = 1$. Per il teorema fondamentale del Calcolo, possiamo scrivere

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1 \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,dt \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

da cui

$$|u(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{x_i}|\,dx_i \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n)$$

e ancora

$$|u(x)|^n \le \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{x_i}|\, dx_i .$$

Osservando che in questo caso $p^* = \frac{n}{n-1}$, abbiamo

$$\|u\|_{p^*}^{p^*} = \int_{I\!R^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \le \int_{I\!R^n} \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u_{x_i}|\, dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx$$

da cui, applicando il lemma XIV,

$$\|u\|_{p^*}^{p^*} \le \prod_{i=1}^n \left(\int_{I\!R^{n-1}} d\widehat{x}_i \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{x_i}|\, dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} =$$

$$\prod_{i=1}^n \left(\int_{I\!R^n} |u_{x_i}|\, dx \right)^{\frac{1}{n-1}} \le \left(\int_{I\!R^n} |\operatorname{grad} u|\, dx \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

ossia la (5.5) per $p = 1$. Osserviamo che per dimostrare la formula appena ottenuta è sufficiente supporre $u \in \overset{\circ}{C}{}^1(I\!R^n)$.

Consideriamo ora un qualsiasi $1 < p < \infty$. Presa una funzione $u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(I\!R^n)$, consideriamo la funzione $v = |u|^{1+\alpha}$, dove α è un numero reale **positivo** che fisseremo tra poco. Essendo la funzione v di classe $\overset{\circ}{C}{}^1(I\!R^n)$ (perché ?), per quanto appena dimostrato, possiamo scrivere

$$\left(\int_{I\!R^n} |v|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \le \int_{I\!R^n} |\operatorname{grad} v|\, dx$$

ossia [6]

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^{\frac{n(1+\alpha)}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \le (1+\alpha) \int_{I\!R^n} |u|^\alpha |\operatorname{grad} u|\, dx$$

da cui, per la disuguaglianza di Hölder,

$$(5.6) \qquad \left(\int_{I\!R^n} |u|^{\frac{n(1+\alpha)}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \le (1+\alpha) \left(\int_{I\!R^n} |\operatorname{grad} u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{I\!R^n} |u|^{\alpha q} dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

(dove, come al solito, p e q sono esponenti coniugati). Scegliamo ora α in modo tale che $\frac{n(1+\alpha)}{n-1}$ sia uguale ad $\alpha\, q$. Ciò accade se e solo se

$$\frac{n(1+\alpha)}{n-1} = \frac{\alpha\, p}{p-1} \iff \alpha \left(\frac{p}{p-1} - \frac{n}{n-1} \right) = \frac{n}{n-1} \iff \alpha\, \frac{n-p}{(p-1)\,(n-1)} = \frac{n}{n-1}$$

---

[6] Si noti che $v_{x_i} = (1+\alpha)\, |u|^{\alpha-1} u\, u_{x_i}$.

ossia
$$\alpha = \frac{n(p-1)}{n-p}\ .$$
Poiché, con questa scelta di α, si ha
$$\frac{n(1+\alpha)}{n-1} = \frac{\alpha\, p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$$
la (5.6) si scrive come
$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \le (1+\alpha)\ \|\operatorname{grad} u\|_p \left(\int_{I\!R^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
ossia la (5.5), dato che
$$\frac{n-1}{n} - \frac{1}{q} = \frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*}\ .$$

La (5.5) resta così acquisita per ogni funzione $\overset{\circ}{C}{}^\infty(I\!R^n)$. Sia ora $u \in W^{1,p}(I\!R^n)$. Per il teorema XV, esiste una successione di funzioni $\{u_n\} \subset \overset{\circ}{C}{}^\infty(I\!R^n)$ tale che $\|u_n - u\|_{1,p} \to 0$. Passando eventualmente ad una sottosuccessione, possiamo supporre che u_n tende ad u q.o.. Per quanto appena dimostrato per le funzioni $\overset{\circ}{C}{}^\infty(I\!R^n)$, abbiamo
$$\|u_n\|_{p^*} \le C\ \|\operatorname{grad} u_n\|_p\ .$$
Per il lemma di Fatou
$$\|u\|_{p^*} \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{p^*}$$
e quindi la tesi, giacché $\|\operatorname{grad} u_n\|_p \to \|\operatorname{grad} u\|_p$.

Prima del prossimo risultato, osserviamo che si ha $p^* > p$. Infatti
$$p^* = \frac{np}{n-p} > p \iff np > np - p^2 \iff p^2 > 0$$
che è sempre vera.

XX. *Per ogni r tale che $p \le r \le p^*$ si ha $W^{1,p}(I\!R^n) \subset L^r(I\!R^n)$ con immersione continua:*
$$\|u\|_r \le C\ \|u\|_{1,p} \qquad\qquad \forall\ u \in W^{1,p}(I\!R^n).$$

È una conseguenza immediata della (4.10) e della (5.5):
$$\|u\|_r \le \|u\|_{p^*} + \|u\|_p \le C\ \|\operatorname{grad} u\|_p + \|u\|_p$$
da cui la tesi.

XXI. *Sia $p = n$. Risulta*

$$W^{1,n}(I\!R^n) \subset L^r(I\!R^n) \qquad \forall\, r \;:\; n \le r < +\infty$$

con immersione continua.

Scriviamo la (5.6) con $p = n$ (e quindi $q = \frac{n}{n-1}$), $\alpha = n - 1$:

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^{\frac{n^2}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \le n\, \|\operatorname{grad} u\|_n \left(\int_{I\!R^n} \left(|u|^{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} = n\, \|\operatorname{grad} u\|_n \|u\|_n^{\,n-1}.$$

In altri termini

$$\|u\|_{\frac{n^2}{n-1}} \le \sqrt[n]{n}\, \|\operatorname{grad} u\|_n^{\frac{1}{n}}\, \|u\|_n^{\frac{n-1}{n}}$$

che, ricordando la disuguaglianza di Young, porta a

$$\|u\|_{\frac{n^2}{n-1}} \le \sqrt[n]{n}\, \left(\|u\|_n + \|\operatorname{grad} u\|_n\right) = \sqrt[n]{n}\, \|u\|_{1,n}\ .$$

Applicando il teorema di interpolazione XVI, otteniamo

$$\|u\|_r \le C\, \|u\|_{1,n} \qquad \forall\, u \in W^{1,n}(I\!R^n)$$

per ogni r tale che $n \le r \le \frac{n^2}{n-1}$.

Riscriviamo allora la (5.6) con $\alpha = n$; procedendo allo stesso modo otteniamo che $u \in L^r(I\!R^n)$ per ogni r tale che $\frac{n^2}{n-1} \le r \le \frac{n(n+1)}{n-1}$. Iterando il procedimento si ottiene che $u \in L^r(I\!R^n)$ per ogni $r \ge n$ con immersione continua, ossia **per ogni** $r \ge n$ esiste una costante C tale che

$$\|u\|_r \le C\, \|u\|_{1,n} \qquad \forall\, u \in W^{1,n}(I\!R^n).$$

Si badi che la costante C, oltre che dipendere dalla dimensione n dello spazio, dipende anche da r. Infatti, se così non fosse, si avrebbe che $u \in L^\infty(I\!R^n)$. Ma questo è assurdo (cfr. l'esempio 4), § 10).

XXII. *Sia $p > n$. Risulta $W^{1,p}(I\!R^n) \subset C^\alpha(I\!R^n) \cap L^\infty(I\!R^n)$. Esiste una costante C dipendente solo da p ed n tale che*

$$|u(x) - u(y)| \le C\, \|\operatorname{grad} u\|_p\, |x - y|^\alpha \qquad \text{q.o. } x, y \in I\!R^n \tag{5.7}$$

dove $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$. Inoltre esiste una costante C tale che

$$\|u\|_\infty \le C\, \|u\|_{1,p} \tag{5.8}$$

ossia l'immersione di $W^{1,p}(I\!R^n)$ in $C^\alpha(I\!R^n) \cap L^\infty(I\!R^n)$ è continua, dove lo spazio $C^\alpha \cap L^\infty$ è munito della norma

$$|||u||| = \|u\|_{L^\infty(I\!R^n)} + \sup_{\substack{x,y \in I\!R^n \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \ .$$

In altri termini, se $u \in W^{1,p}(I\!R^n)$, allora u coincide q.o. con una funzione Hölderiana limitata e la costante di Hölder della u è del tipo $C \, \| \operatorname{grad} u\|_p$.

Sia $u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(I\!R^n)$. Fissiamo $x, y \in I\!R^n$ e sia $\delta = |x-y|$. Indichiamo con S l'intersezione $B_\delta(x) \cap B_\delta(y)$.

Risulta

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)| \qquad \forall \ z \in S$$

da cui

$$|u(x) - u(y)| \ |S| \leq \int_S |u(x) - u(z)| \, dz + \int_S |u(z) - u(y)| \, dz. \tag{5.9}$$

Consideriamo il primo integrale a secondo membro (analogamente si maggiorerà l'altro). Per ogni fissato $z \in S$ possiamo scrivere

$$u(z) - u(x) = F(1) - F(0)$$

dove $F(t) = u[tz + (1-t)x]$, e quindi

$$u(z) - u(x) = \int_0^1 F'(t) \, dt = \int_0^1 u_{x_h}(tz + (1-t)x) \, (z_h - x_h) \, dt$$

da cui

$$|u(x) - u(z)| \leq |z - x| \int_0^1 |\operatorname{grad} u(tz + (1-t)x)| \, dt \leq \delta \int_0^1 |\operatorname{grad} u(x + t(z-x))| \, dt \ .$$

Integrando su S e applicando il teorema di Tonelli, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_S |u(x) - u(z)| \, dz \leq \delta \int_S dz \int_0^1 |\operatorname{grad} u(x + t(z-x))| \, dt = \\ \delta \int_0^1 dt \int_S |\operatorname{grad} u(x + t(z-x))| \, dz \end{aligned} \tag{5.10}$$

D'altra parte

$$\int_S |\operatorname{grad} u(x+t(z-x))| \, dz \leq \int_{B_\delta(x)} |\operatorname{grad} u(x+t(z-x))| \, dz = t^{-n} \int_{B_{t\delta}(x)} |\operatorname{grad} u(w)| \, dw$$

(nell'ultimo passaggio si è operata la sostituzione $w = x + t(z - x)$, mediante la quale z descrive la palla $B_\delta(x)$ se e solo se w descrive la palla $B_{t\delta}(x)$). Applicando la disuguaglianza di Hölder ed indicando con Ω_n la misura della palla unitaria in $I\!R^n$ si trova

$$\int_S |\operatorname{grad} u(x + t(z - x))|\, dz \le t^{-n} \left(\int_{B_{t\delta}(x)} |\operatorname{grad} u(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}} |B_{t\delta}(x)|^{\frac{1}{q}} \le$$

$$t^{-n} \|\operatorname{grad} u\|_p \, [t^n \delta^n \Omega_n]^{\frac{1}{q}}$$

e quindi, ricordando la (5.10),

$$\int_S |u(x) - u(z)|\, dz \le \Omega_n^{\frac{1}{q}} \ \|\operatorname{grad} u\|_p \ \delta^{1+\frac{n}{q}} \int_0^1 t^{\frac{n}{q}-n} dt \ .$$

Essendo poi

$$\int_0^1 t^{\frac{n}{q}-n} dt = \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} dt = \left[\frac{t^{1-\frac{n}{p}}}{1 - \frac{n}{p}} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{p}{p-n}$$

(si noti che $1 - \frac{n}{p} > 0$!), si perviene alla maggiorazione seguente

$$\int_S |u(x) - u(z)|\, dz \le \frac{p}{p-n} \ \Omega_n^{\frac{1}{q}} \ \|\operatorname{grad} u\|_p \ \delta^{1+\frac{n}{q}}$$

da cui, per la (5.9),

$$|u(x) - u(y)| \ |S| \le \frac{2p}{p-n} \ \Omega_n^{\frac{1}{q}} \ \|\operatorname{grad} u\|_p \ \delta^{1+\frac{n}{q}}.$$

Ma $|S| = K_n \delta^n$ e quindi

$$|u(x) - u(y)| \le C \ \|\operatorname{grad} u\|_p \ \delta^{1+\frac{n}{q}-n}$$

ossia la (5.7).

Sia ora x un qualsiasi punto fissato di $I\!R^n$. Per ogni $y \in I\!R^n$ possiamo scrivere

$$|u(x)| \le |u(x) - u(y)| + |u(y)|$$

e quindi

$$|u(x)| \le C \ \|\operatorname{grad} u\|_p |x - y|^\alpha + |u(y)|$$

da cui, integrando su $B_1(x)$ e applicando la disuguaglianza di Cauchy-Hölder,

$$|B_1| \ |u(x)| \le C \ \|\operatorname{grad} u\|_p \int_{B_1(x)} |x - y|^\alpha dy + \int_{B_1(x)} |u(y)| \ dy \le$$

$$C \ \|\operatorname{grad} u\|_p \ |B_1| + \left(\int_{B_1(x)} |u(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} |B_1|^{1-\frac{1}{p}} \le C \ \|\operatorname{grad} u\|_p \ |B_1| + \|u\|_p \ |B_1|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Si ha, dunque,

$$|u(x)| \le C \ \|\operatorname{grad} u\|_p + \|u\|_p \ |B_1|^{-\frac{1}{p}}$$

da cui la (5.8).

Come nel teorema XIX, si ottiene la tesi per una qualsiasi $u \in W^{1,p}(I\!R^n)$ considerando una successione $\{u_n\} \subset \overset{\circ}{C}{}^\infty(I\!R^n)$ che tenda ad u in norma $W^{1,p}$ e q.o. .

6. Gli spazi $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. La disuguaglianza di Poincaré.

Sia Ω un aperto qualsiasi di $I\!R^n$. Si definisce lo spazio di Sobolev $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ come la chiusura, in norma $\|\cdot\|_{1,p}$ dello spazio $\mathring{C}^\infty(\Omega)$, ossia

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathring{C}^\infty(\Omega)}^{\;\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Vedremo in seguito che le funzioni di $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ sono funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ che in qualche senso si annullano sulla frontiera.

Osserviamo che il teorema XV dice che

$$\mathring{W}^{1,p}(I\!R^n) = W^{1,p}(I\!R^n).$$

I teoremi di immersione di Sobolev dimostrati in $I\!R^n$ si estendono senza difficoltà agli spazi $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Si ha, infatti, il seguente teorema.

XXIII. *Sia $p < n$; lo spazio $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ è immerso con continuità nello spazio $L^{p^*}(\Omega)$, dove $p^* = \frac{np}{n-p}$:*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\ \|\operatorname{grad} u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall\ u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega). \tag{6.1}$$

Se $p = n$ lo spazio $\mathring{W}^{1,n}(\Omega)$ è immerso con continuità nello spazio $L^s(\Omega)$, per ogni $s \geq n$:

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq C\ \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall\ u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega).$$

Se, infine, $p > n$ allora $\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \subset C^\alpha(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e si ha

$$|u(x) - u(y)| \leq C\ \|\operatorname{grad} u\|_{L^p(\Omega)}|x-y|^\alpha \quad (\alpha = 1 - \frac{n}{p}) \qquad \forall\ u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega);$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\ \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall\ u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega).$$

Dimostriamo il primo punto. Essendo una qualsiasi funzione $u \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$ la restrizione di una funzione $u \in \mathring{C}^\infty(I\!R^n)$ (basta prolungarla a zero fuori di Ω), per quanto dimostrato nel teorema XIX, si ha la disuguaglianza (6.1) per ogni funzione $u \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$. Essendo, per definizione, $\mathring{C}^\infty(\Omega)$ denso in $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, la tesi si ottiene con il solito ragionamento di densità. In maniera analoga si ottengono gli altri casi.

Se Ω è, in particolare, limitato, si ha la seguente importante disuguaglianza, nota come *disuguaglianza di Poincaré.*

XXIV. *Sia Ω un aperto limitato di $I\!R^n$. Esiste una costante C (dipendente solo da p e da n) tale che*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\ |\Omega|^{\frac{1}{n}}\ \|\operatorname{grad} u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall\ u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega). \tag{6.2}$$

Supponiamo dapprima $1 \leq p < n$. Essendo $p < p^*$, per la (4.7) possiamo scrivere (si tenga presente che $\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{n}$)

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{n}} \; \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}. \tag{6.3}$$

Per la (6.1) si ha

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{n}} \; \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \; |\Omega|^{\frac{1}{n}} \; \|\operatorname{grad} u\|_{L^p(\Omega)}$$

e quindi la disuguaglianza di Poincaré è dimostrata nel caso $p < n$.

Sia ora $p \geq n$. Esiste $1 \leq r < n$ tale che $r^* = p$. Infatti tale uguaglianza è vera se e solo se $\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = \frac{1}{n}$, ossia $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$. Se prendiamo, quindi,

$$r = \frac{np}{n+p}$$

abbiamo un numero $1 \leq r < n$ tale che $r^* = p$ (che $1 \leq r$ segue dal fatto che $n + p \leq 2p \leq np$). Si noti anche che risulta $r < p$. Allora

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^{r^*}(\Omega)} \leq C \; \|\operatorname{grad} u\|_{L^r(\Omega)} \leq C \; |\Omega|^{\frac{1}{n}} \; \|\operatorname{grad} u\|_{L^p(\Omega)}$$

(si ricordi la (6.3) !).

Si noti che la (6.2) dimostra che gli spazi $W^{1,p}(\Omega)$ e $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, in generale, **non** coincidono. Infatti la funzione $u \equiv 1$ appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ per qualunque p; se appartenesse anche a $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ dovrebbe valere la disuguaglianza di Poincaré (6.2), la quale, in questo caso, è palesemente assurda.

7. L'operatore di prolungamento. I teoremi di immersione in Ω.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Un *operatore di prolungamento* è un operatore lineare e continuo che prolunga le funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ a funzioni di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, ossia un operatore lineare $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} Pu\big|_{\Omega} = u & \forall \; u \in W^{1,p}(\Omega) \\ \\ \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \; \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} & \forall \; u \in W^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{7.1}$$

dove C è una costante che dipende da Ω ma non da u.

Otterremo l'esistenza di un tale operatore per una classe di domini "abbastanza regolare". Il prossimo teorema fornisce un primo risultato di prolungamento, detto *prolungamento per riflessione*.

Premettiamo alcune notazioni. Poniamo $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, donde scriveremo $x = (x', x_n)$. Indichiamo con Q il "cilindro" $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x'| < 1, |x_n| < 1\}$ e con Q_+ la "sua metà superiore": $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x'| < 1, 0 < x_n < 1\}$. Sia infine $Q_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x'| < 1, x_n = 0\}$.

XXV. *Sia $u \in W^{1,p}(Q_+)$. Posto*

$$u^*(x', x_n) \begin{cases} = u(x', x_n) & \text{se } 0 < x_n < 1 \\ \\ = u(x', -x_n) & \text{se } -1 < x_n < 0 \end{cases}$$

risulta $u^* \in W^{1,p}(Q)$. Inoltre

$$\|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} = \sqrt[p]{2}\ \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)} \qquad \forall\ u \in W^{1,p}(Q_+). \tag{7.2}$$

È ovvio che

$$\int_Q |u^*|^p dx = 2 \int_{Q_+} |u|^p dx \tag{7.3}$$

e quindi $u^* \in L^p(Q)$. Dobbiamo ora far vedere che esistono le derivate deboli, ossia che esistono delle funzioni $\alpha_i \in L^p(Q)$ tali che

$$\int_Q u^* \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx = - \int_Q \alpha_i\ \varphi\ dx \qquad \forall\ \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(Q),\ (i = 1, \ldots, n). \tag{7.4}$$

Cominciamo a dimostrare l'esistenza delle α_i per $1 \le i \le n-1$. Si ha

$$\int_Q u^* \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx = \int_{-1}^1 dx_n \int_{|x'|<1} u^*(x', x_n)\ \varphi_{x_i}(x', x_n)\ dx' =$$
$$\int_0^1 dx_n \int_{|x'|<1} u(x', x_n)\ \varphi_{x_i}(x', x_n)\ dx' + \int_{-1}^0 dx_n \int_{|x'|<1} u(x', -x_n)\ \varphi_{x_i}(x', x_n)\ dx'.$$

Se nell'ultimo integrale operiamo la sostituzione $t = -x_n$ e poi torniamo a chiamare la variabile di integrazione x_n otteniamo

$$\int_Q u^* \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx =$$
$$\int_0^1 dx_n \int_{|x'|<1} u(x', x_n)\ \varphi_{x_i}(x', x_n)\ dx' + \int_0^1 dx_n \int_{|x'|<1} u(x', x_n)\ \varphi_{x_i}(x', -x_n)\ dx' =$$
$$\int_{Q_+} u\ \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\ dx$$

dove

$$\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n).$$

Dimostriamo ora che

$$\int_{Q_+} u\ \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\ dx = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \psi\ dx\ . \tag{7.5}$$

Se la ψ avesse il supporto compatto contenuto in Q_+ la (7.5) sarebbe ovvia per definizione di derivata debole; tuttavia la φ è una qualsiasi funzione di $\overset{\circ}{C}{}^\infty(Q)$ e quindi, in generale, il supporto di ψ non è contenuto in Q_+; possiamo solo dire che

$$\operatorname{spt}\psi \cap (\partial Q_+ - Q_0) = \emptyset. \tag{7.6}$$

Sia $\eta(t)$ una funzione di una variabile reale tale che $\eta \in C^\infty(I\!R)$; $0 \le \eta \le 1$; $\eta(t) = 0$, $\forall\, t \le \frac{1}{2}$; $\eta(t) = 1$, $\forall\, t \ge 1$. Poniamo $\eta_k(t) = \eta(kt)$, cosicché la funzione η_k è tale che $\eta_k \in C^\infty(I\!R)$; $0 \le \eta_k \le 1$; $\eta_k(t) = 0$, $\forall\, t \le \frac{1}{2k}$; $\eta_k(t) = 1$, $\forall\, t \ge \frac{1}{k}$.

In base alla (7.6) le funzioni di classe C^∞

$$\eta_k(x_n)\ \psi(x', x_n)$$

hanno il supporto contenuto in Q_+, ossia appartengono a $\overset{\circ}{C}{}^\infty(Q)$. Possiamo quindi scrivere

$$\int_{Q_+} u\ \frac{\partial(\eta_k\,\psi)}{\partial x_i}\ dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \eta_k\ \psi\ dx$$

ossia, tenendo presente che η_k dipende solo da x_n e $1 \le i \le n-1$,

$$\int_{Q_+} u\ \eta_k\ \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\ dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \eta_k\ \psi\ dx\ . \tag{7.7}$$

Essendo $0 \le \eta_k \le 1$ ed avendosi $\eta_k(t) \to 1$ per ogni $t > 0$, il teorema della convergenza dominata di Lebesgue permette di passare al limite per $k \to \infty$ nella (7.7), ottenendo così la (7.5).

D'altra parte possiamo scrivere

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \psi\ dx =$$

$$\int_0^1 dx_n \int_{|x'|<1} u_{x_i}(x', x_n)\ \varphi(x', x_n)\ dx' + \int_0^1 dx_n \int_{|x'|<1} u_{x_i}(x', x_n)\ \varphi(x', -x_n)\ dx' =$$

$$\int_Q \alpha_i\ \varphi\ dx$$

dove

$$\alpha_i(x', x_n) \begin{cases} = u_{x_i}(x', x_n) & \text{se } 0 < x_n < 1 \\ = u_{x_i}(x', -x_n) & \text{se } -1 < x_n < 0. \end{cases}$$

Si noti che α_i è proprio il prolungamento per riflessione della u_{x_i} e quindi appartiene a $L^p(Q)$. È così dimostrata l'esistenza delle derivate deboli α_i, ossia l'esistenza delle funzioni $\alpha_i \in L^p(Q)$ per le quali sussistono le (7.4) per $1 \le i \le n-1$. Inoltre si ha

$$\int_Q |\alpha_i|^p dx = 2\int_{Q_+} |u_{x_i}|^p dx \qquad\qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{7.8}$$

Sia ora $i = n$; ragionando come prima possiamo scrivere

$$\int_Q u^* \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \, dx =$$

$$\int_0^1 dx_n \int_{|x'|<1} u(x', x_n) \, \varphi_{x_n}(x', x_n) \, dx' + \int_0^1 dx_n \int_{|x'|<1} u(x', x_n) \, \varphi_{x_n}(x', -x_n) \, dx' =$$

$$\int_{Q_+} u \, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \, dx$$

dove, questa volta,

$$\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n).$$

Per dimostrare che

$$\int_{Q_+} u \, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \, dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \, \psi \, dx \, . \tag{7.9}$$

si procede come prima. Si considera, cioè, la funzione $\eta_k(x_n) \; \psi(x', x_n)$ e si scrive

$$\int_{Q_+} u \, \frac{\partial(\eta_k \, \psi)}{\partial x_n} \, dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \, \eta_k \, \psi \, dx.$$

Tuttavia ora, essendo la derivata parziale rispetto proprio a x_n, si ha un termine in più:

$$\int_{Q_+} u \; k \; \eta'(kx_n) \; \psi \; dx + \int_{Q_+} u \; \eta_k \, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \, dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \, \eta_k \; \psi \; dx \, . \tag{7.10}$$

Facciamo vedere che questo termine in più tende a zero. A tal fine osserviamo che $\psi(x', 0) = 0$ e quindi esiste una costante C tale che $|\psi(x', x_n)| \le C \, |x_n|$. Allora, indicato con $M = \max |\eta'|$ e osservato che $\operatorname{spt} \eta'_k \subset \left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}\right]$,

$$\left| k \int_{Q_+} u \; \eta'(kx_n) \; \psi \; dx \right| = \left| k \int_{Q_+ \cap \{0 < x_n < \frac{1}{k}\}} u \; \eta'(kx_n) \; \psi \; dx \right| \le$$

$$M \, C \, k \int_{Q_+ \cap \{0 < x_n < \frac{1}{k}\}} |u| \; x_n \; dx \le M \, C \int_{Q_+ \cap \{0 < x_n < \frac{1}{k}\}} |u| \; dx \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue. Passando al limite nella (7.10) si ottiene quindi la (7.9). Si ha infine

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \, \psi \, dx =$$

$$\int_0^1 dx_n \int_{|x'|<1} u_{x_n}(x', x_n) \; \varphi(x', x_n) \; dx' - \int_0^1 dx_n \int_{|x'|<1} u_{x_n}(x', x_n) \; \varphi(x', -x_n) \; dx' =$$

$$\int_Q \alpha_n \; \varphi \; dx$$

dove

$$\alpha_n(x', x_n) \begin{cases} = u_{x_n}(x', x_n) & \text{se } 0 < x_n < 1 \\ = -u_{x_n}(x', -x_n) & \text{se } -1 < x_n < 0 \ . \end{cases}$$

Si noti, quindi, che α_n non è il prolungamento per riflessione della u_{x_n}; tuttavia si ha che la (7.8) sussiste anche per $i = n$. La (7.4) rimane quindi dimostrata per ogni n e la (7.2) segue dalle (7.3) e (7.8).

Il prossimo lemma dimostra che la classe $W^{1,p}(\Omega)$ si conserva per diffeomorfismi di classe 1.

XXVI. *Siano Ω e Ω' due aperti di $I\!R^n$. Sia $x = g(y)$ un diffeomorfismo di classe 1 tra Ω e Ω', ossia un omeomorfismo $g : \Omega' \to \Omega$ tale che $g \in C^1(\Omega')$, $g^{-1} \in C^1(\Omega)$. Supporremo, inoltre, che*

$$\frac{\partial g}{\partial y} \in L^\infty(\Omega'); \qquad \frac{\partial g^{-1}}{\partial x} \in L^\infty(\Omega) \tag{7.11}$$

(intendendo con questo che tutti gli elementi delle matrici Jacobiane indicate sono limitate). Allora, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ risulta $u \circ g \in W^{1,p}(\Omega')$. Inoltre esistono due costanti positive C_1, C_2 tali che

$$C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \|u \circ g\|_{W^{1,p}(\Omega')} \le C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{7.12}$$

Sia $\mathcal{U}(y) = u[g(y)]$; essendo

$$\int_{\Omega'} |\mathcal{U}(y)|^p dy = \int_\Omega |u(x)|^p \left| \det \frac{\partial g^{-1}}{\partial x} \right| \, dx$$

dalla (7.11) segue

$$\int_{\Omega'} |\mathcal{U}(y)|^p dy \le C \int_\Omega |u(x)|^p dx \tag{7.13}$$

e quindi $\mathcal{U} \in L^p(\Omega')$. Per dimostrare che $\mathcal{U} \in W^{1,p}(\Omega')$ faremo vedere che la $\mathcal{U}$ è dotata di derivate forti in $L^p(\Omega')$. A tal fine consideriamo un aperto $A' \subset\subset \Omega'$ e poniamo $A = g(A')$. Essendo g un omeomorfismo risulta $A \subset\subset \Omega$.

Consideriamo allora una successione di funzioni $\{u_m\} \in C^\infty(I\!R^n)$ tale che

$$\|u_m - u\|_{W^{1,p}(A)} \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Questo implica (cfr. la (7.13))

$$\|\mathcal{U}_m - \mathcal{U}\|_{L^p(A')} \to 0 \qquad (m \to \infty)$$

dove si è posto $\mathcal{U}_m(y) = u_m[g(y)]$. Inoltre, essendo le $\mathcal{U}_m$ di classe C^1, si ha

$$\frac{\partial \mathcal{U}_m(y)}{\partial y_h} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_m}{\partial x_j} [g(y)] \ \frac{\partial g_j(y)}{\partial y_h}.$$

Tenendo presente la (7.11) e ragionando come per la (7.13) si trova subito che

$$\frac{\partial \mathcal{U}_m(y)}{\partial y_h} \;\to\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,[g(y)]\;\; \frac{\partial g_j(y)}{\partial y_h}$$

in $L^p(A')$. Per l'arbitrarietà di A', le funzioni di $L^p(A')$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,[g(y)]\;\; \frac{\partial g_j(y)}{\partial y_h}$$

sono le derivate forti $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y_h}$ e quindi $\mathcal{U} \in W^{1,p}(\Omega')$. Inoltre

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y_h} \right\|_{L^p(A')} \leq C\; \|\operatorname{grad} u\|_{L^p(A)}$$

che, insieme alla (7.13), prova la seconda disuguaglianza della (7.12). Scambiando il ruolo di Ω e Ω' si ha immediatamente anche la prima disuguaglianza.

In seguito ci sarà utile il seguente lemma, nel quale non richiediamo che il supporto di α sia necessariamente contenuto in Ω.

XXVII. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\alpha \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. La funzione αu appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$, per le derivate deboli vale l'usuale regola di derivazione del prodotto*

$$\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_h} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_h}\, u + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_h}\,, \tag{7.14}$$

ed esiste una costante C tale che

$$\|\alpha u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall\; u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{7.15}$$

E' ovvio che αu appartiene a $L^p(\Omega)$ e si ha

$$\int_\Omega |\alpha u|^p\, dx < C \int_\Omega |u|^p\, dx\,.$$

Inoltre, presa una qualsiasi funzione $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$, risulta

$$\int_\Omega \alpha\, u\; \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\; dx = \int_\Omega u\; \left[\frac{\partial(\alpha\, \varphi)}{\partial x_h} - \varphi\; \frac{\partial \alpha}{\partial x_h} \right]\; dx\;.$$

Essendo la funzione $\alpha\,\varphi$ in $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$, abbiamo, per definizione di derivata debole,

$$\int_\Omega u\; \frac{\partial(\alpha\, \varphi)}{\partial x_h} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_h}\, \alpha\, \varphi\, dx\,,$$

e quindi

$$\int_\Omega \alpha\, u\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\, dx = -\int_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x_h}\,\alpha + u\,\frac{\partial \alpha}{\partial x_h}\right]\varphi\, dx\,.$$

La formula (7.14) è dimostrata e da questa segue facilmente la disuguaglianza tra le norme (7.15).

Se f è una funzione definita in un insieme Ω, con il simbolo $\widetilde{f}$ indichiamo il suo prolungamento a zero, ossia la funzione

$$\widetilde{f}(x)\begin{cases} = f(x) & x \in \Omega \\ = 0 & x \in I\!R^n - \Omega. \end{cases}$$

Osserviamo che se $u \in L^p(\Omega)$ allora il suo prolungamento $\widetilde{u}$ appartiene a $L^p(I\!R^n)$ e quindi questo fornisce un semplicissimo operatore di prolungamento da $L^p(\Omega)$ a $L^p(I\!R^n)$. Tuttavia, questa idea non funziona in generale per gli spazi di Sobolev. Consideriamo, ad esempio, $n = 1$, $\Omega = (0,1)$ e $u = 1$ su Ω. Questa u appartiene ovviamente a $W^{1,1}(\Omega)$, ma il suo prolungamento $\widetilde{u}$ non appartiene a $W^{1,1}(I\!R)$. Se cosi̇̀ fosse, infatti, in base al teorema XVIII dovremmo avere che $\widetilde{u}$ è assolutamente continua su un qualsiasi intervallo limitato, mentre $\widetilde{u}$ non è nemmeno continua.

I prossimi due lemmi forniscono semplici esempi di prolungamento.

XXVIII. *Sia Ω un aperto di $I\!R^n$ e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Se il $\operatorname{spt} u \subset \Omega$, allora $\widetilde{u} \in W^{1,p}(I\!R^n)$ e si ha*

$$\|\widetilde{u}\|_{W^{1,p}(I\!R^n)} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,.$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

XXIX. *Sia Ω un aperto di $I\!R^n$ e siano $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\alpha \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$. La funzione $\widetilde{\alpha\, u}$ appartiene a $W^{1,p}(I\!R^n)$ ed esiste una costante C tale che*

$$\|\widetilde{\alpha\, u}\|_{W^{1,p}(I\!R^n)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{7.16}$$

È ovvio che $\widetilde{\alpha\, u} \in L^p(I\!R^n)$, dato che

$$\int_{I\!R^n} |\widetilde{\alpha\, u}|^p dx = \int_\Omega |\alpha\, u|^p dx < \infty\,. \tag{7.17}$$

Sia ora φ una qualsiasi funzione di $\mathring{C}^\infty(I\!R^n)$; risulta

$$\int_{I\!R^n} \widetilde{\alpha\, u}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\, dx = \int_\Omega \alpha\, u\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\, dx\,.$$

Essendo $\alpha\,\varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$, ragionando in modo analogo a quanto fatto nel lemma XXVII si ha

$$\int_\Omega \alpha\, u\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\, dx = -\int_\Omega \varphi\, \left[\alpha\, \frac{\partial u}{\partial x_h} + u\, \frac{\partial \alpha}{\partial x_h}\right] dx\,.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\alpha u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, w_h \, dx \,,$$

avendo indicato con w_h il prolungamento a zero della funzione

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x_h} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x_h}. \tag{7.18}$$

Ciò dimostra che $\widetilde{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Per ottenere la disuguaglianza (7.16) basta osservare che, grazie alla (7.17), si ha

$$\|\widetilde{\alpha u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \, \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

e, ricordando la (7.18),

$$\left\| \frac{\partial (\widetilde{\alpha u})}{\partial x_h} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\| \alpha \frac{\partial u}{\partial x_h} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x_h} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \,.$$

Diremo che un aperto Ω *è di classe* C^1 se accade che per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di x ed un diffeomorfismo g di classe C^1 tale che

$$g(Q) = U \,, \qquad g(Q_+) = \Omega \cap U \,, \qquad g(Q_0) = \partial\Omega \cap U \,.$$

XXX. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, di classe C^1. Esiste allora un operatore di prolungamento $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Dobbiamo costruire un operatore lineare tale che valga la (7.1). Essendo la $\partial\Omega$ limitata, sarà anche compatta (una frontiera è sempre un insieme chiuso !). Allora possiamo trovare un numero finito di aperti U_j che ricoprono la frontiera di Ω:

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_j$$

ciascuno dei quali risulta diffeomorfo a Q mediante un diffeomorfismo g_j tale che

$$g_j(Q) = U_j \,, \qquad g_j(Q_+) = \Omega \cap U_j \,, \qquad g_j(Q_0) = \partial\Omega \cap U_j \,.$$

Restringendo eventualmente gli intorni, possiamo supporre anche che

$$g_j \in C^1(\overline{Q}) \,, \qquad g_j^{-1} \in C^1(\overline{U}_j) \,.$$

L'insieme $\Omega - \bigcup_{j=1}^m U_j$ è un chiuso contenuto in Ω e privo di punti in comune con $\partial\Omega$; esiste allora un aperto $U_0 \subset\subset \Omega$ tale che

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{j=0}^m U_j .$$

Sia $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ una partizione dell'unità su $\overline{\Omega}$ subordinata al ricoprimento $U_0, U_1, \dots, U_m$. Presa una $u \in W^{1,p}(\Omega)$, possiamo scrivere in Ω

$$u = \sum_{j=0}^m \vartheta_j u = \sum_{j=0}^m u_j$$

avendo posto $u_j = \vartheta_j u$. Notiamo che le u_j appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$ (cfr. lemma XXVII). Per ottenere un prolungamento di u basterà quindi prolungare separatamente le singole u_j.

In base al teorema XXIX, la u_0 si prolunga immediatamente considerando $\widetilde{u}_0$ come suo prolungamento. Inoltre, ricordando la (7.16), si ha

$$\|\widetilde{u}_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \, \|u\|_{W^{1,p}(U_0)} \leq C_0 \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \ . \tag{7.19}$$

Più delicato è il prolungamento delle altre u_j, le quali non hanno in generale il supporto contenuto in Ω (e quindi, in generale, $\widetilde{u}_j \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$).

Fissiamo un $1 \leq j \leq m$; la funzione $u_j[g_j(y)]$ (N.B. qui non si somma rispetto all'indice j), in base al teorema XXVI, appartiene a $W^{1,p}(Q_+)$. Il suo prolungamento per riflessione $(u_j \circ g_j)^*(y)$ appartiene a $W^{1,p}(Q)$. "Tornando indietro", la funzione $(u_j \circ g_j)^*(g_j^{-1}(x))$ appartiene a $W^{1,p}(U_j)$.

Si noti che, essendo $\operatorname{spt} u_j \cap (\partial U_j \cap \Omega) = \emptyset$, si ha che $\operatorname{spt}(u_j \circ g_j) \cap (\partial Q_+ - Q_0) = \emptyset$. Il prolungamento per riflessione di $u_j \circ g_j$ avrà allora il supporto contenuto in Q e quindi la funzione $(u_j \circ g_j)^* \circ g_j^{-1}$ ha il supporto contenuto in U_j. Ciò permette di concludere che l'ulteriore prolungamento a 0 fuori di U_j di quest'ultima funzione, diciamo $[(u_j \circ g_j)^* \circ g_j^{-1}]^\sim$, appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (si ricordi il lemma XXVIII). Si noti che $[(u_j \circ g_j)^* \circ g_j^{-1}]^\sim(x) = u_j(x)$ per $x \in \Omega$; tale uguaglianza è ovvia per costruzione se $x \in U_j \cap \Omega$, mentre in $\Omega - U_j$ è vera perché entrambi i membri sono nulli.

La funzione

$$Pu(x) = \widetilde{u}_0(x) + \sum_{j=1}^m [(u_j \circ g_j)^* \circ g_j^{-1}]^\sim(x)$$

appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ed è tale che

$$Pu(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^m u_j(x) = u(x) \qquad\qquad x \in \Omega.$$

Inoltre, ricordando (7.2), (7.12) e (7.16), abbiamo

$$\| [(u_j \circ g_j)^* \circ g_j^{-1}]^{\sim} \|_{W^{1,p}(I\!R^n)} = \|(u_j \circ g_j)^* \circ g_j^{-1}\|_{W^{1,p}(U_j)} \le C_j \, \|(u_j \circ g_j)^*\|_{W^{1,p}(Q)} =$$
$$\sqrt[p]{2}\, C_j \, \|(u_j \circ g_j)\|_{W^{1,p}(Q_+)} \le K_j \, \|u_j\|_{W^{1,p}(U_j \cap \Omega)} \le K'_j \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

da cui, per la (7.19), si trae

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(I\!R^n)} \le \|\widetilde{u}_0\|_{W^{1,p}(I\!R^n)} + \sum_{j=1}^{m} \|[(u_j \circ g_j)^* \circ g_j^{-1}]^{\sim}\|_{W^{1,p}(I\!R^n)} \le C \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \ .$$

L'operatore P così costruito soddisfa quindi le (7.1) e il teorema è dimostrato.

Possiamo facilmente estendere il risultato precedente ad aperti più generali:

XXXI. *Sia Ω un aperto di $I\!R^n$ di classe C^1 e tale che la sua frontiera $\partial\Omega$ è limitata. Esiste allora un operatore di prolungamento $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(I\!R^n)$.*

Essendo $\partial\Omega$ limitata, esiste un disco D di centro l'origine che la contiene al suo interno. Poniamo $A = \Omega \cap \mathring{D}$. L'insieme A risulta essere un aperto limitato e inoltre, essendo

$$\partial A = \partial(\Omega \cap \mathring{D}) = (\partial\Omega \cap \mathring{D}) \cup (\Omega \cap \partial D) = \partial\Omega \cup \partial D,$$

risulta di classe C^1. Possiamo quindi applicare il teorema precedente e dire che esiste un operatore di prolungamento

$$P_1 : W^{1,p}(A) \to W^{1,p}(I\!R^n).$$

Sia ora u una funzione di $W^{1,p}(\Omega)$ e sia $\alpha \in \mathring{C}^\infty(\mathring{D})$ tale che $\alpha = 1$ in un intorno di $(I\!R^n - \Omega) \cap \mathring{D}$. Una siffata funzione esiste per il lemma di Uryshon (lemma VII).

Definiamo [7]

$$Pu(x) = \alpha(x) P_1(u|_A)(x) + [(1 - \alpha(x))u(x)]. \tag{7.20}$$

Risulta $Pu(x) = u(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Infatti, se $x \in \Omega$, o $x \in A = \Omega \cap \mathring{D}$ oppure $x \in I\!R^n - \mathring{D}$. Nel primo caso il secondo membro di (7.20), essendo $P_1(u|_A) = u$ in A, è uguale a

$$\alpha(x)u(x) + (1 - \alpha(x))u(x) = u(x).$$

Se, invece, $x \in I\!R^n - \mathring{D}$, lo stesso secondo membro, essendo questa volta $\alpha = 0$, è uguale a

$$u(x).$$

[7] Scrivendo $(1 - \alpha(x))u(x)$ intendiamo la funzione

$$\begin{cases} = (1 - \alpha(x))u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ = 0 & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Infine, se $x \notin \Omega$, dovendo essere necessariamente $x \in \mathring{D}$, risulta $x \in (\mathbb{R}^n - \Omega) \cap \mathring{D}$ e dunque il secondo membro di (7.20), essendo ora $\alpha = 1$, è uguale a

$$P_1(u|_A)(x).$$

La funzione $\alpha P_1(u|_A)$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre, poiché P_1 è un operatore di prolungamento, si ha

$$\|\alpha P_1(u|_A)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|P_1(u|_A)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C'\|u|_A\|_{W^{1,p}(A)} \leq C'\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

La dimostrazione del lemma XXIX mostra anche che $(1-\alpha)u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|(1-\alpha)u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C''\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Le disuguaglianze ottenute implicano che Pu appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

L'operatore P risulta quindi un operatore di prolungamento da $W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

XXXII. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ di classe C^1 e tale che la sua frontiera $\partial\Omega$ è limitata..*
Sussistono le seguenti immersioni:
1) Sia $p < n$ e sia p^* definito da $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ (ossia $p^* = \frac{np}{n-p}$). $W^{1,p}(\Omega)$ è immerso in $L^r(\Omega)$ con immersione continua per ogni r tale che $p \leq r \leq p^*$.
2) Sia $p = n$. $W^{1,n}(\Omega)$ è immerso in $L^r(\Omega)$ con immersione continua per ogni r tale che $n \leq r < +\infty$.
3) Sia $p > n$. $W^{1,p}(\Omega)$ è immerso in $C^\alpha(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, dove $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, con immersione continua.

Dimostriamo il punto 1); gli altri due punti si dimostrano in maniera del tutto analoga.

In base al teorema di prolungamento appena dimostrato, per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste un suo prolungamento $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che vale la disuguaglianza in (7.1). Si ha dunque, ricordando il teorema XIX di immersione in $\mathbb{R}^n$,

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq \|Pu\|_{L^{p^*}} \leq C\,\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

ossia l'immersione continua di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^{p^*}(\Omega)$. La tesi per ogni r tale che $p \leq r \leq p^*$ segue applicando il teorema XVI.

I controesempi 2), 3) e 4) della § 10 mostrano, rispettivamente, che se Ω non è abbastanza regolare il teorema XXXII è falso, che p^* è ottimale e che $W^{1,n}(\Omega) \not\subset L^\infty(\Omega)$.

Il teorema XXXII si estende agli spazi $W^{k,p}(\Omega)$ con $k > 1$ nel seguente modo

XXXIII. *Sia Ω un aperto di $I\!R^n$ di classe C^1 e tale che la sua frontiera $\partial\Omega$ è limitata. Sussistono le seguenti immersioni:*
1) Se $kp < n$ allora $W^{k,p}(\Omega)$ è immerso in $L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega)$ con immersione continua.
2) Se $kp = n$ allora $W^{k,p}(\Omega)$ è immerso in $L^r(\Omega)$ con immersione continua per ogni $p \le r < +\infty$.
3) Se $kp > n$ allora $W^{k,p}(\Omega)$ è immerso in $C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\lambda}(\overline{\Omega})$ con immersione continua, dove

$$\lambda = 1 - \left(\frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right]\right) \tag{7.21}$$

se $\frac{n}{p} \notin I\!N$, oppure, se $\frac{n}{p} \in I\!N$, è un qualsiasi numero $0 < \lambda < 1$.

Poniamo $p^{*_h} = p^{\overbrace{* \cdots *}^{h \ volte}}$. Osserviamo che, essendo

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

risulta

$$\frac{1}{p^{*_h}} = \frac{1}{p} - \frac{h}{n}$$

ossia

$$p^{*_h} = \frac{np}{n-hp}.$$

Osserviamo anche, che essendo

$$\frac{np}{n-hp} < n \iff p < n - hp \iff (h+1)p < n$$

abbiamo

$$p^{*_h} < n \iff (h+1)p < n \ . \tag{7.22}$$

Sia ora $kp < n$. In base alla (7.22), abbiamo che $p^{*_{k-1}} < n$ ed essendo $p < p^* < p^{**} < \ldots$ abbiamo $p^{*_h} < n$ per $h = 1, \ldots, k-1$. Applicando più volte il punto 1) del teorema XXXII a u e alle sue derivate, abbiamo

$$u \in W^{k,p}(\Omega) \Longrightarrow u \in W^{k-1,p^*}(\Omega) \Longrightarrow \ldots u \in W^{1,p^{*_{k-1}}}(\Omega) \Longrightarrow u \in L^{p^{*_k}}(\Omega)$$

ossia l'immersione cercata. Per quanto riguarda la continuità di tale immersione, basta osservare che le immersioni

$$W^{k,p}(\Omega) \subset W^{k-1,p^*}(\Omega) \subset \ldots \subset L^{p^{*_k}}(\Omega)$$

sono tutte continue. Quindi, se una successione $\{u_n\}$ è convergente in $W^{k,p}(\Omega)$ lo sarà anche in $W^{k-1,p^*}(\Omega)$ e così via. Ciò dimostra che $W^{k,p}(\Omega)$ è immerso con continuità in $L^{p^{*k}}(\Omega)$, ossia che esiste una costante C tale che

$$\|u\|_{L^{p^{*k}}} \leq C\, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Supponiamo ora $kp = n$; in questo caso abbiamo (cfr. la (7.22)) $p < p^* < \ldots < p^{*_{k-1}} = n$.

Applicando ancora il punto 1) del teorema XXXII

$$u \in W^{k,p}(\Omega) \Longrightarrow u \in W^{k-1,p^*}(\Omega) \Longrightarrow \ldots u \in W^{1,p^{*k-1}}(\Omega) = W^{1,n}(\Omega).$$

Il punto 2) del teorema XXXII implica che $u \in L^r(\Omega)$ per ogni $n \leq r < +\infty$. D'altra parte, essendo $u \in L^p(\Omega)$, per il teorema di interpolazione XVI, si ha la tesi per ogni $p \leq r < +\infty$. Per la continuità dell'immersione si ragiona come nel primo caso.

Sia, infine, $kp > n$. Supponiamo, dapprima, che $\frac{n}{p} \notin I\!N$ e poniamo

$$h = \left[\frac{n}{p}\right].$$

Risulta

$$h < \frac{n}{p} < h+1 \iff hp < n < (h+1)p \iff p^{*_{h-1}} < n < p^{*_h}.$$

Abbiamo allora $p < p^* < \ldots < p^{*_{h-1}} < n$ e quindi, per il punto 1) del teorema XXXII,

$$u \in W^{k,p}(\Omega) \Longrightarrow u \in W^{k-1,p^*}(\Omega) \Longrightarrow \ldots u \in W^{k-h,p^{*h}}(\Omega)$$

Essendo ora $p^{*_h} > n$, il punto 3) del teorema XXXII porta a concludere che, per ogni multiindice α di lunghezza $|\alpha| \leq k-h-1$, si ha $D^\alpha u \in C^\lambda(\overline{\Omega})$, dove

$$\lambda = 1 - \frac{n}{p^{*_h}} = 1 - \frac{n}{\frac{np}{n-hp}} = 1 - \frac{n-hp}{p} = 1 + h - \frac{n}{p}$$

ossia la (7.21). Questo significa che $u \in C^{k-h-1,\lambda}(\overline{\Omega})$.

Se, invece, $\frac{n}{p} \in I\!N$, ponendo $h = \frac{n}{p}$ abbiamo $p^{*_{h-1}} = n$ e quindi

$$u \in W^{k,p}(\Omega) \Longrightarrow u \in W^{k-1,p^*}(\Omega) \Longrightarrow \ldots u \in W^{k-(h-1),p^{*h-1}}(\Omega) = W^{k-h+1,n}(\Omega).$$

Per il punto 2) del teorema XXXII, abbiamo che $u \in W^{k-h,s}(\Omega)$, per ogni $n \leq s < +\infty$. Per il punto 3) dello stesso teorema, per ogni multiindice α di lunghezza $|\alpha| \leq k-h-1$ e per ogni $0 < \lambda < 1$, si ha $D^\alpha u \in C^\lambda(\overline{\Omega})$, ossia la tesi. Anche qui, per la continuità dell'immersione si ragiona come nel primo caso.

8. Il teorema di traccia. Gli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ e $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.

È ovvio cosa significhi la traccia di u su $\Sigma = \partial\Omega$ se $u \in C^0(\overline{\Omega})$; è altrettanto ovvio che se $u \in L^p(\Omega)$, non ha senso parlare di traccia su Σ, dato che Σ ha misura di Lebesgue n-dimensionale nulla ed essendo u una funzione definita q.o., u può essere modificata a piacere su Σ (si ricordi che le funzioni di $L^p(\Omega)$ sono in realtà classi di equivalenza rispetto all'uguaglianza quasi ovunque).

Accade, però, che se u, oltre ad essere in $L^p(\Omega)$, ha anche le derivate (deboli !) in $L^p(\Omega)$, allora è possibile definire, in qualche senso, la traccia di u su Σ. Alla dimostrazione di questo fatto piuttosto delicato è dedicato il presente § .

Cominciamo con qualche definizione. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e Σ la sua frontiera. Se Σ è una varietà orientabile di classe C^1 a pezzi, diremo che Ω è *regolare.* Osserviamo che, per un campo regolare, possiamo supporre di avere una rappresentazione parametrica della frontiera Σ del tipo $x = f(t)$, dove $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ varia nel dominio base $D = \cup_{h=1}^m D_h$, con i D_h domini regolari disgiunti a due a due.

Diremo che Ω è *propriamente regolare* se è regolare e inoltre sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) è possibile definire su Σ un versore $\mu(\xi)$ continuo su Σ, il quale sia sempre penetrante e, indicato con $\omega(\xi)$ la misura dell'angolo che ω forma con la normale interna ν nei punti regolari di Σ, risulta

$$0 \le \omega(\xi) \le \omega_0 < \frac{\pi}{2}\,; \tag{8.1}$$

2) $\mu[f(t)] \in C^1(D)$;

3) esiste un $\varrho_0 > 0$ tale che, per ogni fissato $0 < \varrho \le \varrho_0$, il luogo Σ_ϱ descritto da

$$x = \xi + \varrho\,\mu(\xi) \qquad \xi \in \Sigma$$

risulta interamente contenuto in Ω ed è la frontiera di un dominio regolare Ω_ϱ tale che, per $0 < \varrho < \varrho' \le \varrho_0$ risulta $\overline{\Omega}_{\varrho'} \subset \Omega_\varrho$, $\overline{\Omega}_\varrho \subset \Omega$.

Se Σ risulta di classe C^2, allora si può prendere $\mu = \nu$, mentre se Σ è di classe C^1 si può dimostrare l'esistenza di un versore μ con le caratteristiche richieste (cfr. Fichera-De Vito, *Funzioni analitiche di una variabile complessa*, Ed. Veschi, p.273-275). Esistono, comunque, campi che non sono di classe C^1 che sono propriamente regolari. Si può dimostrare che, nel caso $n = 2$, un campo è propriamente regolare se e solo se la sua frontiera è di classe C^1 a pezzi e priva di cuspidi (una dimostrazione dovuta a De Vito si trova nell'appendice del lavoro di M. P. Colautti, *Teoremi di completezza in spazi hilbertiani connessi con l'equazione di Laplace in due variabili*, Rend. Sem. Matem. di Padova, 31, 1961, 114–164).

Il teorema fondamentale che permetterà di definire la traccia di funzioni in spazi di Sobolev è il teorema XXXV, detto teorema di traccia. Premettiamo un lemma che può essere considerato una sorta di Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni sulla frontiera Σ.

XXXIV. *Sia Ω un campo propriamente regolare e sia $U \in L^1(\Sigma)$. Se*

$$\int_\Sigma U\,\psi\,d\sigma = 0, \quad \forall\,\psi \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{8.2}$$

allora $U = 0$ q.o. su Σ.

Sia $\varphi(t) \in \mathring{C}^\infty(I\!R^{n-1})$ tale che $\operatorname{spt}\varphi \subset D_k$, dove D_k è uno dei domini regolare che decompongono D. Indichiamo con B "la striscia" ottenuta al variare del punto $x = f(t)+\varrho\mu[f(t)]$ quando $(\varrho, t) \in [0,\varrho_0]\times D$. Poniamo in B: $\Phi(x) \equiv \Phi[f(t)+\varrho\mu[f(t)]] = \varphi(t)$. La funzione Φ risulta di classe C^1 in B e coincide con la φ su Σ. Prolunghiamola ad una funzione di classe C^1 in tutto $\overline{\Omega}$. Per fare ciò, si considerino ϱ_1, ϱ_2 tali che $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_0$ e sia $K \in C^\infty(I\!R^n)$ tale che $K(x) = 0$ per $x \in \Omega_{\varrho_2}$ e $K(x) = 1$ per $x \in I\!R^n - \Omega_{\varrho_1}$. Allora la funzione

$$\psi(x) = \begin{cases} K(x)\,\Phi(x) & \text{per } x \in \overline{\Omega} - \Omega_{\varrho_0} \\ 0 & \text{per } x \in \Omega_{\varrho_0} \end{cases}$$

risulta di classe $C^1(\overline{\Omega})$ e coincide con la φ su Σ. Per la (8.2), deve essere

$$\int_{D_k} U[f(t)]\,\varphi(t)\,\sqrt{L_1^2 + \cdots + L_n^2}\,dt = 0,$$

dove gli L_h indicano i minori di ordine massimo della matrice jacobiana della trasformazione $x = f(t)$. Dovendo questo valere per ogni funzione $\varphi \in \mathring{C}^\infty(D_k)$, per il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni, si ha: $U[f(t)]\,\sqrt{L_1^2 + \cdots + L_n^2} = 0$ q.o. su D_k. Essendo $L_1^2 + \cdots + L_n^2 > 0$, questo è possibile se e solo se $U = 0$ q.o. in D_k. Per l'arbitrarietà di D_k segue $U = 0$ q.o. su Σ.

XXXV. *Sia Ω un campo propriamente regolare e sia $u \in C^{1,p}(\Omega)$. Per quasi ogni $\xi \in \Sigma$ esiste finito il limite*

$$\lim_{\varrho\to 0^+} u[\xi + \varrho\mu(\xi)] = U(\xi)\,.$$

La funzione $U(\xi)$ così ottenuta è misurabile ed appartiene a $L^p(\Sigma)$. Se $\mu'(\xi)$ è un altro versore definito su Σ che gode delle proprietà 1), 2), 3) di cui sopra, si ha

$$\lim_{\varrho\to 0^+} u[\xi + \varrho\mu'(\xi)] = U(\xi)$$

q.o. su Σ. Per ogni $u \in C^{1,p}(\Omega)$ sussiste la seguente disuguaglianza

$$\int_\Sigma |U|^p d\sigma \le K \int_\Omega (|u|^p + |\operatorname{grad} u|^p)\,dx \tag{8.3}$$

dove K dipende solo da Ω e da p.

Consideriamo la trasformazione

$$x = f(t) + \varrho\mu[f(t)] \equiv F(\varrho, t) \tag{8.4}$$

per (ϱ, t) che varia in $[0, \varrho_0] \times D$. Sia $J(\varrho, t)$ il modulo del determinante jacobiano di questa trasformazione. Tale jacobiano è dato da

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \cdot\;\cdot\;\cdot & \mu_n \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \varrho\frac{\partial \mu_1}{\partial t_1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial t_1} + \varrho\frac{\partial \mu_n}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_{n-1}} + \varrho\frac{\partial \mu_1}{\partial t_{n-1}} & \cdot\;\cdot\;\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial t_{n-1}} + \varrho\frac{\partial \mu_n}{\partial t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

e quindi, indicati con L_h i minori di ordine massimo della matrice jacobiana della trasformazione $x = f(t)$ e posto $\sigma'(t) = \sqrt{L_1^2 + \ldots L_n^2}$, risulta (cfr. (8.1))

$$J(0, t) = \sum_{h=1}^{n} \mu_h L_h = \sum_{h=1}^{n} \mu_h \nu_h \sqrt{L_1^2 + \ldots L_n^2} = \sigma'(t)\, \cos\omega[f(t)] \geq \sigma'(t)\, \cos\omega_0 > 0$$

e si può quindi supporre che ϱ_0 sia tanto piccolo da risultare

$$J(\varrho, t) \geq m_0 > 0 \qquad t \in D,\ 0 < \varrho \leq \varrho_0\ . \tag{8.5}$$

Sia - come nel lemma precedente - B "la striscia" ottenuta al variare del punto x dato da (8.4) quando $\varrho \in [0, \varrho_0]$ e $t \in D$. Per $x \in B - \Sigma$, ossia per $0 < \varrho \leq \varrho_0$, consideriamo

$$g(x) \equiv g(\varrho, t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_h} u[F(\varrho, t)]\, \mu_h[f(t)]\,.$$

Essendo la $u \in C^{1,p}(\Omega)$ ed essendo $|g| \leq |\operatorname{grad} u|$, la g risulta sommabile in B e si ha (per il teorema di Tonelli)

$$\int_B |g(x)|\, dx = \int_0^{\varrho_0} d\varrho \int_D |g(\varrho, t)|\, J(\varrho, t)\, dt = \int_D dt \int_0^{\varrho_0} |g(\varrho, t)|\, J(\varrho, t)\, d\varrho\,.$$

Allora per quasi ogni $t \in D$ esiste finito l'integrale

$$\int_0^{\varrho_0} |g(\varrho, t)|\, J(\varrho, t)\, d\varrho$$

e quindi, ricordando la (8.5), per quasi ogni $t \in D$ esiste finito l'integrale

$$\int_0^{\varrho_0} |g(\varrho, t)|\, d\varrho\ .$$

D'altra parte, essendo g la derivata direzionale della u rispetto a μ, si ha che

$$(8.6) \qquad u[\xi + \varrho_0 \mu(\xi)] - u[\xi + \varrho\mu(\xi)] = \int_{\varrho}^{\varrho_0} g(r,t)\, dr$$

e resta così dimostrata l'esistenza q.o. della U:

$$U(\xi) = \lim_{\varrho \to o^+} u[\xi + \varrho\mu(\xi)] = u[\xi + \varrho_0 \mu(\xi)] - \int_0^{\varrho_0} g(r,t)\, dr \ .$$

È ovvio che la U risulta misurabile. Per dimostrare che la U non dipende dalla scelta del versore μ, osserviamo che dalla (8.6) segue

$$(8.7) \qquad |u[\xi + \varrho\mu(\xi)]| \leq |u[\xi + \varrho_0 \mu(\xi)]| + \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|\, dr$$

e che la funzione a secondo membro è certamente sommabile in D (il primo addendo è una funzione continua, mentre il secondo risulta sommabile giacché

$$\int_D dt \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|\, dr \leq \frac{1}{m_0} \int_D dt \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|\, J(r,t)\, dr = \frac{1}{m_0} \int_B |g(x)|\, dx \ ).$$

Sia ora v una qualsiasi funzione continua in $\overline{\Omega}$; si ha

$$\int_{\Sigma_\varrho} u\, v\, d\sigma_\varrho = \int_D u[\xi + \varrho\mu(\xi)]\, v[\xi + \varrho\mu(\xi)]\, H(\varrho, t)\, dt$$

dove $H(\varrho, t)$ denota, per ogni ϱ fissato, la radice della somma dei quadrati dei minori di ordine massimo della matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \varrho \frac{\partial \mu_1}{\partial t_1} & . \ . \ . & \frac{\partial f_n}{\partial t_1} + \varrho \frac{\partial \mu_n}{\partial t_1} \\ . & . \ . \ . & . \\ . & . \ . \ . & . \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_{n-1}} + \varrho \frac{\partial \mu_1}{\partial t_{n-1}} & . \ . \ . & \frac{\partial f_n}{\partial t_{n-1}} + \varrho \frac{\partial \mu_n}{\partial t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Poiché la $H(\varrho, t)$ è continua in $[0, \varrho_0] \times D$ e $H(0,t) = \sigma'(t)$ si ha

$$(8.8) \qquad \lim_{\varrho \to 0^+} \int_{\Sigma_\varrho} u\, v\, d\sigma_\varrho = \int_\Sigma U\, v\, d\sigma$$

in virtù del teorema della convergenza dominata (cfr. (8.7)).

Sia ψ una qualsiasi funzione di classe $C^1(\overline{\Omega})$; risulta, per ogni $h = 1, \ldots, n$,

$$\int_{\Sigma_\varrho} u\, \psi\, \nu_h^{(\varrho)}\, d\sigma_\varrho = \int_{\Omega_\varrho} \left(\psi \frac{\partial u}{\partial x_h} + u \frac{\partial \psi}{\partial x_h} \right) dx$$

e quindi, tenendo presente la (8.8) e il fatto che $u \in C^{1,p}(\Omega)$ è sommabile insieme alle sue derivate prime in Ω,

$$\int_\Sigma U\,\psi\,\nu_h\,d\sigma = \int_\Omega \left(\psi\,\frac{\partial u}{\partial x_h} + u\,\frac{\partial \psi}{\partial x_h}\right) dx\ . \tag{8.9}$$

Sia ora U' l'analoga della U ottenuta a partire da una altro versore μ'; dovrà essere

$$\int_\Sigma U'\,\psi\,\nu_h\,d\sigma = \int_\Omega \left(\psi\,\frac{\partial u}{\partial x_h} + u\,\frac{\partial \psi}{\partial x_h}\right) dx$$

e, per la (8.9),

$$\int_\Sigma (U - U')\,\psi\,\nu_h\,d\sigma = 0 \qquad \forall\ \psi \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad h = 1, \ldots, n. \tag{8.10}$$

Dimostriamo che questo è possibile se e solo se $U = U'$ q.o. su Σ. Per il lemma XXXIV, le condizioni (8.10) implicano $(U - U')\,\nu_h = 0$ q.o. su Σ $(h = 1, \ldots, n)$. Moltiplicando questa relazione per ν_h e sommando su h, otteniamo

$$(U - U')\sum_{h=1}^n \nu_h^2 = U - U' = 0,$$

ossia $U = U'$ q.o. su Σ.

Analogamente alla (8.6) possiamo scrivere

$$u[\xi + \varrho'\mu(\xi)] = u[\xi + \varrho\mu(\xi)] - \int_{\varrho'}^{\varrho} g(r, t)\,dr$$

per ogni $0 < \varrho' < \varrho \le \varrho_0$ e quindi, quasi ovunque,

$$U(\xi) = u[\xi + \varrho\mu(\xi)] - \int_0^{\varrho} g(r, t)\,dr\ . \tag{8.11}$$

Allora [8]

$$\begin{aligned}|U(\xi)|^p \le 2^{p-1}\left(|u[\xi + \varrho\mu(\xi)]|^p + \left|\int_0^{\varrho} g(r,t)\,dr\right|^p\right) \le \\ 2^{p-1}\left(|u[\xi + \varrho\mu(\xi)]|^p + \left[\int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|\,dr\right]^p\right) \le \\ 2^{p-1}\left(|u[\xi + \varrho\mu(\xi)]|^p + \varrho_0^{p-1}\int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p\,dr\right)\end{aligned}$$

---

[8] Se $a, b \ge 0$, allora

$$(a + b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{$*$}$$

Infatti, fissiamo un $b \ge 0$ e consideriamo la funzione $f(x) = (x + b)^p - 2^{p-1}(x^p + b^p)$ per $x \ge 0$. Si ha $f'(x) = p(x + b)^{p-1} - p2^{p-1}x^{p-1}$ da cui $f'(x) > 0$ se e solo se $0 < x < b$ e quindi $f(x) \le f(b) = (2b)^p - 2^{p-1}2b^p = 0$, per ogni $x \ge 0$, ossia la $(*)$.

e dunque

$$\int_\Sigma |U(\xi)|^p\, d\sigma = \int_D |U[f(t)]|^p\, \sigma'(t)\, dt \leq$$

(8.12)

$$2^{p-1}\left(\int_D |u[F(\varrho,t)]|^p\, \sigma'(t)\, dt + \varrho_0^{p-1}\int_D \sigma'(t)\, dt \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p\, dr\right).$$

D'altra parte, posto $M = \max_D \sigma'(t)$ e ricordando la (8.5), si ha

$$\sigma'(t) = \frac{\sigma'(t)}{J(r,t)}\, J(r,t) \leq \frac{M}{m_0}\, J(r,t)$$

da cui

$$\int_D \sigma'(t)\, dt \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p\, dr \leq \frac{M}{m_0}\int_D dt \int_0^{\varrho_0} |\operatorname{grad} u|^p\, J(r,t)\, dr \leq \frac{M}{m_0}\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx$$

Analogamente si ha

$$\int_D |u[F(\varrho,t)|^p\, \sigma'(t)\, dt \leq \frac{M}{m_0}\int_D |u[F(\varrho,t)|^p\, J(\varrho,t)\, dt$$

e quindi dalla (8.12) si trae

$$\int_\Sigma |U(\xi)|^p\, d\sigma \leq 2^{p-1}\frac{M}{m_0}\int_D |u[F(\varrho,t)|^p\, J(\varrho,t)\, dt + 2^{p-1}\varrho_0^{p-1}\frac{M}{m_0}\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx$$

per ogni $0 < \varrho \leq \varrho_0$. Integrando tra 0 e ϱ_0:

$$\varrho_0 \int_\Sigma |U(\xi)|^p\, d\sigma \leq$$
$$2^{p-1}\frac{M}{m_0}\int_0^{\varrho_0} d\varrho \int_D |u[F(\varrho,t)|^p\, J(\varrho,t)\, dt + 2^{p-1}\varrho_0^{p}\frac{M}{m_0}\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx \leq$$
$$2^{p-1}\frac{M}{m_0}\int_\Omega |u|^p dx + 2^{p-1}\varrho_0^{p}\frac{M}{m_0}\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx$$

ossia la (8.3).

Osserviamo che se Ω non è abbastanza regolare, il teorema XXXV può essere falso (si veda l'esempio 5), § 10).

Prima di andare avanti dimostriamo un paio di lemmi tecnici che ci saranno utili in seguito.

XXXVI. *Con le stesse notazioni del teorema precedente, esiste una costante C tale che*

$$\int_{\Sigma_\varrho} |u|^p d\sigma_\varrho \leq C\left(\int_\Sigma |U|^p d\sigma + \varrho^{p-1}\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx\right). \tag{8.13}$$

Ricordando la (8.11) possiamo scrivere

$$u[\xi + \varrho\mu(\xi)] = U(\xi) + \int_0^\varrho g(r,t)\, dr$$

da cui segue

$$|u[\xi + \varrho\mu(\xi)]|^p \leq 2^{p-1}\left(|U(\xi)|^p + \int_0^\varrho |g(r,t)|\, dr\right) \leq$$
$$2^{p-1}|U(\xi)|^p + 2^{p-1}\varrho^{p-1}\int_0^\varrho |g(r,t)|^p dr\ .$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_\varrho} |u|^p d\sigma_\varrho = \int_D |u[\xi + \varrho\mu(\xi)]|^p H(\varrho,t)\, dt \leq 2^{p-1}\int_D |U(\xi)|^p H(\varrho,t)\, dt + \\ 2^{p-1}\varrho^{p-1}\int_D H(\varrho,t)\, dt \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p dr\end{aligned} \tag{8.14}$$

Essendo $H(\varrho,t)$ continua in $[0,\varrho_0]\times D$, esiste una costante H_0 tale che $|H(\varrho,t)| \leq H_0$. Possiamo allora scrivere

$$H(\varrho,t) = \frac{H(\varrho,t)}{J(r,t)}\, J(r,t) \leq \frac{H_0}{m_0}\, J(r,t) \tag{8.15}$$

e quindi
(8.16)
$$\int_D H(\varrho,t)\, dt \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p dr \leq \frac{H_0}{m_0}\int_D dt \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p J(r,t)\, dr \leq \frac{H_0}{m_0}\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx\ .$$

Sempre dalla (8.15) abbiamo

$$H(\varrho,t) \leq \frac{H_0}{m_0}\, J(0,t) = \frac{H_0}{m_0}\, \sigma'(t)\, \cos\omega[f(t)] \leq \frac{H_0}{m_0}\, \sigma'(t)$$

da cui

$$\int_D |U(\xi)|^p H(\varrho,t)\, dt \leq \frac{H_0}{m_0}\int_D |U(\xi)|^p \sigma'(t)\, dt = \frac{H_0}{m_0}\int_\Sigma |U|^p d\sigma\ .$$

Da questa relazione e dalle (8.14) e (8.16) segue la tesi.

XXXVII. *Sia $w \in C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Risulta*

$$\liminf_{\varrho \to 0^+} \varrho \int_{\Sigma_\varrho} |w|^p d\sigma_\varrho = 0 \ .$$

Supponiamo che la tesi non sia vera. Esiste, allora, un $\overline{\varrho} > 0$ tale che

$$\varrho \int_{\Sigma_\varrho} |w|^p d\sigma_\varrho \geq c > 0 \qquad \forall \ \varrho \ : 0 < \varrho < \overline{\varrho}. \tag{8.17}$$

Siano $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \overline{\varrho}$ e sia B' la "striscia" $\Omega_{\varrho_1} - \Omega_{\varrho_2}$. Si ha

$$\int_\Omega |w|^p dx \geq \int_{B'} |w|^p dx = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \int_D |w[\xi + \varrho\mu(\xi)|^p J(\varrho, t)\, dt \tag{8.18}$$

Essendo

$$\int_{\Sigma_\varrho} |w|^p d\sigma_\varrho = \int_D |w[\xi + \varrho\mu(\xi)|^p H(\varrho, t)\, dt$$

ed inoltre

$$J(\varrho, t) = \frac{J(\varrho, t)}{H(\varrho, t)}\, H(\varrho, t) \geq \frac{m_0}{H_0}\, H(\varrho, t)$$

dalla (8.18) segue

$$\int_\Omega |w|^p dx \geq \frac{m_0}{H_0} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \int_D |w[\xi + \varrho\mu(\xi)|^p H(\varrho, t)\, dt = \frac{m_0}{H_0} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \int_{\Sigma_\varrho} |w|^p d\sigma_\varrho \ .$$

Infine la (8.17) porta a

$$\int_\Omega |w|^p dx \geq c\, \frac{m_0}{H_0} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{\varrho} = c\, \frac{m_0}{H_0} \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

e questo è assurdo, dato che l'ultimo membro tende a $+\infty$ per $\varrho_1 \to 0^+$, mentre il primo membro è finito per ipotesi.

Data una funzione $u \in C^{1,p}(\Omega)$, chiameremo *traccia* di u su Σ la funzione U determinata dal teorema XXXV. È ovvio che se u, oltre ad appartenere a $C^{1,p}(\Omega)$ è anche continua in $\overline{\Omega}$, allora la traccia di u che abbiamo appena definito è proprio la traccia di u nel senso usuale.

La disuguaglianza (8.3) è importante, perché permette di definire la traccia negli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Infatti, tale disuguaglianza mostra che l'operatore (lineare) di traccia $\tau : C^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ è continuo, dove $C^{1,p}(\Omega)$ è munito della norma $\| \cdot \|_{1,p}$ e $L^p(\partial\Omega)$ di quella usuale. Essendo $C^{1,p}(\Omega)$ denso in $W^{1,p}(\Omega)$, abbiamo che l'operatore τ si estende per continuità in modo unico ad un operatore lineare e continuo $\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$. Tale operatore continuo seguita a chiamarsi *operatore di traccia.* Così facendo ad ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ rimane associata una ben determinata funzione $U \in L^p(\partial\Omega)$ tale che la (8.3) sussiste e, nel caso $u \in C^0(\overline{\Omega})$, τu è la traccia classica.

Dimostriamo ora i seguenti lemmi che mostrano come le formule di Gauss-Green continuino a valere in $W^{1,p}(\Omega)$.

XXXVIII. *Sia* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Per ogni* $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *con* $\Delta_2 v \in L^q(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ *si ha* (ν *è la normale esterna):*

$$\int_\Sigma U \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_\Omega u \,\Delta_2 v\, dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx \;. \tag{8.19}$$

Dimostriamo la (8.19) supponendo $u \in C^{1,p}(\Omega)$. Per ogni $0 < \varrho \le \varrho_0$ abbiamo

$$\int_{\Sigma_\varrho} u \frac{\partial v}{\partial \nu^{(\varrho)}}\, d\sigma_\varrho = \int_{\Omega_\varrho} u \,\Delta_2 v\, dx + \int_{\Omega_\varrho} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx \;;$$

passando al limite per $\varrho \to 0^+$, ricordando la (8.8) e osservando che tutti gli integrandi relativi ad integrali estesi ad Ω sono sommabili in Ω, otteniamo la (8.19). Sia ora $u \in W^{1,p}(\Omega)$; esiste una successione $u_n \in C^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ nella norma $\| \cdot \|_{1,p}$. Per quanto appena dimostrato si ha

$$\int_\Sigma U_n \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_\Omega u_n \,\Delta_2 v\, dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} v\, dx \;.$$

e, passando al limite per $n \to \infty$ (l'operatore di traccia è continuo !) si ottiene la tesi.

XXXIX. *Sia* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *con* $p > 1$. *Se* $\tau u = 0$, *per ogni* $v \in W^{1,q}(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ *con* $\Delta_2 v \in L^q(\Omega)$ *si ha*

$$0 = \int_\Omega u \,\Delta_2 v\, dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx \;. \tag{8.20}$$

Essendo $v \in W^{1,q}(\Omega)$ avremo che $\operatorname{grad} v \in L^q(\Omega)$. Per il lemma XXXVII risulta

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \varrho \int_{\Sigma_\varrho} |\operatorname{grad} v|^q d\sigma_\varrho = 0$$

ed esiste perciò una successione di numeri positivi ϱ_k tale che

$$\lim_{k\to\infty} \varrho_k = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \varrho_k \int_{\Sigma_{\varrho_k}} |\operatorname{grad} v|^q d\sigma_{\varrho_k} = 0. \tag{8.21}$$

Sia $u_n \in C^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Poiché l'operatore di traccia τ è continuo e la traccia di u è nulla per ipotesi, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \|\tau u_n\|_{L^p(\Sigma)} = 0$$

e quindi esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ (ossia una successione crescente di indici n_k) tale che

$$\|\tau u_{n_k}\|_{L^p(\Sigma)} \le \varrho_k^{\frac{1}{q}} \;. \tag{8.22}$$

Essendo le u_n di classe $C^1(\Omega)$ e v di classe $C^2(\Omega)$, si ha

$$\int_{\Sigma_{\varrho_k}} u_{n_k} \frac{\partial v}{\partial \nu^{(\varrho_k)}} \, d\sigma_{\varrho_k} = \int_{\Omega_{\varrho_k}} u_{n_k} \Delta_2 v \, dx + \int_{\Omega_{\varrho_k}} \operatorname{grad} u_{n_k} \cdot \operatorname{grad} v \, dx \ .$$

È facile convincersi che gli integrali a secondo membro di questa ultima formula tendono ai corrispondenti integrali a secondo membro della (8.20) e quindi la tesi sarà acquisita se facciamo vedere che

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Sigma_{\varrho_k}} u_{n_k} \frac{\partial v}{\partial \nu^{(\varrho_k)}} \, d\sigma_{\varrho_k} = 0 \ . \tag{8.23}$$

Tenendo presenti le (8.13) e (8.22) ed osservando che

$$\frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1,$$

si ha

$$\left| \int_{\Sigma_{\varrho_k}} u_{n_k} \frac{\partial v}{\partial \nu^{(\varrho_k)}} \, d\sigma_{\varrho_k} \right| \le$$

$$\int_{\Sigma_{\varrho_k}} \left| u_{n_k} \frac{\partial v}{\partial \nu^{(\varrho_k)}} \right| d\sigma_{r_k} \le \left(\int_{\Sigma_{\varrho_k}} |u_{n_k}|^p d\sigma_{\varrho_k} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Sigma_{\varrho_k}} |\operatorname{grad} v|^q d\sigma_{\varrho_k} \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$C^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Sigma} |U_{n_k}|^p d\sigma + \varrho_k^{p-1} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u_{n_k}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Sigma_{\varrho_k}} |\operatorname{grad} v|^q d\sigma_{\varrho_k} \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$C^{\frac{1}{p}} \left(1 + \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u_{n_k}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\varrho_k \int_{\Sigma_{\varrho_k}} |\operatorname{grad} v|^q d\sigma_{\varrho_k} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Poiché la convergenza di $\{u_n\}$ in $W^{1,p}$ implica che

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} u_{n_k}|^p dx \longrightarrow \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^p dx \, ,$$

ricordando la (8.21), si trae la (8.23), ossia la tesi.

Una domanda interessante è se ogni funzione $f \in L^p(\partial\Omega)$ è traccia di una qualche funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$, ossia se l'operatore τ è suriettivo. La risposta è no, come mostrato da Hadamard; egli, infatti, ha costruito una funzione f continua su $\partial\Omega$ e quindi appartenente a $L^2(\partial\Omega)$, ma tale che non esiste alcuna funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ di cui f è la traccia. Tale esempio è riportato al numero 8) della § 10.

Si definisce allora lo spazio delle tracce $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ lo spazio delle $f \in L^p(\partial\Omega)$ tali che esiste una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per la quale $\tau u = f$, ossia $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) = \tau\left(W^{1,p}(\Omega)\right)$. Possiamo normare lo spazio delle tracce con la seguente norma

$$\|f\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{u\in W^{1,p}(\Omega) \\ \tau u = f}} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{8.24}$$

Lo spazio $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ normato in tal modo risulta essere uno spazio di Banach. Infatti, se indichiamo con $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega)$ lo spazio delle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tali che $\tau u = 0$, si riconosce immediatamente che tale spazio è chiuso (per la (8.3)) e $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ si può identificare con lo spazio quoziente $W^{1,p}(\Omega)/\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega)$. Essendo la norma (8.24) proprio la norma quoziente, la completezza di $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ è assicurata da un teorema generale di Analisi Funzionale.

Le definizioni che abbiamo dato si estendono poi agli spazi $W^{k,p}(\Omega)$, con k intero maggiore di 1, ma non svilupperemo qui queste considerazioni. Nel caso $p = 2$ lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ viene indicato con $W^1(\Omega)$, mentre il relativo spazio delle tracce con $W^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Il problema di caratterizzare in qualche modo "intrinseco" gli spazi di traccia ha interessato molti Matematici. Qui ci limitiamo a citare il fatto che la teoria degli spazi di traccia può essere inquadrata nella teoria degli spazi di Sobolev frazionari (ossia ad esponenti non interi), con la quale si spiega anche il perché del simbolo $W^{1-\frac{1}{p},p}$. Le funzioni di questi spazi possono essere caratterizzate mediante trasformate di Fourier (cfr., ad es., L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, p.45 e seguenti) oppure mediante una particolare norma, come indicato per $p = 2$ da Slobodetskij e Babich (*Della limitazione dell'integrale di Dirichlet*, Dokl. Acad., N. SSSR, 1956) ed esteso poi da Gagliardo per p qualunque (*Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, Rend. Sem. Mat. Padova, 1957).

Le condizioni necessarie e sufficienti che si ottengono mediante queste teorie, pur essendo estremamente importanti dal punto di vista teorico, sono piuttosto difficili da verificare in pratica. Ricordiamo un paio di condizioni, che pur essendo soltanto sufficienti, hanno il pregio di essere verificabili in pratica.

Un primo risultato è dovuto a C. Miranda (*Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana*, Rend. Acc. Sc. Fis. e Matem. di Napoli, 1948), il quale dimostrò che se f è uniformemente hölderiana con esponente $\lambda > \frac{1}{2}$, allora $f \in W^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Tale risultato è stato poi completato da De Vito (*Sulle funzioni ad integrale di Dirichlet finito*, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, 1958), il quale ha mostrato che se f è uniformemente hölderiana con esponente $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ ed è in più a variazione limitata, allora risulta $f \in W^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Inoltre la condizione di Hölder può essere sostituita da una condizione del Dini. Mediante esempi ha mostrato anche che l'ipotesi di variazione limitata non può essere tolta (per $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$) e che, d'altra parte, tale ipotesi, da sola, non è sufficiente a garantire l'appartenenza di f a $W^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

9. Risultati di compattezza.

In alcune questioni ha interesse sapere che un certo operatore lineare $T : B \to B'$ è compatto; ciò significa che se $\{\varphi_n\}$ è una successione limitata in B, allora esiste una sottosuccessione $\{\varphi_{n_k}\}$ tale che $\{T\varphi_{n_k}\}$ converge in B'. In questo § mostreremo, sotto opportune ipotesi, la compattezza dell'operatore di immersione e di quello di traccia.

XL. *Sia $\Omega \subset I\!\!R^n$ un aperto limitato di classe C^1. L'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ risulta compatta.*

Sia $\{u_m\}$ una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq L \ .$$

Esiste una successione $w_m \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(I\!\!R^n)$ tale che

$$\|u_m - w_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \frac{1}{m} \ . \tag{9.1}$$

Una tale successione può essere costruita nel modo seguente: consideriamo la successione delle $\{Pu_m\}$ fornito dal teorema di prolungamento XXX. Le funzioni Pu_m sono tali che

$$Pu_m \in W^{1,p}(I\!\!R^n), \qquad Pu_m = u_m \text{ in } \Omega, \qquad \|Pu_m\|_{W^{1,p}(I\!\!R^n)} \leq C\ \|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Dalla dimostrazione del teorema di prolungamento si evince, inoltre, che le funzioni Pu_m hanno tutte il supporto contenuto in uno stesso compatto. Come w_m possiamo allora prendere $R_\varepsilon Pu_m$ con ε (dipendente da m) abbastanza piccolo. È ovvio che possiamo fare in modo che il supporto di tutte queste w_m sia contenuto in un compatto $K \supset \Omega$.

Essendo $w_m \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(I\!\!R^n)$ è ben noto che si ha

$$w_m(x) = \int_{I\!\!R^n} \operatorname{grad} w_m(y) \times \operatorname{grad}_y s(x,y)\, dy = \int_K \operatorname{grad} w_m(y) \times \operatorname{grad}_y s(x,y)\, dy$$

dove $s(x,y)$ è la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace.

L'integrale a secondo membro, essendo il nucleo un $\mathcal{O}(|x-y|^{1-n})$, può essere pensato come un operatore compatto (cfr. Appendice) da $[L^p(K)]^n \to L^p(K)$. Si noti che la successione $\{w_m\}$ è limitata in $W^{1,p}(I\!\!R^n)$, dato che [9]

$$\|w_m\|_{W^{1,p}(I\!\!R^n)} = \|R_\varepsilon Pu_m\|_{W^{1,p}(I\!\!R^n)} \leq \|Pu_m\|_{W^{1,p}(I\!\!R^n)} \leq C\ \|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \ .$$

Essendo dunque la successione $\{\operatorname{grad} w_m\}$ limitata in $[L^p(K)]^n$ esiste una sottosuccessione $\{w_{m_k}\}$ tale che la successione

$$\left\{ \int_K \operatorname{grad} w_{m_k}(y) \times \operatorname{grad}_y s(x,y)\, dy \right\}$$

è convergente in $L^p(K)$. Quindi esiste un $w_0 \in L^p(K)$ tale che

$$\|w_{m_k} - w_0\|_{L^p(K)} \to 0 \ .$$

Ricordando la (9.1) si ha

$$\|u_{m_k} - w_0\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_{m_k} - w_{m_k}\|_{L^p(\Omega)} + \|w_{m_k} - w_0\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{m_k} + \|w_{m_k} - w_0\|_{L^p(K)} \to 0$$

ossia la sottosuccessione $\{u_{m_k}\}$ è convergente in $L^p(\Omega)$.

---

(9) Si ricordi il lemma III e il fatto che $DR_\varepsilon = R_\varepsilon D$.

XLI. *Sia $\Omega \subset I\!R^n$ un aperto limitato di classe C^1.*
1) Se $p < n$ l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^r(\Omega)$ è compatta per ogni r tale che $1 \le r < p^*$ (dove p^* è definito, come al solito, da $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$).
2) Sia $p = n$. L'immersione di $W^{1,n}(\Omega)$ in $L^r(\Omega)$ è compatta per ogni r tale che $1 \le r < +\infty$.
3) Sia $p > n$. L'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $C^0(\overline{\Omega})$ è compatta.

Cominciamo col caso 1). Per il risultato precedente l'enunciato è vero per $r = p$ e quindi anche per ogni $1 \le r < p$ (se $\{u_n\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente in $L^p(\Omega)$; tale successione convergerà anche in $L^r(\Omega)$, dato che Ω ha misura finita).

Sia $p < r < p^*$ e supponiamo di avere una successione $\{u_n\}$ limitata in $W^{1,p}(\Omega)$. Per il teorema precedente esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente in $L^p(\Omega)$ verso u_0. Passando eventualmente ad una ulteriore sottosuccessione possiamo supporre $\{u_{n_k}\}$ convergente q.o..

Per ogni insieme misurabile $E \subset \Omega$ si ha, ricordando il teorema di immersione XIX,

$$\|u_{n_k}\|_{L^r(E)} \le \|u_{n_k}\|_{L^{p^*}(E)} \, |E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p^*}} \le \|u_{n_k}\|_{L^{p^*}(\Omega)} \, |E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p^*}} \le$$
$$C \, \|u_{n_k}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \, |E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p^*}} \le C\, L \, |E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p^*}}$$

dove $\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le L$. Poiché $\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*} > 0$, la relazione appena ottenuta mostra che la successione $\{|u_{n_k}|^r\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui. Inoltre, per il lemma di Fatou, si ha

$$\|u_0\|_{L^r(E)} \le \limsup_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_{L^r(E)} \le C\, L \, |E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p^*}}$$

e quindi

$$\|u_{n_k} - u_0\|_{L^r(E)} \le \|u_{n_k}\|_{L^r(E)} + \|u_0\|_{L^r(E)} \le 2\; C\, L \, |E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p^*}}.$$

Abbiamo così dimostrato che anche la successione $\{|u_{n_k} - u_0|^r\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui. Tale successione tende a 0 q.o. e il teorema di Vitali permette di concludere che tende a 0 anche in norma:

$$\|u_{n_k} - u_0\|_{L^r(\Omega)} \to 0$$

e questo dimostra la tesi.

Gli altri due casi possono essere trattati in modo del tutto analogo.

Si noti che l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^{p^*}(\Omega)$ ($p < n$) non è compatta (si veda l'esempio 6) nel prossimo §).

Il prossimo teorema riguarda la compattezza dell'operatore di traccia.

XLII. *Sia $\Omega \subset I\!R^n$ propriamente regolare. L'operatore di traccia $\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ è un operatore compatto per $p > 1$.*

Cominciamo coll'osservare che, se $w \in C^0(\Omega)$, allora si ha (con le notazioni del teorema XXXV)

$$\int_0^{\overline{\varrho}} d\varrho \int_\Sigma |w(\xi + \varrho\mu(\xi)|^p d\sigma \leq \frac{M}{m_0} \int_\Omega |w|^p dx \ . \tag{9.2}$$

Infatti possiamo scrivere

$$\int_0^{\overline{\varrho}} d\varrho \int_\Sigma |w(\xi + \varrho\mu(\xi)|^p d\sigma = \int_0^{\overline{\varrho}} d\varrho \int_D |w(\xi + \varrho\mu(\xi)|^p \sigma'(t)\, dt \leq$$
$$\frac{M}{m_0} \int_0^{\overline{\varrho}} d\varrho \int_D |w(\xi + \varrho\mu(\xi)|^p J(\varrho, t)\, dt \leq \frac{M}{m_0} \int_\Omega |w|^p dx \ .$$

Sia ora $u \in W^{1,p}(\Omega)$; dalla (8.11) deduciamo (q.o.)

$$U(\xi) - u(\xi + \varrho\mu(\xi)) = -\int_0^\varrho g(r, t)\, dr$$

da cui, procedendo come nel teorema XXXVI,

$$\int_\Sigma |U(\xi) - u(\xi + \varrho\mu(\xi))|^p d\sigma \leq C\, \varrho^{p-1} \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx \ . \tag{9.3}$$

Supponiamo di avere una successione $\{u_n\}$ limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, diciamo $\|u_n\|_{1,p} \leq L$. Per ogni m, n interi e per ogni $0 < \varrho \leq \varrho_0$ possiamo scrivere

$$\int_\Sigma |U_m - U_n|^p d\sigma \leq 3^{p-1} \int_\Sigma |U_m(\xi) - u_m(\xi + \varrho\mu(\xi))|^p d\sigma +$$
$$3^{p-1} \int_\Sigma |u_m(\xi + \varrho\mu(\xi)) - u_n(\xi + \varrho\mu(\xi))|^p d\sigma + 3^{p-1} \int_\Sigma |U_n(\xi) - u_n(\xi + \varrho\mu(\xi))|^p d\sigma$$

da cui, applicando la (9.3),

$$\int_\Sigma |U_m - U_n|^p d\sigma \leq 3^{p-1} 2\, C\, \varrho^{p-1}\, L + 3^{p-1} \int_\Sigma |u_m(\xi + \varrho\mu(\xi)) - u_n(\xi + \varrho\mu(\xi))|^p d\sigma \ .$$

Integrando questa disuguaglianza tra 0 e un $\overline{\varrho} \leq \varrho_0$, ricordando la (9.2), troviamo

$$\overline{\varrho} \int_\Sigma |U_m - U_n|^p d\sigma \leq C_1 \overline{\varrho}^p + 3^{p-1} \int_0^{\overline{\varrho}} d\varrho \int_\Sigma |u_m(\xi + \varrho\mu(\xi)) - u_n(\xi + \varrho\mu(\xi))|^p d\sigma \leq$$
$$C_1 \overline{\varrho}^p + C_2 \int_\Omega |u_m - u_n|^p dx$$

ossia

$$\int_\Sigma |U_m - U_n|^p d\sigma \le C_1 \overline{\varrho}^{p-1} + \frac{C_2}{\overline{\varrho}} \int_\Omega |u_m - u_n|^p dx \ . \tag{9.4}$$

Dato un $\varepsilon > 0$, fissiamo un $\overline{\varrho} < \varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$. Essendo, per il teorema XL, l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ compatta, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente in $L^p(\Omega)$. Esiste allora un k_ε tale che, per ogni $k > k_\varepsilon$ e per ogni $s > 0$, risulta

$$\int_\Omega |u_{n_{k+s}} - u_{n_k}|^p dx < \overline{\varrho}^p.$$

Dalla (9.4) si trova

$$\int_\Sigma |U_{n_{k+s}} - U_{n_k}|^p d\sigma \le C_1 \overline{\varrho}^{p-1} + \frac{C_2}{\overline{\varrho}} \ \overline{\varrho}^p < (C_1 + C_2) \ \varepsilon$$

per ogni $k > k_\varepsilon$ e per ogni $s > 0$. La successione $\{u_{n_k}\}$ è dunque di Cauchy in $L^p(\Sigma)$, ossia la tesi.

Per il caso $p = 1$, si veda l'esempio 7) della prossima § .

10. Alcuni controesempi.

1) Il primo esempio mostra che gli spazi $\widehat{H}^{k,p}(\Omega)$ e $H^{k,p}(\Omega)$, in generale, non coincidono. Prendiamo come aperto la "corona tagliata" $\Omega = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 1 < \varrho < 2, -\pi < \vartheta < \pi\}$, dove ϱ, ϑ indicano le usuali coordinate polari. Sia $v(x, y) = \arg(x+iy)$; essendo $|v(x, y)| \le \pi$ e [(10)]

$$v_x(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad v_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

risulta $v \in W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $1 \le p < \infty$. Infatti queste derivate sono classiche in Ω e quindi deboli; inoltre la v, essendo limitata, appartiene a tutti gli L^p. Lo stesso accade alle derivate prime, dato che:

$$|v_x(x, y)|, |v_y(x, y)| \le \frac{1}{\varrho} < 1 \quad \text{in } \Omega.$$

Supponiamo, per assurdo, $v \in \widehat{H}^{1,p}(\Omega)$; esiste allora una successione $\{v_n\} \subset C^1(\overline{\Omega})$ tale che

$$\|v_n - v\|_{1,p} \to 0.$$

[(10)] Per calcolare rapidamente le derivate, basta osservare che la v non è altro che il coefficiente immaginario della funzione olomorfa $\log z$ e quindi si ha $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$, dove $u(x, y) = \log |z|$.

Notiamo che $\overline{\Omega} = \overline{C}$, dove C è la corona circolare non più "tagliata" $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \varrho < 2,\ -\pi \le \vartheta \le \pi\}$.

Possiamo quindi scrivere

$$\int_C v_n \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dxdy = -\int_C \frac{\partial v_n}{\partial y}\, \varphi \, dxdy \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(C)$$

da cui, passando al limite:

$$\int_C v\, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dxdy = -\int_C \frac{\partial v}{\partial y}\, \varphi\, dxdy \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(C)\,. \tag{10.1}$$

Come funzione test, prendiamo $\varphi(x,y) = \psi(\varrho)$, con $\psi \in \mathring{C}^\infty((1,2))$ tale che

$$\int_1^2 \psi(\varrho)\, d\varrho \neq 0\,.$$

Tenendo presente che [11]$\varphi_y = \psi'(\varrho) \sin\vartheta$, risulta

$$\int_C v\, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dxdy = \int_1^2 \psi'(\varrho)\, \varrho\, d\varrho \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta\, \sin\vartheta\, d\vartheta = -2\,\pi \int_1^2 \psi(\varrho)\, d\varrho \neq 0$$

mentre

$$\int_C \frac{\partial v}{\partial y}\, \varphi\, dxdy = \int_1^2 \varrho\, d\varrho \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varrho \cos\vartheta}{\varrho^2}\, \psi(\varrho)\, d\vartheta = \int_1^2 \psi(\varrho)\, d\varrho \int_{-\pi}^{\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta = 0$$

e quindi la (10.1) è falsa. Ciò mostra che $v \notin \widehat{H}^{1,p}(\Omega)$.

2) Mostriamo ora che su domini non abbastanza regolari i teoremi di immersione non sussistono. Sia $n = 2$ e $\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < x^4\}$. La funzione

$$u(x,y) = \frac{1}{x}$$

appartiene a $W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$ ma non a $L^6(\Omega)$ (si noti che se $p = \frac{3}{2}$, allora $p^* = \frac{2p}{2-p} = 6$).

Infatti la u ammette derivate prime classiche in tutto Ω e si ha

$$\int_\Omega |u|^{\frac{3}{2}} dxdy = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx \int_0^{x^4} dy = \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx < +\infty$$

$$\int_\Omega |u_x|^{\frac{3}{2}} dxdy = \int_0^1 \frac{1}{x^3}\, dx \int_0^{x^4} dy = \int_0^1 x\, dx < +\infty$$

$$\int_\Omega |u_y|^{\frac{3}{2}} dxdy = 0$$

---

(11) Dall'essere $x = \varrho\cos\vartheta$; $y = \varrho\sin\vartheta$, segue che $f_\varrho = f_x \cos\vartheta + f_y \sin\vartheta$; $f_\vartheta = -f_x \varrho \sin\vartheta + f_y \varrho\cos\vartheta$, da cui si ricava $f_x = f_\varrho \cos\vartheta - \frac{f_\vartheta}{\varrho}\sin\vartheta$; $f_y = f_\varrho \sin\vartheta + \frac{f_\vartheta}{\varrho}\cos\vartheta$.

e quindi $u \in W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$. D'altra parte

$$\int_\Omega |u|^6 dxdy = \int_0^1 \frac{1}{x^6}\ dx \int_0^{x^4} dy = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\ dx = +\infty$$

ossia $u \notin L^6(\Omega)$.

Si noti che abbiamo anche ottenuto che per questo aperto Ω non esiste alcun operatore di prolungamento. Infatti, se così fosse, dovrebbero sussistere i teoremi di immersione.

3) Il prossimo esempio mostra che l'esponente p^* nel teorema di immersione XXXII è ottimale. Sia $n = 2$ e $\Omega = B_{\frac{1}{e}}(0)$. La funzione

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{|x|\ \log^2 |x|}$$

appartiene a $W^{1,1}(\Omega)$ e quindi a $L^2(\Omega)$ (si noti che in questo caso $p^* = \frac{2p}{2-p} = 2$), ma non appartiene a nessun $L^s(\Omega)$ per $s > 2$.

Infatti, introducendo le solite coordinate polari ed osservando che, se la u non dipende da ϑ, allora

$$\begin{cases} u_x = u_\varrho \cos\vartheta \\ u_y = u_\varrho \sin\vartheta \end{cases}$$

e quindi $|\operatorname{grad} u|^2 = u_\varrho^2$, possiamo scrivere

$$\int_\Omega |u|\, dx = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\varrho\, d\varrho}{\varrho \log^2 \varrho} = 2\pi \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{d\varrho}{\log^2 \varrho} < +\infty$$

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|\, dx = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{e}} |u_\varrho|\ \varrho\, d\varrho = 2\pi \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{\varrho^2 \log^4 \varrho} |\log^2 \varrho + 2\log\varrho|\, \varrho\, d\varrho \leq$$

$$2\pi \int_0^{\frac{1}{e}} \left(\frac{1}{\varrho \log^2 \varrho} + \frac{2}{\varrho\, |\log^3 \varrho|} \right) d\varrho = 2\pi \int_{-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{|t|^3} \right) dt < +\infty$$

e quindi $u \in W^{1,1}(\Omega)$ (12). D'altra parte

$$\int_\Omega |u|^p dx = 2\pi \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{\varrho^{p-1} |\log \varrho|^{2p}}\ d\varrho < +\infty \iff p \leq 2$$

(12) In effetti, essendo la u derivabile soltanto in $\Omega - \{0\}$ occorre dimostrare che le u_{x_h} (ottenute derivando in $\Omega - \{0\}$) sono effettivamente le derivate deboli in Ω. Ciò si può ottenere nel modo seguente: per ogni $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ si ha

$$\int_{\Omega - B_\varepsilon(0)} u(x)\, \varphi_{x_h}(x)\, dx = -\int_{\Omega - B_\varepsilon(0)} u_{x_h}(x)\, \varphi(x)\, dx + \int_{|x|=\varepsilon} u(x)\, \varphi(x)\, \nu_h d\sigma$$

(dimostrarlo !) e quindi l'esponente dato dal teorema di immersione $p^* = 2$ è in effetti il migliore possibile.

4) L'esempio seguente mostra che se $u \in W^{1,n}(\Omega)$, pur essendo $u \in L^s(\Omega)$ per ogni $s \geq n$, u non appartiene, in generale, a $L^\infty(\Omega)$. Sia, come nell'esempio precedente, $n = 2$ e $\Omega = B_{\frac{1}{e}}(0)$. La funzione

$$u(x_1, x_2) = \log \big| \log |x| \big|$$

appartiene a $W^{1,2}(\Omega)$. Infatti

$$\int_\Omega |u|^2 dx = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{e}} \log^2 \big| \log \varrho \big| \; \varrho \, d\varrho < +\infty$$

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{e}} |u_\varrho|^2 \; \varrho \, d\varrho = 2\pi \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{d\varrho}{\varrho \log^2 \varrho} < +\infty \, .$$

Quindi $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (13), ma non appartiene, evidentemente, a $L^\infty(\Omega)$.

5) Se Ω non è propriamente regolare il teorema di traccia può essere falso. Sia $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq x^4\}$ e $u(x, y) = \frac{1}{x}$. Risulta $u \in C^{1,2}(\Omega)$ dato che

$$\int_\Omega u^2(x, y) \, dxdy = \int_0^1 \frac{1}{x^2} \, dx \int_0^{x^4} dy = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3};$$

$$\int_\Omega u_x^2(x, y) \, dxdy = \int_0^1 \frac{1}{x^4} \, dx \int_0^{x^4} dy = \int_0^1 dx = 1; \; \int_\Omega u_y^2(x, y) \, dxdy = 0 \; .$$

Ma la traccia non appartiene neanche a $L^1(\partial\Omega)$, dato che $U = \frac{1}{x}$ su $\{(x, 0) \mid 0 < x \leq 1\}$.

6) Il presente esempio mostra che l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^{p^*}(\Omega)$ non è compatta, anche se il campo è molto regolare. Consideriamo $\Omega = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ e la successione (in coordinate polari)

$$u_n(\varrho, \vartheta) \begin{cases} = 2^n \varrho^{2^n} \sin(2^n \vartheta) & \text{per } \xi_n < \vartheta < \xi_{n+1}; \\ = 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{10.2}$$

(per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo) ed essendo

$$\left| \int_{|x|=\varepsilon} u(x) \, \varphi(x) \, \nu_h d\sigma \right| = \frac{1}{\varepsilon \, \log^2 \varepsilon} \; \left| \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) \, \nu_h d\sigma \right| \leq \frac{1}{\log^2 \varepsilon} \; \|\varphi\|_\infty 2\pi \to 0 \quad (\varepsilon \to 0^+),$$

si ottiene

$$\int_\Omega u(x) \, \varphi_{x_h}(x) \, dx = - \int_\Omega u_{x_h}(x) \, \varphi(x) \, dx \qquad \forall \; \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$$

ossia la tesi.

(13) Vale un ragionamento analogo a quello svolto nella nota precedente.

dove

$$\xi_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\,\pi$$

Si noti che la successione $\{\xi_n\}$ è monotona crescente e tende a π; quindi

$$[0,\pi] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\xi_n, \xi_{n+1}]$$

essendo gli intervalli a due a due privi di punti interni in comune.

Verifichiamo che la successione $\{u_n\}$ è limitata in norma nello spazio $W^{1,1}(\Omega)$. Si ha

$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} = 2^n \int_0^1 \varrho^{2^n}\,\varrho\,d\varrho \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} |\sin(2^n\vartheta)|\,d\vartheta = \frac{2}{2^n+2}$$

dato che, mediante la sostituzione $t = 2^n\vartheta$, si trova

$$\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} |\sin(2^n\vartheta)|\,d\vartheta = \frac{1}{2^n}\int_{(2^n-2)\pi}^{(2^n-1)\pi} |\sin t|\,dt = \frac{1}{2^n}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{2}{2^n}. \tag{10.3}$$

Inoltre

$$\|(u_n)_\varrho\|_{L^1(\Omega)} = (2^n)^2 \int_0^1 \varrho^{2^n-1}\,\varrho\,d\varrho \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} |\sin(2^n\vartheta)|\,d\vartheta = 2\,\frac{2^n}{2^n+1} < 2.$$

Essendo poi per le funzioni in esame, come si riconosce immediatamente,

$$\frac{1}{\varrho}(u_n)_\vartheta = (u_n)_\varrho$$

e ricordando che

$$|\operatorname{grad} u|^2 = u_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}u_\vartheta^2$$

si ha

$$|\operatorname{grad} u_n|^2 = 2\;|(u_n)_\varrho|^2 \implies \|\operatorname{grad} u_n\|_{L^1(\Omega)} = \sqrt{2}\;\|(u_n)_\varrho\|_{L^1(\Omega)} < 2\sqrt{2}$$

e quindi la successione è limitata in $W^{1,1}(\Omega)$.

Consideriamo adesso la norma $L^2(\Omega)$:

$$\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} = (2^n)^2 \int_0^1 (\varrho^{2^n})^2\varrho\,d\varrho \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \sin^2(2^n\vartheta)\,d\vartheta = 2^{2n}\frac{1}{2\,(2^n+1)}\;\frac{\pi}{2^{n+1}} \tag{10.4}$$

dato che

$$\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \sin^2(2^n\vartheta)\,d\vartheta = \frac{1}{2^n}\int_{(2^n-2)\pi}^{(2^n-1)\pi} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2^n}\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt =$$
$$\frac{1}{2^n}\left[\frac{t-\sin t\cos\tau}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2^{n+1}}\ .$$

Supponiamo l'immersione di $W^{1,1}(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ compatta. Esiste allora una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente in norma L^2 ad una funzione u_0. Inoltre è evidente dalla definizione che $u_n \to 0$ puntualmente e quindi deve essere $u_0 = 0$.

D'altra parte la (10.4) mostra che

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

e quindi abbiamo l'assurdo

$$0 = \|u_0\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$

7) L'esempio 6) mostra anche che l'operatore di traccia non è compatto da $W^{1,1}(\Omega)$ in $L^1(\partial\Omega)$ anche per aperti regolare. Sappiamo già che la successione (10.2) è limitata in $W^{1,1}(\Omega)$. Consideriamo la norma L^1 delle tracce:

$$\|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)} = 2^n \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} |\sin(2^n\vartheta)|\, d\vartheta = 2 \tag{10.5}$$

(cfr. la (10.3)).

Se l'operatore di traccia fosse compatto, dovrebbe esistere una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente in $L^1(\partial\Omega)$ ad una certa u_0. Essendo, però, $u_n \to 0$ puntualmente sulla $\partial\Omega$, deve essere $u_0 = 0$ e questo contraddice la (10.5), dato che dovremmo avere

$$0 = \|u_0\|_{L^1(\partial\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_{L^1(\partial\Omega)} = 2 \ .$$

8) Il prossimo esempio è dovuto ad Hadamard. Esso fornisce l'esempio di una funzione continua che non appartiene allo spazio $W^{\frac{1}{2}}$.

Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ e consideriamo sulla circonferenza $\partial\Omega$ la funzione

$$f(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos(2^{2k}\vartheta) \ .$$

È ovvio che, essendo la serie totalmente convergente in $[0, 2\pi]$, la funzione f risulta continua. Introdotte le solite coordinate polari, consideriamo i polinomi armonici [14]

$$v_k = \frac{1}{2^k\sqrt{\pi}}\, \varrho^{2^{2k}} \cos(2^{2k}\vartheta).$$

[14] Che tali funzioni siano polinomi armonici segue dal fatto che, per ogni intero m, si ha $z^m = \varrho^m(\cos m\vartheta + i \sin m\vartheta)$ e quindi $\varrho^m \cos m\vartheta$, non essendo altro che la parte reale di z^m, è un polinomio armonico.

Si ha

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} v_h \cdot \operatorname{grad} v_k dx = \delta_{hk}; \tag{10.6}$$

infatti, per le formule di Green, risulta

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} v_h \cdot \operatorname{grad} v_k dx = \int_{\Sigma} v_h \frac{\partial v_k}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\Omega} v_h \Delta_2 v_k dx =$$
$$\frac{1}{2^h\sqrt{\pi}} \, \frac{2^{2k}}{2^k\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos(2^{2h}\vartheta)\, \cos(2^{2k}\vartheta)\, d\vartheta = \frac{2^k}{2^h\pi}\delta_{hk}\pi = \delta_{hk}$$

dato che, come si verifica subito,

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\vartheta)\, \cos(n\vartheta)\, d\vartheta = \delta_{mn}\pi \ .$$

Supponiamo che esista una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tale che $\tau u = f$ su Σ. Ovviamente si ha

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx < \infty \tag{10.7}$$

Poniamo

$$a_k = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v_k \, dx \, .$$

Tenendo presente la relazione di ortogonalità (10.6) si ottiene

$$0 \leq \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u - \sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{grad} v_k|^2 dx = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx - \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

ossia

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx \, . \tag{10.8}$$

Calcoliamoci ora gli a_k; utilizzando ancora la formula di Green (vedi il teorema XXXVIII), si ha

$$a_k = \int_{\Sigma} U \frac{\partial v_k}{\partial \nu} d\sigma = \frac{2^{2k}}{2^k\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, \cos(2^{2k}\vartheta)\, d\vartheta$$

e, tenendo presente che la serie che definisce la f converge totalmente in $[0, 2\pi]$ e che quindi possiamo integrare per serie:

$$a_k = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{2^h} \cos(2^{2h}\vartheta)\, \cos(2^{2k}\vartheta)\, d\vartheta =$$
$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^h\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos(2^{2h}\vartheta)\, \cos(2^{2k}\vartheta)\, d\vartheta = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^h\sqrt{\pi}}\, \delta_{hk}\pi = \sqrt{\pi}.$$

La (10.8) si scrive allora
$$n\pi \leq \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx$$
che, dovendo sussistere per ogni intero n, porta ad un assurdo non appena la si confronti con la (10.7). Si è così dimostrato che non esiste alcuna $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tale che $\tau u = f$ su Σ.

9) Dato che l'esempio 8) mostra che C^0 non è contenuto in $W^{\frac{1}{2}}$, è opportuno dare anche un esempio (ben più facile di quello di Hadamard !) di una funzione di $W^{\frac{1}{2}}$ che non è continua.

Sia Ω il disco unitario $\{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ e consideriamo sulla circonferenza $\partial\Omega$ la funzione
$$f(\vartheta) = \log\left[\log\left(\frac{5}{2-2\cos\vartheta}\right)\right] \,.$$

Considerando $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$, abbiamo $0 \leq 2-2\cos\vartheta \leq 4$. Si ha, quindi, per $\vartheta \neq 0$,
$$\frac{5}{2-2\cos\vartheta} \geq \frac{5}{4} \quad \Longrightarrow \quad \log\left(\frac{5}{2-2\cos\vartheta}\right) > 0$$
e la funzione f risulta definita e continua in $\partial\Omega - \{(1,0)\}$. E' anche chiaro che quando il punto $\{(x,y)\}$ su $\partial\Omega$ tende a $\{(1,0)\}$ (ossia $\vartheta \to 0$), la funzione f diverge positivamente, e dunque f non è continua su $\partial\Omega$.

Sia ora
$$u(x,y) = \log\left[\log\left(\frac{5}{(x-1)^2+y^2}\right)\right] \,.$$

Essendo $(x-1)^2+y^2 = 1+\varrho^2-2\varrho\cos\vartheta \leq 4$ in Ω, la funzione u risulta $C^\infty(\Omega)$. Inoltre la funzione u^2 è sommabile in Ω (verificarlo!). Per quanto riguarda le derivate, abbiamo
$$u_x(x,y) = -\frac{1}{\log\left(\frac{5}{(x-1)^2+y^2}\right)}\,\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2},$$
$$u_y(x,y) = -\frac{1}{\log\left(\frac{5}{(x-1)^2+y^2}\right)}\,\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$
e queste risultano di quadrato sommabile in Ω. Per convicersi di questo, basta osservare che sono continue per $(x,y) \neq (1,0)$ e che i loro quadrati sono sommabili in un disco centrato nel punto $(1,0)$. Infatti, considerato un disco D di centro $(1,0)$ e raggio $\delta < 1$, abbiamo
$$\int_D |u_x|^2 dxdy = 4\int_0^\delta \frac{\varrho d\varrho}{\varrho^2\log^2(5/\varrho^2)}\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\, d\vartheta = 4\pi\int_0^\delta \frac{d\varrho}{\varrho\log^2(5/\varrho^2)} =$$
$$2\pi\int_{\log(5/\delta^2)}^{+\infty}\frac{dt}{t^2} < +\infty$$

(nell'ultimo passaggio si è posto $t = \log(5/\varrho^2)$). Analogamente si prova che $|u_y|^2$ è sommabile.

Abbiamo dimostrato che u appartiene a $C^{1,2}(\Omega)$ e dunque $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Essendo la u continua in tutto $\overline{\Omega}$ tranne il punto $(1,0)$, la traccia di u si ottiene semplicemente considerando $u(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. E' immediato riconoscere che $u(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = f(\vartheta)$. Abbiamo dunque che $f \in W^{\frac{1}{2}}$ ma non è continua.

11. Appendice.

Sia $K \subset I\!R^n$ un compatto e sia T il seguente operatore integrale

$$T\varphi(x) = \int_K \varphi(y)\, H(x,y)\, dy \tag{11.1}$$

dove $H(x,y)$ è un nucleo continuo sul prodotto cartesiano $K \times K$ privato della diagonale $\{(x,y) \in K \times K \mid x = y\}$ e tale che esiste una costante H_0 tale che

$$|H(x,y)| \leq \frac{H_0}{|x-y|^\lambda} \tag{11.2}$$

dove $0 < \lambda < n$. La disuguaglianza (11.2) si esprime dicendo che il nucleo $H(x,y)$ presenta una *singolarità debole.*

XLIII. *Sia $0 \leq \lambda < n$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni insieme misurabile $E \subset I\!R^n$ con $|E| < \delta_\varepsilon$ risulta*

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^\lambda} < \varepsilon \qquad \forall\, x \in I\!R^n.$$

Per ogni $R > 0$ fissato si ha

$$\begin{aligned} &\int_E \frac{dy}{|x-y|^\lambda} = \int_{E\cap B_R(x)} \frac{dy}{|x-y|^\lambda} + \int_{E-B_R(x)} \frac{dy}{|x-y|^\lambda} \leq \\ &\int_{B_R(x)} \frac{dy}{|x-y|^\lambda} + \int_{E-B_R(x)} \frac{dy}{R^\lambda} \leq \int_{B_R(x)} \frac{dy}{|x-y|^\lambda} + \frac{|E|}{R^\lambda}\,. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Scegliamo ora R in modo tale che

$$\int_{B_R(x)} \frac{dy}{|x-y|^\lambda} = \omega_n \int_0^R \frac{1}{\varrho^\lambda}\, \varrho^{n-1} d\varrho = \omega_n\, \frac{R^{n-\lambda}}{n-\lambda} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11.4}$$

e poniamo

$$\delta_\varepsilon = R^\lambda\, \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Allora, se $|E| < \delta_\varepsilon$, ricordando la (11.3), risulta

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^\lambda} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|E|}{R^\lambda} < \varepsilon$$

ossia la tesi.

XLIV. *Sia $H(x,y)$ un nucleo con singolarità debole (11.2) e sia T l'operatore integrale (11.1). Posto*

$$\gamma(A) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_A \frac{dy}{|x-y|^\lambda}$$

risulta

$$\|T\varphi\|_{L^p(A)} \le H_0\, [\gamma(A)]^{\frac{1}{p}}\, [\gamma(K)]^{\frac{1}{q}}\, \|\varphi\|_{L^p(K)}\ . \tag{11.5}$$

Per la disuguaglianza di Hölder possiamo scrivere

$$|T\varphi(x)| \le H_0 \int_K \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^\lambda}\, dy = H_0 \int_K \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^{\frac{\lambda}{p}+\frac{\lambda}{q}}}\, dy \le$$

$$H_0 \left(\int_K \frac{|\varphi(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_K \frac{dy}{|x-y|^\lambda}\right)^{\frac{1}{q}} \le H_0\, [\gamma(K)]^{\frac{1}{q}} \left(\int_K \frac{|\varphi(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\, dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

da cui, ricordando il teorema di Tonelli,

$$\int_A |T\varphi(x)|^p\, dx \le H_0^p\, [\gamma(K)]^{\frac{p}{q}} \int_A dx \int_K \frac{|\varphi(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\, dy =$$

$$H_0^p\, [\gamma(K)]^{\frac{p}{q}} \int_K |\varphi(y)|^p\, dy \int_A \frac{dx}{|x-y|^\lambda}\, dx \le H_0^p\, [\gamma(K)]^{\frac{p}{q}}\, \gamma(A) \int_K |\varphi(y)|^p\, dy$$

ossia la tesi.

XLV. *Sia $H(x,y)$ un nucleo con singolarità debole (11.2) e sia T l'operatore integrale (11.1). T risulta lineare, continuo ($p \ge 1$) e compatto da $L^p(K)$ in sé stesso ($p > 1$).*

La linearità è ovvia. La continuità segue subito dalla (11.5), prendendo $A = K$.

Dimostriamo ora la compattezza. Facciamo vedere dapprima che se $\{\varphi_n\}$ è una successione convergente debolmente a 0 in $L^p(K)$, $\varphi_n \rightharpoonup 0$, allora $T\varphi_n \to 0$ in norma.

Sia B_x una palla di raggio $r > 0$ e di centro x e indichiamo con χ_{B_x} la sua funzione caratteristica. Possiamo scrivere

$$T\varphi_n(x) = \int_K \varphi_n(y)\, \chi_{B_x}(y)\, H(x,y)\, dy + \int_K \varphi_n(y)\, [1 - \chi_{B_x}(y)]\, H(x,y)\, dy.$$

Dato che, per ogni fissato x, la funzione $[1 - \chi_{B_x}(y)]\, H(x,y)$ è continua (e quindi in $L^q(K)$) ed essendo $\varphi_n \rightharpoonup 0$, abbiamo

$$\int_K \varphi_n(y)\, [1 - \chi_{B_x}(y)]\, H(x,y)\, dy \to 0\ . \tag{11.6}$$

Il lemma precedente applicato al nucleo $\widetilde{H}(x,y) = [1 - \chi_{B_x}(y)]\, H(x,y)$ mostra che

$$\left(\int_A |\ T_1\varphi_n\ |^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le 2\, H_0\, [\gamma(A)]^{\frac{1}{p}}\, [\gamma(K)]^{\frac{1}{q}}\, \|\varphi_n\|_{L^p(K)}$$

(dove T_1 indica l'operatore integrale il cui nucleo è $\widetilde{H}(x,y)$). Essendo la successione $\{\varphi_n\}$ limitata in norma, per il lemma XLIII esiste un δ_ε tale che

$$\int_A |\ T_1\varphi_n\ |^p dx < \varepsilon$$

per ogni insieme misurabile A tale che $|A| < \delta_\varepsilon$. Ciò mostra che la successione $\{|\ T_1\varphi_n\ |^p\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui. Essendo per la (11.6) $|\ T_1\varphi_n\ |^p \to 0$ puntualmente ed essendo la misura di K finita, il teorema di Vitali permette di concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_K |\ T_1\varphi_n\ |^p dx = 0 \tag{11.7}$$

ossia che $T_1\varphi_n \to 0$ in norma.

D'altra parte (cfr. la (11.4))

$$\left|\int_K \varphi_n(y)\,\chi_{B_x}(y)\,H(x,y)\,dy\right| \le H_0 \int_{B_x} \frac{|\varphi_n(y)|}{|x-y|^\lambda}\,dy \le$$

$$H_0 \left(\int_{B_x} \frac{|\varphi_n(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_x} \frac{dy}{|x-y|^\lambda}\right)^{\frac{1}{q}} = H_0\ \omega_n \left(\frac{r^{n-\lambda}}{n-\lambda}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_x} \frac{|\varphi_n(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\varepsilon \left(\int_K \frac{|\varphi_n(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

per un r abbastanza piccolo. Ragionando come nel lemma precedente, si trova

$$\|T_2\varphi_n\|_{L^p(K)} \le \varepsilon\ [\gamma(K)]^{\frac{1}{q}}\ \|\varphi_n\|_{L^p(K)} \le C\ \varepsilon$$

dove C è una costante tale che

$$[\gamma(K)]^{\frac{1}{q}}\ \|\varphi_n\|_{L^p(K)} \le C$$

e con T_2 abbiamo indicato l'operatore integrale

$$T_2\varphi_n(x) = \int_K \varphi_n(y)\,\chi_{B_x}(y)\,H(x,y)\,dy\ .$$

Essendo $T = T_1 + T_2$, ricordando la (11.7), abbiamo quindi

$$\limsup_{n\to\infty} \|T\varphi_n\|_{L^p(K)} \le C\ \varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue che $T\varphi_n \to 0$ in norma.

Sia ora $\{\varphi_n\}$ una qualsiasi successione limitata in norma. Esiste una sottosuccessione $\{\varphi_{n_k}\}$ debolmente convergente, diciamo $\varphi_{n_k} \rightharpoonup \varphi$. Allora la successione $\{\varphi_{n_k} - \varphi\}$ tende debolmente a 0 e quindi, per quanto appena dimostrato, risulta $T(\varphi_{n_k} - \varphi) \to 0$ in norma, ossia $T\varphi_{n_k} \to T\varphi$.

Bibliografia.

Per ulteriori approfondimenti e per applicazioni della teoria degli Spazi di Sobolev allo studio delle Equazioni alle Derivate Parziali, segnaliamo i seguenti testi:

R. A. Adams, *Sobolev spaces*, New York, Academic Press, 1975.

S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Princeton, N.J., Van Nostrand, 1965.

H. Brezis, *Analisi funzionale: teoria e applicazioni*, Napoli, Liguori, 1986.

G. Fichera, *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equzioni differenziali*, (Corso I.N.D.A.M), Roma, Veschi, 1958.

G. Fichera, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Lecture notes in mathematics, 8, Berlin, Springer, 1965.

V. G. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Berlin–New York, Springer–Verlag, 1985.

W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation*, Graduate texts in mathematics, 120, New York, Springer–Verlag, 1989.

Indice.