Il teorema di Radon-Nikodym

1 (Radon-Nikodym) *Siano μ e ν due misure (positive) σ-finite definite sulla stessa σ-algebra $\mathscr{A}$ di insiemi di X. Supponiamo che ν sia assolutamente continua rispetto a μ, ossia $\nu << \mu$. Esiste una funzione μ-misurabile non negativa definita su X tale che*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu \tag{1}$$

per ogni insieme misurabile $E \in \mathscr{A}$. La funzione f è univocamente determinata a meno di insiemi di misura μ-nulla.

Dim. Supponiamo dapprima che μ e ν siano misure finite. Se $\nu = 0$ (ossia $\nu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathscr{A}$) la (1) è soddisfatta prendendo $f = 0$.

Supponiamo quindi $\nu \neq 0$. Dimostriamo che esiste una funzione f μ-misurabile non negativa tale che

$$\int_X f\, d\mu > 0, \qquad \int_E f\, d\mu \leqslant \nu(E),\ \forall\ E \in \mathscr{A}. \tag{2}$$

Fissiamo un $\lambda > 0$ e consideriamo la misura segnata $\nu - \lambda\mu$. Sia $X = P_\lambda \cup N_\lambda$ una decomposizione di Hahn di X relativa alla misura $\nu - \lambda\mu$, dove P_λ è un insieme positivo e N_λ negativo.

Dico che esiste un $\lambda_0 > 0$ tale che $\mu(P_{\lambda_0}) > 0$. Supponiamo che non sia vero, ossia che $\mu(P_\lambda) = 0$ per ogni $\lambda > 0$. Essendo $\nu << \mu$ abbiamo anche $\nu(P_\lambda) = 0$. Sia ora E un qualsiasi insieme misurabile. Essendo N_λ negativo per la misura $\nu - \lambda\mu$, abbiamo $\nu(E \cap N_\lambda) \leqslant \lambda\mu(E \cap N_\lambda)$, e quindi

$$\begin{gathered}\nu(E) = \nu(E \cap P_\lambda) + \nu(E \cap N_\lambda) = \nu(E \cap N_\lambda) \leqslant \\ \lambda\mu(E \cap N_\lambda) = \lambda(\mu(E \cap N_\lambda) + \mu(E \cap P_\lambda)) = \lambda\mu(E).\end{gathered}$$

Essendo $\mu(E) < +\infty$ e dovendo questa ultima relazione valere per ogni $\lambda > 0$, passando al limite per $\lambda \to 0^+$, troviamo $\nu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathscr{A}$, cosa che abbiamo escluso. L'assurdo è nato dal supporre $\mu(P_\lambda) = 0$ per ogni $\lambda > 0$. Esiste quindi un $\lambda_0 > 0$ tale che $\mu(P_{\lambda_0}) > 0$. Poniamo $f = \lambda_0 \chi_{P_{\lambda_0}}$. Risulta

$$\int_X f\, d\mu = \lambda_0\mu(P_{\lambda_0}) > 0, \quad \int_E f\, d\mu = \lambda_0\mu(E \cap P_{\lambda_0}) \leqslant \nu(E \cap P_{\lambda_0}) \leqslant \nu(E)$$

per ogni insieme $E \in \mathscr{A}$ (si ricordi che P_{λ_0} è un insieme positivo per la misura $\nu - \lambda_0\mu$) e dunque abbiamo mostrato l'esistenza di una f per la quale sussiste la (2).

Sia ora $\mathscr{F}$ la classe delle f μ-misurabili non negative che soddisfano la (2). Come abbiamo visto, la classe $\mathscr{F}$ è non vuota. Poniamo

$$M = \sup_{f \in \mathscr{F}} \int_X f \, d\mu. \tag{3}$$

Dimostriamo che M è un massimo, ossia che esiste una $f \in \mathscr{F}$ tale che

$$M = \int_X f \, d\mu. \tag{4}$$

Si noti che dalla (2) segue che, se $f \in \mathscr{F}$, allora

$$\int_X f \, d\mu \leqslant \nu(X) < +\infty$$

e quindi f è sommabile in X. Abbiamo anche che M deve essere finito, essendo (cfr. la (3))

$$M \leqslant \nu(X) < +\infty\,.$$

Osserviamo che se f e g appartengono a $\mathscr{F}$, allora anche la funzione $\max\{f, g\}$ vi appartiene. Infatti, preso un $E \in \mathscr{A}$ e posto $E_1 = \{x \in E \mid f(x) \leqslant g(x)\}$, $E_2 = \{x \in E \mid f(x) > g(x)\}$, abbiamo, ovviamente,

$$\int_X \max\{f, g\} d\mu \geqslant \int_X f \, d\mu > 0$$

e, per ogni $E \in \mathscr{A}$,

$$\int_E \max\{f, g\} d\mu = \int_{E_1} g \, d\mu + \int_{E_2} f \, d\mu \leqslant \nu(E_1) + \nu(E_2) = \nu(E).$$

Sia quindi φ_n una successione di funzioni di $\mathscr{F}$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu = M. \tag{5}$$

Poniamo $f_n = \max\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Per quanto appena dimostrato le f_n appartengono a $\mathscr{F}$. Poiché $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$, posto $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, il teorema della convergenza monotona permette di affermare che

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

ed essendo

$$\int_X \varphi_n d\mu \leqslant \int_X f_n d\mu \leqslant M$$

(l'ultima disuguaglianza vale perché $f_n \in \mathscr{F}$!), la (4) segue dalla (5).

Si noti che anche la funzione f appartiene alla classe $\mathscr{F}$. Infatti, dalla (4), abbiamo immediatamente che

$$\int_X f\, d\mu > 0,$$

e inoltre, applicando ancora il teorema della convergenza monotona,

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leqslant \nu(E),$$

per ogni $E \in \mathscr{A}$.

Vogliamo infine dimostrare che la f soddisfa la (1). Poniamo

$$\eta(E) = \nu(E) - \int_E f\, d\mu.$$

Questa misura segnata è evidentemente finita ed è di fatto una misura positiva, in virtù del fatto che $f \in \mathscr{F}$. Inoltre $\eta << \mu$. Dico che $\eta = 0$. Se così non fosse, infatti, potremmo ripetere il ragionamento fatto prima e concludere che esiste una funzione non negativa g tale che

$$\int_X g\, d\mu > 0, \qquad \int_E g\, d\mu \leqslant \eta(E),\ \forall\ E \in \mathscr{A}.$$

Ma l'ultima disuguaglianza si può scrivere come

$$\int_E g\, d\mu \leqslant \nu(E) - \int_E f\, d\mu,\ \forall\ E \in \mathscr{A}.$$

Abbiamo quindi

$$\int_X (f+g)\, d\mu > 0, \qquad \int_E (f+g) d\mu \leqslant \nu(E),\ \forall\ E \in \mathscr{A},$$

ossia $f + g \in \mathscr{F}$. Dovendo anche essere (si ricordi la (3) !)

$$M \geqslant \int_X (f+g)\, d\mu > \int_X f\, d\mu = M,$$

siamo pervenuti ad un assurdo. Deve quindi risultare $\eta = 0$ e questo significa che sussiste la (1).

Mostriamo ora che la f è determinata univocamente a meno di un insieme di misura nulla. Supponiamo esista un'altra $\hat{f}$ non negativa per la quale:

$$\nu(E) = \int_E \hat{f}\, d\mu, \qquad \forall\ E \in \mathscr{A}.$$

Dovremo avere

$$\int_E (f - \hat{f}) d\mu = 0, \qquad \forall\ E \in \mathscr{A}. \tag{6}$$

Si noti che, essendo $\nu(E) < \infty$, le funzioni f e $\hat{f}$ risultano sommabili, e quindi possiamo affermare che

$$\int_E (f - \hat{f}) d\mu = \int_E f\, d\mu - \int_E \hat{f}\, d\mu\,.$$

Sia $E_+ = \{x \in X \mid f(x) \leqslant \hat{f}(x)\}$. Scrivendo la (6) per l'insieme E_+ otteniamo che

$$\int_{E_+} (f - \hat{f}) d\mu = 0$$

da cui segue $f = \hat{f}$ q.o. in E_+. Analogamente $f = \hat{f}$ q.o. in E_-, essendo $E_- = \{x \in X \mid f(x) > \hat{f}(x)\}$, e dunque $f = \hat{f}$ q.o. in X. Questo conclude la dimostrazione nell'ipotesi $\mu(X) < \infty$, $\nu(X) < \infty$.

Supponiamo ora che le misure μ e ν siano σ-finite. Questo vuol dire che esistono degli insiemi misurabili A_j e B_i tali che

$$X = \bigcup_j A_j, \quad \mu(A_j) < \infty, \qquad X = \bigcup_i B_i, \quad \nu(B_i) < \infty.$$

Possiamo allora scrivere

$$X = \bigcup_{i,j} (A_j \cap B_i)$$

risultando $\mu(A_j \cap B_i) < \infty$, $\nu(A_j \cap B_i) < \infty$.

Questo mostra che X può scriversi come unione numerabile di insiemi che risultano di misura finita sia per la μ che per la ν. Per semplificare la notazione scriviamo

$$X = \bigcup_i X_i, \quad \mu(X_i) < \infty,\ \nu(X_i) < \infty.$$

Osserviamo anche che non è restrittivo supporre $X_i \cap X_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Per quanto abbiamo già dimostrato, per ogni j, esiste una funzione non negativa f_j μ-misurabile tale che

$$\nu(E) = \int_E f_j \, d\mu$$

per ogni insieme misurabile E contenuto in X_j. Poniamo $f(x) = f_j(x)$ per ogni $x \in X_j$. Essendo gli X_j disgiunti a due a due, questa definizione è ben posta. Per esercizio, si dimostri che questa funzione f (ovviamente non negativa) è μ-misurabile. Preso comunque un $E \in \mathscr{A}$, risulta (avendo indicato con χ_{X_j} la funzione caratteristica dell'insieme X_j)

$$\nu(E) = \nu\left(\bigcup_j (E \cap X_j)\right) = \sum_j \nu(E \cap X_j) = \sum_j \int_{E \cap X_j} f_j \, d\mu =$$
$$\sum_j \int_E f \, \chi_{X_j} \, d\mu = \int_E f \sum_j \chi_{X_j} \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

(si noti che possiamo integrare per serie per un corollario del teorema della convergenza monotona e che, essendo $X = \bigcup_j X_j$ con gli X_j disgiunti a due due, abbiamo

$$\sum_j \chi_{X_j}(x) = 1$$

per ogni $x \in X$). Infine l'unicità della f a meno di insiemi nulli, segue dal fatto che tale unicità sussiste su ciascun X_j per quanto dimostrato nella prima parte del teorema. $\square$