Sulle funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ a traccia nulla

Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo che il $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}$, essendo Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Possiamo approssimare u con una successione di funzioni $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ il cui supporto è contenuto in Ω ? In altri termini, possiamo dire che la u ristretta ad Ω appartiene a $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$?

È noto che se consideriamo le regolarizzate della u

$$R_\varepsilon u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_e(x-y)\, u(y)\, dy\,, \tag{1}$$

queste convergono a u nella norma di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, ma il loro supporto sarà contenuto in Ω_ε.

La possibilità di approssimare la u con funzioni il cui supporto è contenuto in Ω è più delicata e dipende dalla regolarità della $\partial\Omega$. Il prossimo teorema fornisce una classe abbastanza ampia di aperti per i quali la risposta domanda posta all'inizio del paragrafo è affermativa. Per semplicità ci limiteremo a considerare il caso di aperti limitati.

Premettiamo una definizione: l'aperto limitato Ω verifica *la proprietà ristretta di cono* se:

1. esiste un numero finito di aperti N_k $(k = 1, \dots, m)$ tali che
$$\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{m} N_k\ ;$$
2. per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$ esistono un vettore ξ_k con $|\xi_k| = 1$ e un numero $h_k > 0$ tali che il cono
$$x + C_k = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = x + \varrho\, \xi,\ 0 < \varrho < h_k,\ |\xi - \xi_k| < h_k,\ |\xi| = 1\}$$
è contenuto in Ω per ogni $x \in N_k \cap \overline{\Omega}$.

1 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato che verifica la proprietà ristretta di cono. Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che* $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}$*. Esiste allora una successione di funzioni $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ a supporto (compatto) contenuto in Ω e convergente a u nella norma di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

DIM. Sia N_0 un aperto tale che $N_0 \subset\subset \Omega$ e

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^{m} N_k \ .$$

Sia ϑ_k $(k = 0, 1, \dots, m)$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento N_k. Questo significa che $\vartheta_k \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \vartheta_k \subset N_k$, $0 \leqslant \vartheta_k \leqslant 1$ e

$$\sum_{k=0}^{m} \vartheta_k(x) = 1 \qquad \forall\ x \in \overline{\Omega}.$$

L'esistenza della partizione dell'unità è ben nota e può essere trovata in vari testi (cfr. ad es., A. CIALDEA, Appunti sugli Spazi di Sobolev, USB)

Poniamo $u_k = \vartheta_k u$. La funzione u_k appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e il suo supporto è contenuto in $N_k \cap \overline{\Omega}$. Inoltre

$$u = u \sum_{k=0}^{m} \vartheta_k = \sum_{k=0}^{m} u_k. \tag{2}$$

In virtù della formula (2), basterà dimostrare che ogni singola u_k può essere approssimata da funzioni di $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$.

Per quanto riguarda la u_0, essendo il suo supporto contenuto in N_0 e quindi in Ω,basta considerare le usuali regolarizzate $R_e u_0$ (cfr. la (1)).

Fissiamo ora un $k \in \{1, \dots, m\}$; sia j una funzione di classe $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tale che $j \geqslant 0$, il $\operatorname{supp} j$ è contenuto nell'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 < |x| < 2,\ |\xi_k - x/|x|\,| < h_k\}$$

e infine

$$\int_{\mathbb{R}^n} j(x)\, dx = 1.$$

Definiamo il mollifier

$$j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\, j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Osserviamo che

$$\operatorname{supp} j_\varepsilon \subset C_\varepsilon$$

dove

$$C_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon < |x| < 2\varepsilon,\ |\xi_k - x/|x|\,| < h_k\}$$

e consideriamo la regolarizzata

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\, u_k(y)\, dy\,.$$

Essendo $\operatorname{supp} u_k \subset N_k \cap \overline{\Omega}$, possiamo scrivere

$$u_\varepsilon(x) = \int_{N_k\cap\Omega} j_\varepsilon(x-y)\, u_k(y)\, dy\,. \tag{3}$$

Dato che

$$y \in N_k \cap \overline{\Omega},\ x \notin y + C_\varepsilon \ \Rightarrow\ j_\varepsilon(x-y) = 0$$

dalla (3) si trae

$$x \notin (N_k \cap \overline{\Omega}) + C_\varepsilon \ \Rightarrow\ u_\varepsilon(x) = 0.$$

In altri termini abbiamo dimostrato che

$$\operatorname{supp} u_\varepsilon \subset (N_k \cap \overline{\Omega}) + C_\varepsilon\,.$$

Essendo, ovviamente, $C_\varepsilon \subset C_k$ per $0 < \varepsilon < h_k/2$, abbiamo che, per questi ε, il $\operatorname{supp} u_\varepsilon$ è un compatto contenuto in Ω. Dalle solite proprietà dei mollifiers si deduce che u_ε tende a u nella norma di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e questo completa la dimostrazione [(1)]. □

Vediamo ora una conseguenza di questo risultato.

2 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ tale che $\overline{\Omega}$ sia un dominio regolare. Lo spazio $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ coincide con lo spazio delle funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ che hanno traccia nulla su $\partial\Omega$.*

DIM. È ovvio che le funzioni di $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$ ed hanno traccia nulla.

Viceversa, sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u = 0$ su $\partial\Omega$. Come prima cosa, mostriamo che la funzione $\widetilde{u}$ ottenuta prolungando a zero la u fuori di Ω, ossia

$$\widetilde{u}(x) \begin{cases} = u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

[(1)] L'idea di costruire le funzioni approssimanti considerando mollifiers con i supporti scelti come nel testo è presa dal Lemma 8 di BROWDER, F. E., Approximation by solutions of partial differential equations, *Amer. J. Math.*, 84, 1962, 134–160.

appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

È ovvio che $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, presa comunque una $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (non necessariamente a supporto compatto contenuto in Ω), abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u} \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \, dx = \int_\Omega u \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \, dx = -\int_\Omega \varphi \, \frac{\partial u}{\partial x_h} \, dx + \int_{\partial\Omega} u \, \varphi \, \nu_h \, d\sigma \, .$$

Essendo $u = 0$ su $\partial\Omega$, l'ultimo integrale è nullo e quindi possiamo scrivere

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u} \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_h}} \, dx \tag{4}$$

dove

$$\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_h}} \begin{cases} = \dfrac{\partial u}{\partial x_h} & \text{se } x \in \Omega \\ = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Questa funzione appartiene a $L^p(\mathbb{R}^n)$ e la (4) mostra, per l'arbitrarietà di $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, che la (5) è la derivata debole di u rispetto a x_h.

Per il Teorema precedente la funzione $\widetilde{u}$ può essere approssimata in norma da funzioni $\mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ il cui supporto è contenuto in Ω, ossia u appartiene a $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. □

Un Corollario interessante del Teorema 2 è il seguente teorema di unicità per il problema di Dirichlet in H^1.

3 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ tale che $\overline{\Omega}$ sia un dominio regolare. Sia u soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \Delta u = 0 & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \Sigma. \end{cases} \tag{6}$$

Risulta $u = 0$ in Ω.

Dim. Nell'enunciato del problema (6) l'equazione differenziale è da intendersi in senso debole, ossia

$$\int_\Omega u \, \Delta\varphi \, dx = 0, \quad \forall \, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega), \tag{7}$$

mentre la condizione al contorno $u = 0$ su Σ è nel senso delle tracce. Osserviamo che, in virtù del Lemma di Caccioppoli-Weyl, la u risulta di classe $C^2(\Omega)$.

In virtù del Teorema 2 la funzione u appartiene a $\mathring{H}^1(\Omega)$ e quindi esiste una successione di funzioni $\{\varphi_n\} \subset \mathring{C}^\infty(\Omega)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - u\|_{H^1(\Omega)} = 0\,.$$

Questo implica (si tenga presente la (7) !)

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi_n dx = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u\,\Delta\varphi_n dx = 0$$

e quindi $\nabla u = 0$ in Ω. Questo significa che la u è costante su ogni componente connessa di Ω ed essendo la sua traccia su Σ nulla, si deve avere $u = 0$. $\square$