A. Cialdea

Appunti di teoria del potenziale

Corso di Analisi Superiore
A.A. 2001–02

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi della Basilicata

Appunti di teoria del potenziale

1 Sugli operatori integrali debolmente singolari

Sia $G \subset \mathbb{R}^n$ un compatto e sia T il seguente operatore integrale

$$T\varphi(x) = \int_G \varphi(y)\, H(x,y)\, dy \tag{1.1}$$

dove $H(x,y)$ è un nucleo continuo sul prodotto cartesiano $G \times G - \Delta$ [1] e tale che esiste una costante H_0 per cui

$$|H(x,y)| \leqslant \frac{H_0}{|x-y|^\lambda} \qquad \forall\ (x,y) \in G \times G - \Delta\ . \tag{1.2}$$

Quando sussiste la disuguaglianza (1.2) con $0 \leqslant \lambda < n$, si dice che il nucleo $H(x,y)$ presenta una *singolarità debole*. Il prossimo lemma dimostra che la famiglia di funzioni della y

$$\frac{1}{|x-y|^\lambda}$$

ha gli integrali uniformemente assolutamente continui al variare di $x \in \mathbb{R}^n$.

1 *Sia $0 \leqslant \lambda < n$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ con $|E| < \delta_\varepsilon$ risulta*

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^\lambda} < \varepsilon \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Per ogni $R > 0$ fissato si ha [2]

$$\begin{aligned} \int_E \frac{dy}{|x-y|^\lambda} = \int_{E\cap B_R(x)} \frac{dy}{|x-y|^\lambda} + \int_{E-B_R(x)} \frac{dy}{|x-y|^\lambda} \leqslant \\ \int_{B_R(x)} \frac{dy}{|x-y|^\lambda} + \int_{E-B_R(x)} \frac{dy}{R^\lambda} \leqslant \\ \omega_n \int_0^R \frac{1}{\varrho^\lambda}\, \varrho^{n-1} d\varrho + \frac{|E|}{R^\lambda} = \omega_n\, \frac{R^{n-\lambda}}{n-\lambda} + \frac{|E|}{R^\lambda}\ . \end{aligned} \tag{1.3}$$

[1] Con Δ indichiamo la diagonale $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x = y\}$.

[2] Con ω_n indichiamo la misura ipersuperficiale della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$.

Scegliamo ora R in modo tale che

$$\omega_n \frac{R^{n-\lambda}}{n-\lambda} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.4}$$

e poniamo

$$\delta_\varepsilon = R^\lambda \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Allora, se $|E| < \delta_\varepsilon$, in base alla (1.3), risulta

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^\lambda} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|E|}{R^\lambda} < \varepsilon$$

ossia la tesi.

Osservazione. La (1.3) mostra anche che, fissato $0 \leqslant \lambda < n$ e un qualsiasi insieme misurabile K di misura finita, si ha

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_K \frac{dy}{|x-y|^\lambda} < +\infty\ .$$

2 *Sia $H(x,y)$ un nucleo con singolarità debole (1.2) e sia T l'operatore integrale (1.1). Posto*

$$\gamma(A) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_A \frac{dy}{|x-y|^\lambda}$$

risulta

$$\|T\varphi\|_{L^p(A)} \leqslant H_0\,[\gamma(A)]^{\frac{1}{p}}\,[\gamma(G)]^{\frac{1}{q}}\,\|\varphi\|_{L^p(G)} \tag{1.5}$$

per ogni $A \subset G$.

Per la disuguaglianza di Hölder possiamo scrivere

$$|T\varphi(x)| \leqslant H_0 \int_G \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^\lambda}\,dy = H_0 \int_G \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^{\frac{\lambda}{p}+\frac{\lambda}{q}}}\,dy \leqslant$$

$$H_0 \left(\int_G \frac{|\varphi(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_G \frac{dy}{|x-y|^\lambda}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant H_0\,[\gamma(G)]^{\frac{1}{q}} \left(\int_G \frac{|\varphi(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

da cui, ricordando il teorema di Tonelli,

$$\int_A |T\varphi(x)|^p\,dx \leqslant H_0^p\,[\gamma(G)]^{\frac{p}{q}} \int_A dx \int_G \frac{|\varphi(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\,dy =$$

$$H_0^p\,[\gamma(G)]^{\frac{p}{q}} \int_G |\varphi(y)|^p\,dy \int_A \frac{dx}{|x-y|^\lambda}\,dx \leqslant H_0^p\,[\gamma(G)]^{\frac{p}{q}}\,\gamma(A) \int_G |\varphi(y)|^p\,dy$$

ossia la tesi.

3 *Sia $H(x,y)$ un nucleo con singolarità debole (1.2) e sia T l'operatore integrale (1.1) (dove G denota un compatto). T risulta lineare, continuo ($p \geqslant 1$) e compatto da $L^p(G)$ in sé stesso ($p > 1$).*

La linearità è ovvia. La continuità segue subito dalla (1.5), prendendo $A = G$.

Dimostriamo ora la compattezza. Facciamo vedere dapprima che se $\{\varphi_n\}$ è una successione convergente debolmente a 0 in $L^p(G)$, $\varphi_n \rightharpoonup 0$, allora $T\varphi_n \to 0$ in norma.

Sia B_x una palla di raggio $r > 0$, di centro x e contenuta in G; indichiamo con χ_{B_x} la sua funzione caratteristica. Possiamo scrivere

$$T\varphi_n(x) = \int_G \varphi_n(y)\, \chi_{B_x}(y)\, H(x,y)\, dy + \int_G \varphi_n(y)\, [1 - \chi_{B_x}(y)]\, H(x,y)\, dy.$$

Dato che, per ogni fissato x, la funzione $[1 - \chi_{B_x}(y)]\, H(x,y)$ è continua (e quindi in $L^q(G)$) ed essendo $\varphi_n \rightharpoonup 0$, abbiamo

$$\int_G \varphi_n(y)\, [1 - \chi_{B_x}(y)]\, H(x,y)\, dy \to 0\ . \tag{1.6}$$

Il lemma precedente applicato al nucleo $\widetilde{H}(x,y) = [1 - \chi_{B_x}(y)]\, H(x,y)$ mostra che

$$\left(\int_A \mid T_1\varphi_n \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\, H_0\, [\gamma(A)]^{\frac{1}{p}}\, [\gamma(G)]^{\frac{1}{q}}\, \|\varphi_n\|_{L^p(G)}$$

(dove T_1 indica l'operatore integrale il cui nucleo è $\widetilde{H}(x,y)$). Essendo la successione $\{\varphi_n\}$ limitata in norma, per il lemma 1 esiste un δ_ε tale che

$$\int_A \mid T_1\varphi_n \mid^p dx < \varepsilon$$

per ogni insieme misurabile A tale che $|A| < \delta_\varepsilon$. Ciò mostra che la successione $\{\mid T_1\varphi_n \mid^p\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui. Essendo per la (1.6) $\mid T_1\varphi_n \mid^p \to 0$ puntualmente ed essendo la misura di G finita, il teorema di Vitali permette di concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \mid T_1\varphi_n \mid^p dx = 0 \tag{1.7}$$

ossia che $T_1\varphi_n \to 0$ in norma.

D'altra parte (cfr. la (1.4))

$$\left|\int_G \varphi_n(y)\,\chi_{B_x}(y)\,H(x,y)\,dy\right| \leqslant H_0 \int_{B_x} \frac{|\varphi_n(y)|}{|x-y|^\lambda}\,dy \leqslant$$
$$H_0 \left(\int_{B_x} \frac{|\varphi_n(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_x} \frac{dy}{|x-y|^\lambda}\right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$H_0 \left(\omega_n\,\frac{r^{n-\lambda}}{n-\lambda}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_x} \frac{|\varphi_n(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\varepsilon \left(\int_G \frac{|\varphi_n(y)|^p}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

per un r abbastanza piccolo. Ragionando come nel lemma precedente, si trova

$$\|T_2\varphi_n\|_{L^p(G)} \leqslant \varepsilon\,[\gamma(G)]^{\frac{1}{q}}\,\|\varphi_n\|_{L^p(G)} \leqslant C\,\varepsilon$$

dove C è una costante tale che

$$[\gamma(G)]^{\frac{1}{q}}\,\|\varphi_n\|_{L^p(G)} \leqslant C$$

e con T_2 abbiamo indicato l'operatore integrale

$$T_2\varphi_n(x) = \int_G \varphi_n(y)\,\chi_{B_x}(y)\,H(x,y)\,dy\ .$$

Essendo $T = T_1 + T_2$, ricordando la (1.7), abbiamo quindi

$$\limsup_{n\to\infty} \|T\varphi_n\|_{L^p(G)} \leqslant C\,\varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue che $T\varphi_n \to 0$ in norma.

Sia ora $\{\varphi_n\}$ una qualsiasi successione limitata in norma. Esiste una sottosuccessione $\{\varphi_{n_k}\}$ debolmente convergente, diciamo $\varphi_{n_k} \rightharpoonup \varphi$. Allora la successione $\{\varphi_{n_k} - \varphi\}$ tende debolmente a 0 e quindi, per quanto appena dimostrato, risulta $T(\varphi_{n_k} - \varphi) \to 0$ in norma, ossia $T\varphi_{n_k} \to T\varphi$.

Nello studio degli operatori integrali ha un'importanza fondamentale il seguente teorema.

4 *Sia $G \subset \mathbb{R}^n$ compatto e siano $K_1(x,y)$ e $K_2(x,y)$ due nuclei continui in $G \times G - \Delta$. Supponiamo che esistano due costanti A_1, A_2 tali che*

$$|K_1(x,y)| \leqslant \frac{A_1}{|x-y|^{\alpha_1}}\,, \quad |K_2(x,y)| \leqslant \frac{A_2}{|x-y|^{\alpha_2}} \qquad \forall\,(x,y) \in G \times G - \Delta$$

dove $0 \leqslant \alpha_j < n\,(j = 1,2)$. Sia $K_3(x,y)$ il nucleo definito dalla composizione di K_1 e K_2:

$$K_3(x,y) = \int_G K_1(x,t)\,K_2(t,y)\,dt\,.$$

Risulta

$$K_3(x,y) \begin{cases} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{|x-y|^{\alpha_1+\alpha_2-n}}\right) & se\ \alpha_1+\alpha_2 > n \\ = \mathcal{O}\,(1 + |\log|x-y||) & se\ \alpha_1+\alpha_2 = n \\ = \mathcal{O}(1) & se\ \alpha_1+\alpha_2 < n. \end{cases}$$

Sia $R = 2\,\mathrm{diam}\,G$; possiamo scrivere

$$|K_3(x,y)| \leqslant A_1 A_2 \int_G \frac{dt}{|x-t|^{\alpha_1}|t-y|^{\alpha_2}} \leqslant A_1 A_2 \int_{B_R(x)} \frac{dt}{|x-t|^{\alpha_1}|t-y|^{\alpha_2}}\,.$$

Poniamo $\sigma = |y-x|$, $\omega = \frac{y-x}{|y-x|}$, $t = x + \sigma\,\eta$; con queste posizioni abbiamo $|x-t| = \sigma\,|\eta|$, $|t-y| = |(x+\sigma\,\eta) - (x+\sigma\,\omega)| = \sigma\,|\eta-\omega|$ e quindi

$$\int_{B_R(x)} \frac{dt}{|x-t|^{\alpha_1}|t-y|^{\alpha_2}} = \int_{|\eta|\leqslant\frac{R}{\sigma}} \frac{\sigma^n d\eta}{\sigma^{\alpha_1}|\eta|^{\alpha_1}\sigma^{\alpha_2}|\eta-\omega|^{\alpha_2}} =$$

$$\sigma^{n-\alpha_1-\alpha_2} \int_{|\eta|\leqslant\frac{R}{\sigma}} \frac{d\eta}{|\eta|^{\alpha_1}|\eta-\omega|^{\alpha_2}} =$$

$$\sigma^{n-\alpha_1-\alpha_2}\left(\int_{|\eta|\leqslant 2} \frac{d\eta}{|\eta|^{\alpha_1}|\eta-\omega|^{\alpha_2}} + \int_{2\leqslant|\eta|\leqslant\frac{R}{\sigma}} \frac{d\eta}{|\eta|^{\alpha_1}|\eta-\omega|^{\alpha_2}}\right)$$

(si noti che risulta $2\,\sigma \leqslant 2\,\mathrm{diam}\,G = R$).

Essendo $\alpha_1, \alpha_2 < n$, l'integrale

$$\int_{|\eta|\leqslant 2} \frac{d\eta}{|\eta|^{\alpha_1}|\eta-\omega|^{\alpha_2}}$$

esiste finito, presentando il nucleo due singolarità deboli **distinte** all'interno della palla $\{|\eta| \leqslant 2\}$, una nell'origine e l'altra nel punto ω, il quale appartiene alla sfera unitaria. È facile convincersi che, per motivi di simmetria, il valore di tale integrale non dipende dal punto ω. Abbiamo quindi

$$\int_{B_R(x)} \frac{dt}{|x-t|^{\alpha_1}|t-y|^{\alpha_2}} = \sigma^{n-\alpha_1-\alpha_2}\left(C_1 + \int_{2\leqslant|\eta|\leqslant\frac{R}{\sigma}} \frac{d\eta}{|\eta|^{\alpha_1}|\eta-\omega|^{\alpha_2}}\right). \quad (1.8)$$

Si tratta, ora, di stimare l'ultimo integrale. Osserviamo che, se $|\eta| \geqslant 2$, risulta

$$|\eta| \leqslant |\eta| + |\eta| - 2 = 2\,(|\eta| - 1) = 2\,(|\eta| - |\omega|) \leqslant 2\,|\eta - \omega|$$

da cui

$$\int_{2\leqslant|\eta|\leqslant\frac{R}{\sigma}} \frac{d\eta}{|\eta|^{\alpha_1}|\eta-\omega|^{\alpha_2}} \leqslant 2^{\alpha_2}\int_{2\leqslant|\eta|\leqslant\frac{R}{\sigma}} \frac{d\eta}{|\eta|^{\alpha_1+\alpha_2}} =$$

$$2^{\alpha_2}\omega_n \int_2^{\frac{R}{\sigma}} \frac{\varrho^{n-1}d\varrho}{\varrho^{\alpha_1+\alpha_2}} = 2^{\alpha_2}\omega_n \int_2^{\frac{R}{\sigma}} \frac{d\varrho}{\varrho^{1-n+\alpha_1+\alpha_2}}\;. \quad (1.9)$$

Distinguiamo ora i vari casi: se $\alpha_1+\alpha_2 > n$, allora, ovviamente, $1-n+\alpha_1+\alpha_2 > 1$ e quindi

$$\int_2^{\frac{R}{\sigma}} \frac{d\varrho}{\varrho^{1-n+\alpha_1+\alpha_2}} \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^{1-n+\alpha_1+\alpha_2}} = C_2\;.$$

Da (1.8) e (1.9) segue

$$|K_3(x,y)| \leqslant C\,\sigma^{n-\alpha_1-\alpha_2} = \frac{C}{|x-y|^{\alpha_1+\alpha_2-n}}\;.$$

Se invece $\alpha_1+\alpha_2 = n$, allora

$$\int_2^{\frac{R}{\sigma}} \frac{d\varrho}{\varrho^{1-n+\alpha_1+\alpha_2}} = \int_2^{\frac{R}{\sigma}} \frac{d\varrho}{\varrho} = \log\frac{R}{2\sigma}$$

e quindi, sempre da (1.8) e (1.9),

$$|K_3(x,y)| \leqslant C_3 + C_4 \log\frac{R}{2\,|x-y|}$$

ossia la tesi [3].

Se infine $\alpha_1+\alpha_2<n$ risulta

$$\int_2^{\frac{R}{\sigma}} \frac{d\varrho}{\varrho^{1-n+\alpha_1+\alpha_2}} = \frac{1}{n-\alpha_1-\alpha_2}\left[\left(\frac{R}{\sigma}\right)^{n-\alpha_1-\alpha_2} - 2^{n-\alpha_1-\alpha_2}\right]$$

da cui segue (cfr. (1.9))

$$\sigma^{n-\alpha_1-\alpha_2}\int_{2\leqslant|\eta|\leqslant\frac{R}{\sigma}} \frac{d\eta}{|\eta|^{\alpha_1}|\eta-\omega|^{\alpha_2}} \leqslant$$
$$\frac{2^{\alpha_2}\omega_n\sigma^{n-\alpha_1-\alpha_2}}{n-\alpha_1-\alpha_2}\left[\left(\frac{R}{\sigma}\right)^{n-\alpha_1-\alpha_2} - 2^{n-\alpha_1-\alpha_2}\right] \leqslant K$$

e quindi la tesi, ricordando la (1.8). Si noti che, in questo ultimo caso, $K_3(x,y)$ è definito anche se $x=y$.

5 *Con le notazioni e le ipotesi del teorema precedente, il nucleo $K_3(x,y)$ è continuo in $G\times G-\Delta$. In particolare, se $\alpha_1+\alpha_2<n$, il nucleo $K_3(x,y)$ è continuo su tutto $G\times G$.*

Per la prima parte dell'enunciato, si tratta di dimostrare che, se $x_0,y_0\in G$ con $x_0\neq y_0$, risulta

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} K_3(x,y) = K_3(x_0,y_0). \tag{1.10}$$

Assegnato un $\varepsilon>0$, scegliamo ϱ_ε tale che

$$0<\varrho_\varepsilon<\frac{|x_0-y_0|}{4}$$

e, inoltre,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{B_{\varrho_\varepsilon}(x_0)}\frac{dt}{|x-t|^{\alpha_1}}<\varepsilon\,,\qquad \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{B_{\varrho_\varepsilon}(y_0)}\frac{dt}{|y-t|^{\alpha_2}}<\varepsilon\,. \tag{1.11}$$

[3]Basta verificare che, fissato un $R>0$, esiste una costante K tale che

$$\log\frac{R}{2\,t}\leqslant K+|\log t| \qquad \forall\ 0<t\leqslant R.$$

Questo si può dimostrare ponendo $F(t)=\log\frac{R}{2}-\log t-|\log t|$ ed osservando che in $(0,R]$ tale funzione risulta limitata. Infatti, se $0<t<1$ si ha $F(t)=\log\frac{R}{2}$, mentre per $1\leqslant t\leqslant R$ risulta $F(t)\leqslant\log\frac{R}{2}+2\log R$.

Un ϱ_ε siffatto esiste certamente per l'uniforme assoluta continuità dimostrata nel lemma 1.

Si ha:

$$|K_3(x,y)-K_3(x_0,y_0)| = \left|\int_G K_1(x,t)\,K_2(t,y)\,dt - \int_G K_1(x_0,t)\,K_2(t,y_0)\,dt\right| \leqslant$$
$$\left|\int_{G-[B_{\varrho_\varepsilon}(x_0)\cup B_{\varrho_\varepsilon}(y_0)]} [K_1(x,t)\,K_2(t,y) - K_1(x_0,t)\,K_2(t,y_0)]\,dt\right| +$$
$$\left|\int_{B_{\varrho_\varepsilon}(x_0)} [K_1(x,t)\,K_2(t,y) - K_1(x_0,t)\,K_2(t,y_0)]\,dt\right| +$$
$$\left|\int_{B_{\varrho_\varepsilon}(y_0)} [K_1(x,t)\,K_2(t,y) - K_1(x_0,t)\,K_2(t,y_0)]\,dt\right|$$

Indichiamo con $I_1(x,y), I_2(x,y), I_3(x,y)$ i tre integrali che compaiono nel secondo membro dell'ultima disuguaglianza.

Essendo il primo integrale esteso a $G - [B_{\varrho_\varepsilon}(x_0) \cup B_{\varrho_\varepsilon}(y_0)]$, si ha ovviamente

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} I_1(x,y) = 0.$$

Per quanto riguarda $I_2(x,y)$, risulta

$$|I_2(x,y)| \leqslant A_1 A_2 \int_{B_{\varrho_\varepsilon}(x_0)} \left(\frac{1}{|x-t|^{\alpha_1}|t-y|^{\alpha_2}} + \frac{1}{|x_0-t|^{\alpha_1}|t-y_0|^{\alpha_2}}\right) dt\,.$$

Se $|y-y_0| < \varrho_\varepsilon$, si ha [4]

$$|y-t| > \frac{|x_0-y_0|}{2} \qquad \forall\, t \in B_{\varrho_\varepsilon}(x_0)$$

e dunque, tenendo presente anche la prima delle (1.11),

$$|I_2(x,y)| \leqslant A_1 A_2 \left(\frac{2}{|x_0-y_0|}\right)^{\alpha_2} \left[\int_{B_{\varrho_\varepsilon}(x_0)} \frac{dt}{|x-t|^{\alpha_1}} + \int_{B_{\varrho_\varepsilon}(x_0)} \frac{dt}{|x_0-t|^{\alpha_1}}\right] \leqslant$$
$$2\,A_1 A_2 \left(\frac{2}{|x_0-y_0|}\right)^{\alpha_2} \varepsilon \qquad \forall\, x \in G,\ |y-y_0| < \varrho_\varepsilon\,.$$

[4]Infatti:

$$|x_0-y_0| \leqslant |x_0-t| + |t-y| + |y-y_0| < 2\,\varrho_\varepsilon + |t-y| < \frac{|x_0-y_0|}{2} + |t-y|\,.$$

In modo perfettamente analogo si trova

$$|I_3(x,y)| \leqslant 2\, A_1 A_2 \left(\frac{2}{|x_0-y_0|}\right)^{\alpha_1} \varepsilon \qquad\qquad \forall\, y \in G,\ |x-x_0| < \varrho_\varepsilon\,.$$

Questo dimostra che

$$\limsup_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |K_3(x,y) - K_3(x_0,y_0)| \leqslant$$
$$2\, A_1 A_2 \left[\left(\frac{2}{|x_0-y_0|}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{2}{|x_0-y_0|}\right)^{\alpha_2}\right] \varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue la (1.10).

Supponiamo ora

$$\alpha_1 + \alpha_2 < n\,. \tag{1.12}$$

Fissiamo un δ tale che

$$\frac{\alpha_1}{n-\alpha_2} < \delta < 1 \tag{1.13}$$

(si noti che $\frac{\alpha_1}{n-\alpha_2} < 1$ dato che $\alpha_2 < n$ e quindi

$$\frac{\alpha_1}{n-\alpha_2} < 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha_1 < n - \alpha_2$$

e l'ultima condizione non è altro che la (1.12)).

Poniamo

$$p = \frac{\delta\, n}{\alpha_1}\ ;$$

risulta $p > 1$, dato che dalla (1.13) segue

$$\delta > \frac{\alpha_1}{n-\alpha_2} \geqslant \frac{\alpha_1}{n}\ .$$

Poniamo q uguale all'esponente coniugato di p:

$$q = \frac{p}{p-1} = \frac{\delta\, n}{\delta\, n - \alpha_1}\ .$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Hölder, abbiamo

$$\int_E \frac{dt}{|x-t|^{\alpha_1}|t-y|^{\alpha_2}} \leqslant \left(\int_E \frac{dt}{|x-t|^{p\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E \frac{dt}{|t-y|^{q\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.14}$$

Sia $p\alpha_1$ che $q\alpha_2$ risultano minori di n; infatti la (1.13) implica

$$p\,\alpha_1 = \delta\, n < n$$

mentre

$$q\,\alpha_2 = \frac{\delta\, n\, \alpha_2}{\delta\, n - \alpha_1} < n$$

dato che

$$\frac{\delta\, n\, \alpha_2}{\delta\, n - \alpha_1} < n \iff \delta\,\alpha_2 < \delta\, n - \alpha_1 \iff \delta(n-\alpha_2) > \alpha_1 \iff \delta > \frac{\alpha_1}{n-\alpha_2}$$

e l'ultima disuguaglianza è vera per la (1.13).

La (1.14), ricordando il lemma 1, mostra che, dato un $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni insieme misurabile $E \subset G$ con $|E| < \delta_\varepsilon$ risulta

$$\int_E |K_1(x,t)\, K_2(t,y)|\, dt < \varepsilon\,,$$

ossia che le funzioni della t: $K_1(x,t)\, K_2(t,y)$ hanno gli integrali uniformemente assolutamente continui in G al variare di $(x,y) \in G \times G$. Il teorema di Vitali permette quindi di passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \int_G K_1(x,t)\, K_2(t,y)\, dt = \int_G K_1(x_0,t)\, K_2(t,y_0)\, dt$$

e questo dimostra la continuità di $K_3(x,y)$ in tutto $G \times G$.

2 Alcune proprietà dei potenziali di semplice e doppio strato

6 *Sia Ψ una funzione sommabile in una palla B_R di centro l'origine di $\mathbb{R}^n$. Se esiste una costante C ed un $\varrho_0 > 0$ tali che*

$$\int_{B_\varrho} |\Psi(\eta)|\, d\eta \leqslant C\, \varrho^\mu \tag{2.1}$$

per ogni $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$, risulta

$$\int_{B_R} \frac{|\Psi(\eta)|}{|\eta|^\lambda} d\eta < +\infty$$

per ogni $\lambda < \mu$.

Poniamo
$$A(r) = \int_{B_r} |\Psi(\eta)|\, d\eta$$
ossia
$$A(r) = \int_0^r \varrho^{n-1} d\varrho \int_{|\omega|=1} |\Psi(\varrho\omega)|\, d\sigma_\omega .$$

Possiamo allora scrivere
$$\int_{B_R} \frac{|\Psi(\eta)|}{|\eta|^\lambda} d\eta = \int_0^R \varrho^{n-1-\lambda} d\varrho \int_{|\omega|=1} |\Psi(\varrho\omega)|\, d\sigma_\omega = \int_0^R A'(\varrho)\, \varrho^{-\lambda} d\varrho \, .$$

D'altra parte, integrando per parti, [5]
$$\int_0^R A'(\varrho)\, \varrho^{-\lambda} d\varrho = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [A(\varrho)\, \varrho^{-\lambda}]_{\varrho=\varepsilon}^{\varrho=R} + \lambda \int_0^R A(\varrho)\, \varrho^{-\lambda-1} d\varrho$$
ed essendo, per la (2.1), $A(\varrho) \leqslant C\varrho^\mu$ con $\lambda < \mu$, risulta
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} A(\varepsilon)\, \varepsilon^{-\lambda} = 0 \, , \qquad \int_0^R A(\varrho)\, \varrho^{-\lambda-1} d\varrho \leqslant C \int_0^R \varrho^{\mu-\lambda-1} d\varrho < \infty.$$

Abbiamo quindi fatto vedere che
$$\int_{B_R} \frac{|\Psi(\eta)|}{|\eta|^\lambda} d\eta = A(R)\, R^{-\lambda} + \lambda \int_0^R A(\varrho)\, \varrho^{-\lambda-1} d\varrho < \infty$$
ossia la tesi.

Osservazione. Se si suppone la (2.1) con $\mu = \lambda$, la sommabilità di $\Psi(\eta)/|\eta|^\lambda$ non è più garantita. Si consideri, infatti, la funzione $\Psi(\eta) = |\eta|^{\lambda-n}$ in $\mathbb{R}^n$ per un certo $\lambda > 0$. Risulta
$$\int_{B_\varrho} |\psi(\eta)|\, d\eta = \omega_n \int_0^\varrho r^{\lambda-n} r^{n-1} dr = C\, \varrho^\lambda$$
epperò
$$\int_{B_R} \frac{|\Psi(\eta)|}{|\eta|^\lambda} d\eta = \omega_n \int_0^R \frac{\varrho^{\lambda-n}}{\varrho^\lambda}\, \varrho^{n-1} d\varrho = \omega_n \int_0^R \frac{d\varrho}{\varrho} = +\infty.$$

[5] Si osservi che la funzione $A(\varrho)$ è assolutamente continua, mentre la funzione $\varrho^{-\lambda}$ è regolare in (ε, R) (con $\varepsilon > 0$); è quindi lecito integrare per parti negli intervalli (ε, R) e poi passare al limite per $\varepsilon \to 0^+$.

D'ora in poi Ω indicherà un dominio limitato dello spazio $\mathbb{R}^n$ tale che la sua frontiera Σ risulti di Lyapunov; in simboli: $\Sigma \in C^{1,h}$ $(0 < h \leqslant 1)$.

Dire che $\Sigma \in C^1$ significa che esiste un $R > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \Sigma$, prendendo l'asse determinato da $\nu(x_0)$ come η_n e l'iperpiano tangente a Σ in x_0 come $\eta_n = 0$, la parte connessa $\Sigma_{x_0} \subset \Sigma$ contenuta nel cilindro di $\mathbb{R}^n$ $\eta_1^2 + \ldots + \eta_{n-1}^2 \leqslant R$ e contenente x_0 si rappresenta come

$$\eta_n = \gamma(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}), \tag{2.2}$$

con γ di classe C^1 nella palla $B_R = \{(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \eta_1^2 + \ldots + \eta_{n-1}^2 \leqslant R\}$. Dire che Σ è di Lyapunov significa dire che questa γ non è solo C^1 ma è anche $C^{1,h}$, ossia che le sue derivate prime soddisfano una condizione di Hölder uniforme:

$$|\gamma_{\eta_k}(\eta) - \gamma_{\eta_k}(\eta')| \leqslant \Gamma\, |\eta - \eta'|^h \tag{2.3}$$

$(\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}),\ \eta' = (\eta'_1, \ldots, \eta'_{n-1}))$.

È possibile dimostrare che Σ è di Lyapunov se e solo se il versore normale esterno soddisfa una condizione di Hölder uniforme, ossia se e solo se

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leqslant H\, |x - y|^h \qquad \forall\, x, y \in \Sigma.$$

Questo dimostra che l'essere di Lyapunov è una condizione intrinseca.

7 *Sia $\psi \in L^1(\Sigma)$ e sia $x_0 \in \Sigma$ un punto di Lebesgue della ψ. Allora la funzione*

$$\psi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x_0, y) \tag{2.4}$$

è sommabile su Σ. Se $\psi \in L^\infty(\Sigma)$ la tesi è vera per ogni $x_0 \in \Sigma$.

Introdotto un sistema di riferimento $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ dove η_n coincide con l'asse normale e $\eta_n = 0$ con l'iperpiano tangente a Σ in x_0, localmente Σ si rappresenta con l'equazione (2.2). È ovvio che basta verificare la sommabilità della (2.4) soltanto sulla parte Σ_{x_0} di Σ che si rappresenta in questo modo, dato che sulla parte restante la derivata normale della soluzione fondamentale rimane limitata e la ψ è sommabile.

Essendo

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - x_k}{|y - x|^n}\, \nu_k(y)\,, \tag{2.5}$$

osservando che i punti di Σ_{x_0} sono i punti del tipo $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \gamma(\eta))$ $(\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1}))$, $x_0 = (0, \dots, 0)$ e

$$\nu(y) = \left(\frac{\gamma_{\eta_1}(\eta)}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|^2}}, \dots, \frac{\gamma_{\eta_{n-1}}(\eta)}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|^2}} \right), \tag{2.6}$$

possiamo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x_0, y) = \frac{1}{\omega_n} \, \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|^2}} \, \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \gamma_{\eta_k}(\eta) - \gamma(\eta)}{[|\eta|^2 + \gamma^2(\eta)]^{\frac{n}{2}}}.$$

Allora, indicando con $\Psi(\eta)$ la funzione $\psi(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \gamma(\eta))$, la sommabilità richiesta sarà dimostrata se facciamo vedere che il seguente integrale risulta finito

$$\int_{B_R} \left| \Psi(\eta) \, \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \gamma_{\eta_k}(\eta) - \gamma(\eta)}{[|\eta|^2 + \gamma^2(\eta)]^{\frac{n}{2}}} \right| d\eta \tag{2.7}$$

(si noti che $d\sigma_y = \sqrt{1 + |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|^2} d\eta$).

Ricordando la (2.3) si ha

$$|\operatorname{grad} \gamma(\eta)| = |\operatorname{grad} \gamma(\eta) - \operatorname{grad} \gamma(0)| \leqslant \Gamma \, |\eta|^h \tag{2.8}$$

(si noti che, essendo $\eta_n = 0$ l'iperpiano tangente a Σ in x_0, risulta $\operatorname{grad} \gamma(0) = 0$) da cui, applicando il teorema di Lagrange,

$$|\gamma(\eta)| = |\gamma(\eta) - \gamma(0)| \leqslant \Gamma \, |\eta|^{1+h}. \tag{2.9}$$

Essendo inoltre

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \gamma_{\eta_k}(\eta) \right| \leqslant |\eta| \, |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|$$

si trova

$$\left| \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \gamma_{\eta_k}(\eta) - \gamma(\eta)}{[|\eta|^2 + \gamma^2(\eta)]^{\frac{n}{2}}} \right| \leqslant K \, \frac{1}{|\eta|^{n-1-h}}$$

(essendo K una costante opportuna) e quindi l'integrando in (2.7) si maggiora con
$$K\,\frac{|\Psi(\eta)|}{|\eta|^{n-1-h}}\,.$$

Se $\psi \in L^\infty$ è ovvio che questa ultima funzione risulta sommabile e quindi l'integrale (2.7) risulta finito qualunque sia x_0. Nel caso più generale $\psi \in L^1(\Sigma)$, la finitezza di (2.7) segue dal lemma 6, non appena si faccia vedere che esiste una costante C e un $\mu > n-1-h$ tale che la (2.1) sussiste per ogni ϱ positivo minore di un certo $\mathbb{R}$.

Questa è una conseguenza del fatto che x_0 è un punto di Lebesgue della ψ. Infatti, fissato un $\varepsilon > 0$, per ogni $\varrho > 0$ abbastanza piccolo, si ha
$$\int_{B_\varrho} |\Psi(\eta) - \Psi(0)|\, d\eta \leqslant \varepsilon\, \varrho^{n-1}. \tag{2.10}$$

Allora
$$\int_{B_\varrho} |\Psi(\eta)|\, d\eta \leqslant \int_{B_\varrho} |\Psi(\eta) - \Psi(0)|\, d\eta \;+\; \Omega_{n-1}|\Psi(0)|\,\varrho^{n-1} \leqslant \\ (\varepsilon + \Omega_{n-1}|\Psi(0)|)\,\varrho^{n-1}$$

ossia la (2.1) con $\mu = n-1$, che, ovviamente, risulta maggiore di $n-1-h$. Il teorema è così dimostrato.

8 *Sia $\psi \in L^1(\Sigma)$ e sia $x_0 \in \Sigma$ un punto di Lebesgue della ψ. Risulta*
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^+_{x_0}}} \int_\Sigma \psi(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = \frac{1}{2}\,\psi(x_0) + \int_\Sigma \psi(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x_0,y)\, d\sigma_y, \tag{2.11}$$

dove $\nu^+_{x_0}$ indica la parte dell'asse normale a Σ in x_0 contenuta in Ω.

Consideriamo dapprima il caso $\psi \equiv 1$ e mostriamo che
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^+_{x_0}}} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = \frac{1}{2} + \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x_0,y)\, d\sigma_y. \tag{2.12}$$

Per ottenere la (2.12) basterà far vedere (con le notazioni usate precedentemente) che
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^+_{x_0}}} \int_{\Sigma_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = \frac{1}{2} + \int_{\Sigma_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x_0,y)\, d\sigma_y \tag{2.13}$$

dato che, ovviamente, si ha

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^+_{x_0}}} \int_{\Sigma-\Sigma_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y)\,d\sigma_y = \int_{\Sigma-\Sigma_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x_0,y)\,d\sigma_y.$$

Introducendo il solito sistema di riferimento locale e posto $\delta = |x-x_0|$, abbiamo, ricordando la (2.5),

$$\int_{\Sigma_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y)\,d\sigma_y = \frac{1}{\omega_n}\int_{B_R} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\gamma_{\eta_k}(\eta) - (\gamma(\eta)-\delta)}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta = \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\gamma_{\eta_k}(\eta) - \gamma(\eta)}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta + \frac{1}{\omega_n}\int_{B_R} \frac{\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta$$

Per quanto riguarda il primo integrale, si ha

$$\left|\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\gamma_{\eta_k}(\eta) - \gamma(\eta)}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\right| \leqslant \left|\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\gamma_{\eta_k}(\eta) - \gamma(\eta)}{|\eta|^n}\right|$$

e quindi esiste una costante K tale che

$$\left|\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\gamma_{\eta_k}(\eta) - \gamma(\eta)}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\right| \leqslant K\,\frac{1}{|\eta|^{n-1-h}} \tag{2.15}$$

(cfr. la dimostrazione del teorema 7). Essendo $|\eta|^{-n+1+h}$ sommabile in B_R, il teorema della convergenza dominata permette di concludere che

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\gamma_{\eta_k}(\eta) - \gamma(\eta)}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta = \frac{1}{\omega_n}\int_{B_R} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\gamma_{\eta_k}(\eta) - \gamma(\eta)}{[|\eta|^2+\gamma^2(\eta)]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta$$

ossia che

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\gamma_{\eta_k}(\eta)-\gamma(\eta)}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta=\int_{\Sigma_{x_0}}\frac{\partial}{\partial\nu_y}s(x_0,y)\,d\sigma_y.$$

Per dimostrare la (2.13) occorre dunque verificare che

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}\frac{\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta=\frac{1}{2}\,. \tag{2.16}$$

Posto

$$\sigma=\sqrt{|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2}\,,\qquad \sigma_0=\sqrt{|\eta|^2+\delta^2}\,, \tag{2.17}$$

possiamo scrivere

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}\frac{\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta=\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}\left(\frac{\delta}{\sigma^n}-\frac{\delta}{\sigma_0^n}\right)d\eta+\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}\frac{\delta}{\sigma_0^n}\,d\eta\ . \tag{2.18}$$

Essendo

$$\delta\leqslant\sigma_0,\quad |\eta|\leqslant\sigma_0,\quad |\eta|\leqslant\sigma \tag{2.19}$$

si ha

$$\begin{aligned}\left|\frac{\delta}{\sigma^n}-\frac{\delta}{\sigma_0^n}\right|=\frac{\delta\,|\sigma^n-\sigma_0^n|}{\sigma^n\sigma_0^n}=\frac{\delta\,|\sigma-\sigma_0|}{\sigma^n\sigma_0^n}\,(\sigma^{n-1}+\sigma^{n-2}\sigma_0+\cdots+\sigma_0^{n-1})\leqslant\\ \frac{|\sigma-\sigma_0|}{\sigma^n\sigma_0^{n-1}}\,(\sigma^{n-1}+\sigma^{n-2}\sigma_0+\cdots+\sigma_0^{n-1})=\\ |\sigma-\sigma_0|\left(\frac{1}{\sigma\,\sigma_0^{n-1}}+\frac{1}{\sigma^2\sigma_0^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{\sigma^n}\right)\leqslant\frac{n\,|\sigma-\sigma_0|}{|\eta|^n}.\end{aligned}$$

Tenendo presenti le prime due disuguaglianze in (2.19) si ha pure

$$\begin{aligned}|\sigma-\sigma_0|=\frac{|\sigma^2-\sigma_0^2|}{\sigma+\sigma_0}=\frac{|\,|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2-(|\eta|^2+\delta^2)|}{\sigma+\sigma_0}\leqslant\\ \frac{\gamma^2(\eta)+2\,\delta\,|\gamma(\eta)|}{\sigma_0}\leqslant\frac{\gamma^2(\eta)}{|\eta|}+2\,|\gamma(\eta)|\end{aligned}$$

da cui, ricordando la (2.9), si deduce

$$|\sigma-\sigma_0|\leqslant\Gamma^2|\eta|^{1+2h}+2\,\Gamma\,|\eta|^{1+h}\leqslant K\,|\eta|^{1+h}.$$

Si ha dunque

$$\left|\frac{\delta}{\sigma^n} - \frac{\delta}{\sigma_0^n}\right| = \frac{\delta\,|\sigma^n - \sigma_0^n|}{\sigma^n \sigma_0^n} \leqslant \frac{n\,K}{|\eta|^{n-1-h}}\ ; \tag{2.20}$$

essendo $|\eta|^{-n+1+h}$ sommabile in B_R, possiamo applicare ancora il teorema della convergenza dominata e concludere che

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{B_R}\left(\frac{\delta}{\sigma^n} - \frac{\delta}{\sigma_0^n}\right) d\eta = 0\ . \tag{2.21}$$

Per quanto riguarda l'ultimo integrale in (2.18) si ha

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}\frac{\delta}{\sigma_0^n}\,d\eta = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_0^R \frac{\delta\,\varrho^{n-2}}{(\varrho^2+\delta^2)^{\frac{n}{2}}}\,d\varrho = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_0^{\frac{R}{\delta}}\frac{t^{n-2}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}\,dt$$

da cui [6]

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{B_R}\frac{\delta}{\sigma_0^n}\,d\eta = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-2}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\,.$$

Questo prova la (2.16) e quindi la (2.13).

La (2.12) è dunque dimostrata.

Osserviamo che dalle formule di rappresentazione di Stokes, si ha

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu_y}s(x,y)\,d\sigma_y = 1 \qquad \forall\ x\in\Omega$$

[6]Consideriamo la mezza sfera unitaria: $\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2 = 1$, $\eta_n > 0$; essa può essere rappresentata con l'equazione $\eta_n = g(\eta)$ dove $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_{n-1})$, $g(\eta) = \sqrt{1-|\eta|^2}$. Si ha

$$\omega_n = 2\int_{|\eta|<1}\sqrt{1+|\operatorname{grad} g(\eta)|^2}\,d\eta = 2\int_{|\eta|<1}\frac{d\eta}{\sqrt{1-|\eta|^2}} =$$
$$2\,\omega_{n-1}\int_0^1\frac{\varrho^{n-2}d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} = 2\,\omega_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}u\,du\ .$$

D'altra parte, ponendo $t = \tan u$, si trova

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-2}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}u\,du$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-2}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}\,dt = \frac{\omega_n}{2\,\omega_{n-1}}.$$

e quindi la (2.12) mostra anche

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = \frac{1}{2} \qquad \forall\, x \in \Sigma. \tag{2.22}$$

È interessante osservare che

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y \begin{cases} = 1 & \text{se } x \in \Omega \\ = \frac{1}{2} & \text{se } x \in \Sigma \\ = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.23}$$

(l'ultima relazione è una conseguenza immediata del fatto che, quando $x \in \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$, la funzione (della y) $s(x,y)$ è armonica in Ω).

Consideriamo ora una $\psi \in L^1(\Sigma)$ e sia x_0 un punto di Lebesgue. La (2.12) implica che

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in \nu^+_{x_0}}} \int_\Sigma \psi(x_0)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = \frac{1}{2}\, \psi(x_0) + \int_\Sigma \psi(x_0)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x_0,y)\, d\sigma_y. \tag{2.24}$$

Se la (2.11) fosse vera, dalla (2.24) seguirebbe

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in \nu^+_{x_0}}} \int_\Sigma [\psi(y) - \psi(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = \int_\Sigma [\psi(y) - \psi(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x_0,y)\, d\sigma_y \tag{2.25}$$

e, viceversa, se sussistesse la (2.25), dalla (2.24) seguirebbe la (2.11). Le (2.11) e (2.25) sono dunque equivalenti. Dimostreremo la tesi facendo vedere che sussiste la (2.25).

Essendo ovviamente

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in \nu^+_{x_0}}} \int_{\Sigma-\Sigma_{x_0}} [\psi(y) - \psi(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = \int_{\Sigma-\Sigma_{x_0}} [\psi(y) - \psi(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x_0,y)\, d\sigma_y$$

basterà far vedere che

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in \nu^+_{x_0}}} \int_{\Sigma_{x_0}} [\psi(y) - \psi(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = \int_{\Sigma_{x_0}} [\psi(y) - \psi(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x_0,y)\, d\sigma_y\,. \tag{2.26}$$

Introdotto il solito sistema di coordinate η, il primo integrale nella (2.26) si scrive (cfr. (2.14))

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}[\Psi(\eta)-\Psi(0)]\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\gamma_{\eta_k}(\eta)-\gamma(\eta)}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta+\\
\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}[\Psi(\eta)-\Psi(0)]\frac{\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta
\end{gathered}\tag{2.27}$$

Ricordando la (2.15), l'integrando nel primo integrale si maggiora con

$$K\,\frac{|\Psi(\eta)-\Psi(0)|}{|\eta|^{n-1-h}}.$$

Essendo x_0 un punto di Lebesgue (cfr. (2.10)), il lemma 6 assicura la sommabilità di quest'ultima funzione e il teorema della convergenza dominata permette di passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}[\Psi(\eta)-\Psi(0)]&\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\gamma_{\eta_k}(\eta)-\gamma(\eta)}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta=\\
&=\int_{\Sigma_{x_0}}[\psi(y)-\psi(x_0)]\,\frac{\partial}{\partial\nu_y}s(x_0,y)\,d\sigma_y.
\end{aligned}$$

Il secondo integrale nella (2.27) può essere trattato al seguente modo. Definendo σ e σ_0 tramite le (2.17), possiamo scrivere

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}[\Psi(\eta)-\Psi(0)]\frac{\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta=\\
\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}[\Psi(\eta)-\Psi(0)]\left(\frac{\delta}{\sigma^n}-\frac{\delta}{\sigma_0^n}\right)d\eta+\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}[\Psi(\eta)-\Psi(0)]\,\frac{\delta}{\sigma_0^n}\,d\eta
\end{gathered}$$

In base alla (2.20) si ha

$$|\Psi(\eta)-\Psi(0)|\left|\frac{\delta}{\sigma^n}-\frac{\delta}{\sigma_0^n}\right|\leqslant|\Psi(\eta)-\Psi(0)|\frac{n\,K}{|\eta|^{n-1-h}}$$

e ricordando la (2.10), il lemma 6 permette di concludere che la funzione a secondo membro è sommabile. Applicando il teorema della convergenza dominata si trova

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{B_R}[\Psi(\eta)-\Psi(0)]\left(\frac{\delta}{\sigma^n}-\frac{\delta}{\sigma_0^n}\right)d\eta=0\,.$$

La (2.26) (e quindi la (2.25)) sarà dimostrata se facciamo vedere che, dato un $\varepsilon>0$, è possibile scegliere un $R>0$ tale che

$$\int_{B_R}|\Psi(\eta)-\Psi(0)|\,\frac{\delta}{\sigma_0^n}\,d\eta\leqslant\varepsilon. \tag{2.28}$$

Poniamo

$$\Phi(r)=\int_0^r\varrho^{n-2}dr\int_{|\omega|=1}|\Psi(\varrho\,\omega)-\Psi(0)|\,d\sigma_\omega\,;$$

la (2.10) ci dice che, per r minore di un certo R_ε risulta

$$\Phi(r)\leqslant\varepsilon\,r^{n-1}.$$

Allora, per $R<R_\varepsilon$ e qualunque sia $\delta>0$, si ha

$$\int_{B_R}|\Psi(\eta)-\Psi(0)|\,\frac{\delta}{\sigma_0^n}\,d\eta=\int_0^R\frac{\delta\,\Phi'(\varrho)}{(\varrho^2+\delta^2)^{\frac{n}{2}}}\,d\varrho=$$
$$\frac{\delta\,\Phi(R)}{(R^2+\delta^2)^{\frac{n}{2}}}+n\int_0^R\frac{\delta\,\Phi(\varrho)\,\varrho}{(\varrho^2+\delta^2)^{\frac{n}{2}+1}}\,d\varrho\leqslant\frac{\delta\,R^{n-1}}{(R^2+\delta^2)^{\frac{n}{2}}}\,\varepsilon+$$
$$n\,\varepsilon\int_0^R\frac{\delta\,\varrho^n}{(\varrho^2+\delta^2)^{\frac{n}{2}+1}}\,d\varrho\leqslant\varepsilon+n\,\varepsilon\int_0^R\frac{\delta}{\varrho^2+\delta^2}\,d\varrho\leqslant\left(1+n\,\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon$$

ossia la (2.28) (il fattore costante che abbiamo trovato è evidentemente ininfluente) e questo completa la dimostrazione.

Osservazione. Si verifica che, se la $\psi\in C^0(\Sigma)$, tutte le relazioni trovate sono uniformi (rispetto al variare di x_0 in Σ) e quindi la (2.11) sussiste uniformemente. Questo implica che la funzione così definita

$$w(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_\Sigma\psi(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_y}s(x,y)\,d\sigma_y & x\in\Omega\\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2}\,\psi(x)+\int_\Sigma\psi(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_y}s(x,y)\,d\sigma_y & x\in\Sigma\end{cases} \tag{2.29}$$

è continua in $\overline{\Omega}$. Questo segue dal prossimo teorema 10, alla dimostrazione del quale premettiamo un lemma tecnico.

9 *Sia $x \in \Omega$ e sia $\widetilde{x}$ un punto di Σ tale che* [7].

$$|x - \widetilde{x}| = \min_{y \in \Sigma} |x - y| \ . \tag{2.30}$$

Allora il punto x appartiene alla normale a Σ nel punto $\widetilde{x}$, in simboli: $x \in \nu^+_{\widetilde{x}}$.

Introduciamo il sistema di coordinate locali η (che abbiamo usato negli ultimi teoremi) centrato nel punto $\widetilde{x}$. Siano $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ le coordinate di x in questo nuovo sistema di coordinate. Consideriamo la funzione $|x-y|^2$ ristretta a $\Sigma_{\widetilde{x}}$ ed esprimiamola in termini di $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$; otteniamo così la funzione

$$F(\eta) = |\eta - \alpha|^2 + (\gamma(\eta) - \alpha_n)^2 \qquad (\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})).$$

Essendo $|x - y|^2 \geqslant |x - \widetilde{x}|^2$, abbiamo

$$F(\eta) \geqslant F(0) \qquad \forall\, \eta \in B_R$$

e quindi deve essere grad $F(0) = 0$. D'altra parte

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_j}(\eta) = 2(\eta_j - \alpha_j) - 2(\gamma(\eta) - \alpha_n)\,\frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j}(\eta) \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

da cui

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_j}(0) = -2\alpha_j \qquad j = 1, \ldots, n-1.$$

Da ciò segue $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$, ossia la tesi.

10 *Sia u una funzione definita in Ω e verificante le seguenti condizioni:*

i) $u \in C^0(\Omega)$;

ii) fissato comunque $y \in \Sigma$, esiste finito il limite:

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in \nu_y}} u(x) = f(y)\,; \tag{2.31}$$

[7] Si noti che almeno un punto siffatto esiste perché la funzione $|x - y|$ è continua sul compatto Σ.

iii) la relazione di limite (2.31) è uniforme rispetto a $y \in \Sigma$.

Allora la funzione così definita

$$U(x) \begin{cases} = u(x) & x \in \Omega \\ = f(x) & x \in \Sigma \end{cases}$$

è continua in $\overline{\Omega}$.

Non è difficile far vedere che esiste un $\varrho_0 > 0$ tale che il punto

$$y = x + \varrho\, \nu(x)$$

descrive, al variare di $x \in \Sigma$ e $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$, un insieme contenuto in Ω. Le condizioni ii) e iii) possono quindi esprimersi dicendo che per ogni $x \in \Sigma$ risulta

$$\lim_{\varrho \to 0^+} u(x + \varrho\, \nu(x)) = f(x)$$

e che tale relazione di limite è uniforme al variare di $x \in \Sigma$. Essendo la u continua in Ω, la funzione composta $u(x + \varrho\, \nu(x))$ sarà, per ogni fissato $\varrho \in (0, \varrho_0]$, continua al variare di $x \in \Sigma$. Per un teorema ben noto (cfr., ad esempio, il Picone-Fichera, Corso di Analisi Matematica, Vol. II, Ed. Veschi, p.57) la funzione f risulta continua su Σ.

Essendo poi Σ compatto, la f risulta anche uniformemente continua. Possiamo quindi scrivere:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \;:\; \forall\, \xi, \eta \in \Sigma,\; |\xi - \eta| < \delta_\varepsilon \implies |f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon\,. \quad (2.32)$$

Possiamo anche supporre che il δ_ε sia tale che, per ogni $y \in \Sigma$,

$$x \in \nu_y^+,\; |x - y| < \delta_\varepsilon \implies |u(x) - f(y)| < \varepsilon\,. \quad (2.33)$$

È ovvio che la funzione U risulta continua in Ω; per ottenere la tesi basterà far vedere che U è continua su Σ, ossia che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) = f(x_0) \qquad \forall\, x_0 \in \Sigma. \quad (2.34)$$

Sia allora x_0 un punto fissato di Σ e sia x un qualsiasi punto di Ω tale che

$$|x - x_0| < \frac{\delta_\varepsilon}{2}\,.$$

Sia $\widetilde{x}$ un punto di Σ per il quale sussiste la (2.30). Tale punto cadrà in $B_{\delta_\varepsilon}(x_0)$; se, infatti, fosse $\widetilde{x} \notin B_{\delta_\varepsilon}(x_0)$, avremmo $|x - \widetilde{x}| \geqslant \delta_\varepsilon$ e questo contraddice la (2.30), dato che esiste almeno un punto di Σ, x_0, per il quale $|x - x_0| < \frac{\delta_\varepsilon}{2}$. Abbiamo quindi

$$|\widetilde{x} - x_0| < \delta_\varepsilon \ . \tag{2.35}$$

Inoltre risulta

$$|x - \widetilde{x}| \leqslant |x - x_0| < \frac{\delta_\varepsilon}{2} \ . \tag{2.36}$$

Per il lemma 9, si ha $x \in \nu^+_{\widetilde{x}}$, e quindi (2.36) e (2.33) implicano

$$|u(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon \ .$$

D'altra parte (2.35) e (2.32) mostrano che

$$|f(\widetilde{x}) - f(x_0)| < \varepsilon$$

e dunque

$$|u(x) - f(x_0)| \leqslant |u(x) - f(\widetilde{x})| + |f(\widetilde{x}) - f(x_0)| < 2\varepsilon$$

per ogni $x \in \Omega$ tale che $|x - x_0| < \frac{\delta_\varepsilon}{2}$. Ciò dimostra la (2.34) e il teorema è dimostrato.

Osservazione. Le condizioni i) e ii) nel teorema 10, da sole, non bastano ad assicurare la continuità della U. Si consideri, ad esempio, la funzione

$$u(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

nel disco di centro il punto $(0, 1)$ e raggio 1. Si verifica facilmente che sono soddisfatte i) e ii), ma la funzione U non risulta continua in $(0, 0)$. Si noti che in questo caso la funzione f, data dai limiti radiali della u, risulta continua su $\partial\Omega$. Infatti, lo è ovviamente nei punti di $\partial\Omega$ distinti dall'origine. Inoltre, tenendo presente che su $\partial\Omega$, quando un punto tende all'origine rimanendo sulla frontiera, si ha $\vartheta \to 0$ oppure $\vartheta \to \pi$, la funzione $u(x, y) = \cos\vartheta \sin\vartheta \to 0$.

Una conseguenza interessante del fatto che la funzione w (data dalla (2.29)) è continua in $\overline{\Omega}$ se $\psi \in C^0(\Sigma)$, è il seguente risultato, che, d'altra parte, potrebbe essere dimostrato direttamente.

11 *Se $\psi \in C^0(\Sigma)$ l'integrale di doppio strato*

$$\int_\Sigma \psi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y$$

è continuo su Σ.

Nel teorema 8 abbiamo fatto tendere x ad x_0 dall'interno di Ω. Se x tende ad x_0 dall'esterno abbiamo il seguente teorema:

12 *Sia $\psi \in L^1(\Sigma)$ e sia $x_0 \in \Sigma$ un punto di Lebesgue della ψ. Risulta*

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\nu^-_{x_0}}} \int_\Sigma \psi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = -\,\frac{1}{2}\,\psi(x_0) + \int_\Sigma \psi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x_0,y)\, d\sigma_y,$$

dove $\nu^-_{x_0}$ indica la parte contenuta in $\mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$ dell'asse normale a Σ in x_0.

Basta osservare che, se $x \in \nu^-_{x_0}$, allora, ricordando la (2.5), si ha

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\, \frac{1}{\sqrt{1+|\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}}\, \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \gamma_{\eta_k}(\eta) - (\gamma(\eta)+\delta)}{[|\eta|^2 + (\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}$$

Riguardando la dimostrazione della (2.12), si riconosce immediatamente che si ha:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\nu^-_{x_0}}} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = -\,\frac{1}{2} + \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x_0,y)\, d\sigma_y.$$

Dopodiché si può ripetere la dimostrazione della (2.25) per ottenere

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\nu^-_{x_0}}} \int_\Sigma [\psi(y)-\psi(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = \int_\Sigma [\psi(y)-\psi(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x_0,y)\, d\sigma_y$$

e poi la tesi.

Analoghe formule sussistono per la derivata normale del potenziale di semplice strato.

13 *Sia $\psi \in L^1(\Sigma)$ e sia $x_0 \in \Sigma$ un punto di Lebesgue della ψ. Risulta*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}_{x_0}}} \int_\Sigma \psi(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}} s(x,y)\,d\sigma_y = \mp\,\frac{1}{2}\,\psi(x_0) + \int_\Sigma \psi(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}} s(x_0,y)\,d\sigma_y,$$

Queste formule si dimostrano in modo analogo alle precedenti. Il primo passo è far vedere che la formula sussiste per la funzione $\psi\equiv 1$, ossia che

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}_{x_0}}} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}} s(x,y)\,d\sigma_y = \mp\,\frac{1}{2} + \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}} s(x_0,y)\,d\sigma_y\,. \tag{2.37}$$

Come al solito, basterà dimostrare la (2.37) estendendo gli integrali all'insieme Σ_{x_0}. A tal fine, osserviamo che, se $x \in \nu^+_{x_0}$ ($x \in \nu^-_{x_0}$), introdotto il sistema di coordinate η, risulta

$$\nu(x_0) = (0,\dots,0,-1)$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}} s(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-y_k}{|x-y|^n}\,\nu_k(x_0) = \frac{1}{\omega_n}\frac{\gamma(\eta)-\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}} s(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-y_k}{|x-y|^n}\,\nu_k(x_0) = \frac{1}{\omega_n}\frac{\gamma(\eta)+\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\right).$$

Si ha allora, con le notazioni introdotte precedentemente e limitandoci, per fissare le idee, al caso $x\in\nu^+_{x_0}$,

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}} s(x,y)\,d\sigma_y &= \frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}\frac{\gamma(\eta)-\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\sqrt{1+|\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}\,d\eta = \\ &\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}\frac{\gamma(\eta)}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\sqrt{1+|\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}\,d\eta - \\ &\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}\left(\sqrt{1+|\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}-1\right)\frac{\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta - \\ &\frac{1}{\omega_n}\int_{B_R}\frac{\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\,d\eta\,;\end{aligned}$$

ricordando la (2.9) ed applicando il teorema della convergenza dominata, si trova che il primo integrale tende a

$$\int_{\Sigma_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}} s(x_0,y)\,d\sigma_y$$

mentre l'ultimo, in base alla (2.16), tende a $-\frac{1}{2}$.

Per ottenere la (2.37) basta quindi dimostrare che

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{B_R} \left(\sqrt{1+|\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}-1\right) \frac{\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\, d\eta = 0\,;$$

ciò segue dal fatto che [8]

$$\left|\sqrt{1+|\operatorname{grad}\eta(\eta)|^2}-1\right| \leqslant |\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2\,,$$

e quindi, ricordando la (2.8),

$$\left|\int_{B_R} \left(\sqrt{1+|\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}-1\right) \frac{\delta}{[|\eta|^2+(\gamma(\eta)-\delta)^2]^{\frac{n}{2}}}\, d\eta\right| \leqslant \Gamma^2 \int_{B_R} \frac{\delta\,|\eta|^{2h}}{\sigma^n}\, d\eta =$$
$$\Gamma^2 \int_{B_R} \delta\,|\eta|^{2h} \left(\frac{1}{\sigma^n}-\frac{1}{\sigma_0^n}\right) d\eta + \Gamma^2 \int_{B_R} \frac{\delta\,|\eta|^{2h}}{\sigma_0^n}\, d\eta\,.$$

Entrambi gli integrali tendono a 0: per il primo si ricordi la (2.21), mentre per quanto riguarda l'altro, ciò segue dal fatto che

$$\frac{\delta\,|\eta|^{2h}}{\sigma_0^n} = \frac{\delta\,|\eta|^{2h}}{(|\eta|^2+\delta^2)^{\frac{n}{2}}} \leqslant \frac{|\eta|^{2h}}{(|\eta|^2+\delta^2)^{\frac{n-1}{2}}} \leqslant \frac{1}{|\eta|^{n-1-2h}}$$

e quindi si può applicare ancora una volta il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.

Rimane così acquisita la (2.37) e la tesi si ottiene come nei teoremi precedenti.

Nel prossimo paragrafo ci serviranno anche le seguenti proprietà del potenziale di semplice strato

14 *Sia $\psi \in L^\infty(\Sigma)$. Il potenziale di semplice strato*

$$u(x) = \int_\Sigma \psi(y)\, s(x,y)\, d\sigma_y \tag{2.38}$$

è continuo in tutto $\mathbb{R}^n$.

[8] Si osservi che

$$|\sqrt{1+a^2}-1| = \left|\frac{(\sqrt{1+a^2}-1)(\sqrt{1+a^2}+1)}{\sqrt{1+a^2}+1}\right| \leqslant \frac{a^2}{2}\,.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = u(x_0) \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.39}$$

Se $x_0 \notin \Sigma$, la (2.39) è ovvia. Supponiamo, quindi, $x_0 \in \Sigma$ e introduciamo il sistema di riferimento η considerato nei teoremi 7, 8.

È chiaro che

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\Sigma - \Sigma_{x_0}} \psi(y)\, s(x,y)\, d\sigma_y = \int_{\Sigma - \Sigma_{x_0}} \psi(y)\, s(x_0,y)\, d\sigma_y$$

e che quindi basterà dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\Sigma_{x_0}} \psi(y)\, s(x,y)\, d\sigma_y = \int_{\Sigma_{x_0}} \psi(y)\, s(x_0,y)\, d\sigma_y\ . \tag{2.40}$$

Indicate con $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ le coordinate del punto x nel nuovo sistema di riferimento e posto $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$, la (2.40) equivale al seguente passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{gathered}\lim_{(\xi_1,\dots,\xi_n) \to (0,\dots,0)} \int_{B_R} \Psi(\eta)\, \frac{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|^2}}{[|\eta - \xi|^2 + (\gamma(\eta) - \xi_n)^2]^{\frac{n-2}{2}}}\, d\eta = \\ \int_{B_R} \Psi(\eta)\, \frac{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|^2}}{[|\eta|^2 + \gamma^2(\eta)]^{\frac{n-2}{2}}}\, d\eta\ .\end{gathered} \tag{2.41}$$

Per ogni insieme misurabile $E \subset B_R$, possiamo scrivere

$$\int_E |\Psi(\eta)|\, \frac{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|^2}}{[|\eta - \xi|^2 + (\gamma(\eta) - \xi_n)^2]^{\frac{n-2}{2}}}\, d\eta \leqslant K \int_E \frac{d\eta}{|\eta - \xi|^{n-2}}$$

con la costante K indipendente da E. Essendo, ovviamente, $n - 2 < n - 1$, il teorema 1 mostra che esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $E \subset B_R$ con $|E| < \delta_\varepsilon$,

$$\int_E |\Psi(\eta)|\, \frac{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|^2}}{[|\eta - \xi|^2 + (\gamma(\eta) - \xi_n)^2]^{\frac{n-2}{2}}}\, d\eta < \varepsilon\ .$$

Il teorema di Vitali giustifica, allora, la (2.41).

15 *Sia u il potenziale di semplice strato (2.38) con $\psi \in C^0(\Sigma)$. Si ha*

$$\int_\Sigma u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\, dx \tag{2.42}$$

dove

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu^+_{x_0}}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,.$$

La (2.42) è conseguenza della classica formula di Gauss-Green se $\psi \in C^\lambda(\Sigma)$. Infatti, in tal caso, si potrebbe dimostrare (teorema tutt'altro che banale !) che la u risulta di classe $C^{1+\lambda'}(\overline{\Omega})$. Tuttavia se $\psi \in C^0(\Sigma)$ non è più detto che la u appartenga a questa classe. Anzi, non è neanche ovvio che l'integrale del $|\operatorname{grad} u|^2$ risulti finito. È necessario, quindi, dimostrare la (2.42) direttamente.

Ricordando il teorema 13 abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = -\frac{1}{2}\psi(x) + \int_\Sigma \psi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_x} s(x,y)\, d\sigma_y$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma &= -\frac{1}{2}\int_\Sigma \psi(x)\, d\sigma_x \int_\Sigma \psi(t)\, s(x,t)\, d\sigma_t + \\
&\int_\Sigma d\sigma_x \int_\Sigma \psi(t)\, s(x,t)\, d\sigma_t \int_\Sigma \psi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_x} s(x,y)\, d\sigma_y = \qquad (2.43)\\
&\int_\Sigma \int_\Sigma \psi(t)\, \psi(y) \left[-\frac{1}{2} s(y,t) + \int_\Sigma s(x,t)\, \frac{\partial}{\partial \nu_x} s(x,y)\, d\sigma_x \right] d\sigma_t\, d\sigma_y\,.
\end{aligned}$$

Prendiamo due punti y' e t' fuori di $\overline{\Omega}$; per le usuali formule di Gauss-Green possiamo scrivere

$$\int_\Sigma s(x,t')\, \frac{\partial}{\partial \nu_x} s(x,y')\, d\sigma_x = \int_\Omega \sum_{h=1}^n s_{x_h}(x,t')\, s_{x_h}(x,y')\, dx \tag{2.44}$$

poiché, in questo caso, le funzioni della x: $s(x,t')$ e $s(x,y')$ sono regolari in tutto $\overline{\Omega}$. Se facciamo tendere t' verso un punto $t \in \Sigma$ (mantenendo $t' \in \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$), si trova

$$\int_\Sigma s(x,t)\, \frac{\partial}{\partial \nu_x} s(x,y')\, d\sigma_x = \int_\Omega \sum_{h=1}^n s_{x_h}(x,t)\, s_{x_h}(x,y')\, dx \tag{2.45}$$

dato che il primo membro può essere pensato come un potenziale di semplice strato con densità continua (cfr. teorema 14), mentre, in base al teorema 5, si può passare al limite sotto il segno di integrale al secondo membro di (2.44), essendo

$$s_{x_h}(x,t) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x-t|^{n-1}}\right)$$

(si noti che y' è certamente distinto da t).

Se ora nella (2.45) facciamo tendere y' verso $y \in \Sigma$ (mantenendo $y' \in \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$), ricordando il teorema 12, abbiamo

$$-\frac{1}{2}s(y,t) + \int_\Sigma s(x,t)\,\frac{\partial}{\partial \nu_x}s(x,y)\,d\sigma_x = \int_\Omega \sum_{h=1}^n s_{x_h}(x,t)\,s_{x_h}(x,y)\,dx \qquad (2.46)$$

(anche qui si può passare al limite sotto il segno di integrale nel secondo membro di (2.45), grazie al teorema 5, per $y \neq t$).

Sostituendo la (2.46) nella (2.43), troviamo

$$\int_\Sigma u\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma = \int_\Sigma \int_\Sigma \psi(t)\,\psi(y)\,d\sigma_t\,d\sigma_y \int_\Omega \sum_{h=1}^n s_{x_h}(x,t)\,s_{x_h}(x,y)\,dx$$

da cui, per i teoremi di Tonelli e Fubini e per il fatto che un potenziale di semplice strato può essere derivato sotto il segno di integrale all'interno di Ω (verificare tutti i dettagli !),

$$\int_\Sigma u\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma = \sum_{h=1}^n \int_\Omega dx \int_\Sigma \psi(t)\,s_{x_h}(x,t)\,d\sigma_t \int_\Sigma \psi(y)\,s_{x_h}(x,y)\,d\sigma_y =$$
$$\sum_{h=1}^n \int_\Omega u_{x_h}u_{x_h}dx = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx\ .$$

È interessante osservare che questa dimostrazione seguita a valere se $\psi \in L^2(\Sigma)$ e quindi la (2.42) è vera sotto quest'ipotesi più generale.

Una formula analoga alla (2.42) sussiste nel complementare di Ω, anche se, nel caso $n=2$, c'è una piccola complicazione.

16 *Sia u il potenziale di semplice strato (2.38) con $\psi \in C^0(\Sigma)$. Se $n \geqslant 3$ si ha*

$$-\int_\Sigma u\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma = \int_{\mathbb{R}^n-\overline{\Omega}} |\operatorname{grad} u|^2\,dx \qquad (2.47)$$

dove

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu_{x_0}^-}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,.$$

Se $n = 2$ la (2.47) sussiste se la densità ψ ha media nulla:

$$\int_\Sigma \psi \, ds = 0\,. \tag{2.48}$$

Consideriamo prima il caso $n \geqslant 3$; sia B_R una palla di centro l'origine e raggio R abbastanza grande in modo tale che $\overline{\Omega}$ sia contenuto al suo interno. Analogamente a quanto fatto per il teorema 15 si trova

$$-\int_\Sigma u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma - \int_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = \int_{B_R - \Omega} |\operatorname{grad} u|^2 \, dx\ . \tag{2.49}$$

D'altra parte è immediato constatare che

$$u(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right), \qquad |\operatorname{grad} u(x)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right)$$

e quindi

$$\left|\int_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma\right| \leqslant K \frac{1}{R^{n-2}} \frac{1}{R^{n-1}} \int_{\partial B_R} d\sigma = K \frac{\omega_n}{R^{n-2}}\ .$$

Passando al limite per $R \to \infty$ nella (2.49) si perviene alla (2.47).

Sia ora $n = 2$ e supponiamo soddisfatta la (2.48). Sotto questa ipotesi si ha

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0\,; \tag{2.50}$$

infatti possiamo scrivere

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \psi(y) \log|x - y| \, ds_y =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \psi(y) \log|x-y| \, ds_y - \log|x| \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \psi(y) \, ds_y = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \psi(y) \log \frac{|x-y|}{|x|} \, ds_y$$

e la (2.50) segue dal fatto che

$$\lim_{|x| \to \infty} \log \frac{|x - y|}{|x|} = 0$$

uniformemente al variare di $y \in \Sigma$ (verificarlo !).

Come nel caso $n \geqslant 3$, prendiamo ora un disco B_R tale che $\Omega \subset\subset B_R$ e scriviamo la (2.49); si ha

$$\left| \int_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \right| \leqslant K \max_{|x|=R} |u(x)| \frac{1}{R} \int_{\partial B_R} ds = 2\,\pi\, K \max_{|x|=R} |u(x)|$$

e la (2.50) implica che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0$$

e quindi la tesi, passando al limite per $R \to \infty$ nella (2.49).

Osservazione. Nel caso $n = 2$, la (2.47) è falsa senza l'ipotesi (2.48). Si prenda, ad esempio, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ e $\psi(y) \equiv 1$. Possiamo calcolare esplicitamente il potenziale di semplice strato

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \log |x-y|\, ds_y\,.$$

Per ragioni di simmetria la funzione u è costante su Σ (si può verificare direttamente, scrivendo l'integrale in termini del parametro $\vartheta \in [0, 2\pi]$). Allora u è soluzione del problema di Dirichlet (si ricordi il teorema 14)

$$\begin{cases} u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \\ \Delta_2 u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = c & \text{su } \Sigma\ . \end{cases}$$

Ma allora deve essere $u(x) = c$ per ogni $x \in \Omega$; d'altra parte, essendo

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \log |y|\, ds_y = 0$$

non può che essere $c = 0$. Consideriamo ora $\mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}$; la funzione

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \log \frac{|x-y|}{|x|}\, ds_y$$

è soluzione del problema di Dirichlet esterno

$$\begin{cases} v \in C^0(\mathbb{R}^2 - \Omega) \cap C^2(\mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}) & \\ \Delta_2 v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 - \overline{\Omega} \\ v = 0 & \text{su } \Sigma \\ v(\infty) = 0\,; & \end{cases}$$

e non è difficile verificare che questo implica $v \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 - \Omega$.

Abbiamo dunque dimostrato che

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \log|x-y|\, ds_y \begin{cases} = 0 & x \in \overline{\Omega} \\ = \log|x| & x \in \mathbb{R}^2 - \Omega \end{cases} .$$

Essendo quindi

$$|\operatorname{grad} u(x)| = \frac{1}{|x|} \qquad |x| > 1$$

non abbiamo neanche la sommabilità del $|\operatorname{grad} u|^2$ in $\mathbb{R}^2 - \Omega$:

$$\int_{\mathbb{R}^2-\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{d\varrho}{\varrho} = \infty$$

e, comunque, anche ammettendo il valore $+\infty$ nella (2.47), questa non vale, dato che

$$\int_\Sigma u\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = 0\,.$$

3 Il problema di Dirichlet

In questo paragrafo vogliamo far vedere come, tramite l'uso della teoria del potenziale, si possa pervenire a risolvere il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \\ \Delta_2 u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{su } \Sigma \end{cases} \tag{3.1}$$

essendo $f \in C^0(\Sigma)$ assegnata. È questo il classico metodo di Fredholm, che per primo, nel 1903, dimostrò il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet in un campo Ω di forma arbitraria, risolvendo così un problema che era rimasto fermo dal 1877, da quando, cioè, Neumann aveva dimostrato l'esistenza per campi convessi.

È interessante osservare che, come vedremo, questo metodo non solo fornisce un teorema di esistenza, ma anche una rappresentazione integrale della soluzione. Ciò è importante anche dal punto di vista numerico.

Di fatto dimostreremo l'esistenza della soluzione assegnando il dato f nello spazio $L^p(\Sigma)$. In questo caso dobbiamo specificare in che senso la condizione $u = f$ viene assunta e in che classe andiamo a cercare la soluzione.

Indichiamo con $\mathcal{F}^p(\Omega)$ la classe delle funzioni che si lasciano rappresentare da un potenziale di doppio strato con densità in $L^p(\Sigma)$, *i.e.*:

$$u \in \mathcal{F}^p(\Omega) \iff \exists\, \psi \in L^p(\Sigma)\ :\ u(x) = \int_\Sigma \psi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y \quad (x \in \Omega)$$

e la condizione $u = f$ su Σ significa che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu_{x_0}^+}} u(x) = f(x_0) \qquad q.o. \text{ su } \Sigma.$$

17 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato tale che la sua frontiera Σ sia di Lyapunov. Sia, inoltre, $\mathbb{R}^n - \Omega$ connesso. Sia $f \in L^p(\Sigma)$ con $1 < p < \infty$. Esiste una e una sola soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{F}^p(\Omega) \\ \Delta_2 u = 0 & \textit{in } \Omega \\ u = f & \textit{su } \Sigma\ . \end{cases} \tag{3.2}$$

Qualunque sia $\psi \in L^p(\Sigma)$, la funzione

$$u(x) = \int_\Sigma \psi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y \tag{3.3}$$

risulta armonica in Ω. Quindi la (3.3) è soluzione del problema (3.2) se e solo se la u soddisfa la condizione al contorno. In base al teorema 8, questo avviene se e solo se

$$\frac{1}{2}\,\psi(x) + \int_\Sigma \psi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = f(x) \qquad q.o.\ x \in \Sigma. \tag{3.4}$$

Dimostreremo che, per ogni $f \in L^p(\Sigma)$, l'equazione integrale (3.4) ammette una ed una sola soluzione $\psi \in L^p(\Sigma)$. Cominciamo con l'osservare che il nucleo di questa equazione integrale presenta una singolarità debole. Infatti si ha

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1-h}}\right) \tag{3.5}$$

(cfr. la (2.15), dove è possibile verificare che la costante K può scegliersi indipendente da x_0. In alternativa si veda il lemma 39 più avanti).

Il teorema 3 assicura che l'operatore

$$T\psi(x) = \int_\Sigma \psi(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y)\,d\sigma_y$$

è compatto da $L^p(\Sigma)$ in sé stesso. All' equazione integrale (3.4) si può applicare la teoria di Riesz-Fredholm e quindi per tale equazione vale il *principio dell'alternativa.*

Allora, per dimostrare che per ogni $f \in L^p(\Sigma)$ esiste una soluzione, basterà far vedere che il nucleo dell'equazione trasposta è banale, ossia che l'unica $\gamma \in L^q(\Sigma)$ $(q = \frac{p}{p-1})$ tale che

$$\frac{1}{2}\,\gamma(x) + \int_\Sigma \gamma(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_x} s(x,y)\,d\sigma_y = 0 \qquad q.o.\ x \in \Sigma \tag{3.6}$$

è la funzione nulla.

Supponiamo che $\gamma \in L^q(\Sigma)$ sia un'autosoluzione dell'equazione (3.6), che riscriviamo brevemente come

$$\gamma - F\gamma = 0\,, \tag{3.7}$$

dove

$$F\gamma(x) = -2\int_\Sigma \gamma(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_x} s(x,y)\,d\sigma_y\,.$$

Dalla (3.7) segue che, fissato un qualsiasi $m \in \mathbb{N}$, si ha

$$F\gamma - F^2\gamma = 0\,, \ldots,\ F^{m-1}\gamma - F^m\gamma = 0$$

e quindi, sommando tutte le relazioni ottenute,

$$\gamma - F^m\gamma = 0\ . \tag{3.8}$$

D'altra parte, essendo il nucleo dell'operatore F un

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1-h}}\right),$$

applicando più volte il teorema 4, si vede facilmente che l'operatore F^m è un operatore integrale, per il nucleo del quale, $K_m(x,y)$, si ha

$$K_m(x,y) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1-mh}}\right).$$

Scelto m in modo tale che
$$m > \frac{n-1}{h}$$
il nucleo di $K_m(x,y)$ sarà continuo su $\Sigma \times \Sigma$ (si tenga presente anche il teorema 5). Questo implica che la funzione
$$\int_\Sigma \gamma(y)\, K_m(x,y)\, d\sigma_y$$
è continua su Σ (dimostrarlo !) e quindi, ricordando la (3.8), si trae che $\gamma \in C^0(\Sigma)$.

Allora il potenziale di semplice strato
$$v(x) = \int_\Sigma \gamma(y)\, s(x,y)\, d\sigma_y$$
è tale che
$$\frac{\partial v}{\partial \nu^-}(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \Sigma.$$

Il teorema 16 mostra che v è costante in $\mathbb{R}^n - \Omega$. Si noti che è soddisfatta anche la condizione (2.48), dato che dalla (3.6) segue
$$\frac{1}{2}\int_\Sigma \gamma(x)\, d\sigma_x + \int_\Sigma d\sigma_x \int_\Sigma \gamma(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_x} s(x,y)\, d\sigma_y = 0$$
ossia
$$0 = \frac{1}{2}\int_\Sigma \gamma(x)\, d\sigma_x + \int_\Sigma d\sigma_y \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_x} s(x,y)\, d\sigma_x = \int_\Sigma \gamma(x)\, d\sigma_x$$
(si ricordi la (2.22) !) e quindi la (2.47) sussiste anche per $n = 2$.

Essendo, per il teorema 14, v continua in tutto $\mathbb{R}^n$, si ha $v = 0$ su Σ. Inoltre $v(x)$ è una funzione armonica in Ω e continua in $\overline{\Omega}$; essendo nulla su Σ, deve essere $v \equiv 0$ anche in Ω.

Abbiamo fatto vedere, dunque, che $v \equiv 0$ in tutto $\mathbb{R}^n$. Ma allora (per il teorema 13)
$$0 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu_{x_0}^-}} \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu_{x_0}^+}} \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = \gamma(x_0) \tag{3.9}$$
per ogni $x_0 \in \Sigma$. È così dimostrato che l'equazione (3.6) non ha autosoluzioni e quindi la (3.4) ammette una ed una sola soluzione per ogni termine noto $f \in L^p(\Sigma)$.

Questo dimostra anche l'unicità; infatti, se esistessero due potenziali di doppio strato, entrambi soluzioni dello stesso problema di Dirichlet (3.2), che indichiamo con w_1 e w_2 di densità rispettivamente ψ_1 e ψ_2, la funzione $\psi_1 - \psi_2$ sarebbe soluzione dell'equazione omogenea

$$\frac{1}{2}\gamma(x) + \int_\Sigma \gamma(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y)\,d\sigma_y = 0 \qquad q.o.\ x \in \Sigma.$$

Non essendoci, per quanto visto, autosoluzioni, dovrà essere $\psi_1 = \psi_2$ e quindi $w_1 = w_2$.

Osservazione. Se la $f \in C^0(\Sigma)$, si può dimostrare che la soluzione ψ dell'equazione integrale (3.4) risulta continua su Σ e quindi il potenziale di doppio strato (3.3) risulta continuo in $\overline{\Omega}$ (cfr. teorema 11). Si ottiene così l'esistenza per il problema di Dirichlet "classico" (3.1).

Come applicazione di questo teorema, dimostriamo il seguente teorema, che fornisce una sorta di *principio del massimo* per funzioni armoniche in norma L^p.

18 *Esiste una costante K tale che*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K\,\|u\|_{L^p(\Sigma)} \qquad \forall\ u \in \mathcal{F}^p(\Omega).$$

Sia u data da (3.3). Osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\right) \qquad x \in \Omega,\ y \in \Sigma$$

(si noti la differenza con la (3.5), dove $x \in \Sigma$!).

Allora, fissato un $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$0 < k < \frac{1}{p} \tag{3.10}$$

abbiamo

$$|u(x)| \leqslant A \int_\Sigma \frac{|\psi(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,d\sigma_y = A \int_\Sigma \frac{|\psi(y)|}{|x-y|^{\frac{n-1}{p}+k+\frac{n-1}{q}-k}}\,d\sigma_y$$

da cui, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Hölder,

$$|u(x)| \leqslant A\left(\int_\Sigma \frac{|\psi(y)|^p}{|x-y|^{n-1+kp}}\,d\sigma_y\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Sigma \frac{d\sigma_y}{|x-y|^{n-1-kq}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ripetendo i ragionamenti fatti nel teorema 14, si verifica che, essendo $n-1-kq < n-1$, la funzione

$$\lambda(x) = \int_\Sigma \frac{d\sigma_y}{|x-y|^{n-1-kq}}$$

è continua in tutto $\mathbb{R}^n$ e quindi limitata in $\overline{\Omega}$. Possiamo dunque scrivere

$$|u(x)|^p \leqslant B \int_\Sigma \frac{|\psi(y)|^p}{|x-y|^{n-1+kp}}\, d\sigma_y$$

da cui, integrando su Ω e applicando il teorema di Tonelli, si trae

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leqslant B \int_\Sigma |\psi(y)|^p d\sigma_y \int_\Omega \frac{dx}{|x-y|^{n-1+kp}} \ .$$

Ma essendo, per la (3.10), $n-1+kp < n$, l'integrale

$$\int_\Omega \frac{dx}{|x-y|^{n-1+kp}}$$

risulta limitato e quindi

$$\int_\Omega |u|^p dx \leqslant C \int_\Sigma |\psi|^p d\sigma \ . \tag{3.11}$$

Infine, dalla teoria delle equazioni di Fredholm, sappiamo che esiste una costante D tale che, se ψ è soluzione dell'equazione (che, come abbiamo visto è sprovvista di autosoluzioni)

$$\frac{1}{2}\,\psi(x) + \int_\Sigma \psi(y)\, \frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = u(x) \qquad q.o.\ x \in \Sigma\,,$$

allora

$$\|\psi\|_{L^p(\Sigma)} \leqslant D\, \|u\|_{L^p(\Sigma)}.$$

Da questa disuguaglianza e dalla (3.11) si ottiene la tesi.

4 Il problema di Neumann

Il metodo che abbiamo illustrato nel paragrafo precedente si applica in modo analogo allo studio del problema di Neumann:

$$\begin{cases} u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \\ \Delta_2 u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f & \text{su } \Sigma \end{cases} \tag{4.1}$$

dove $f \in C^0(\Sigma)$ è una funzione assegnata. Si noti che affinché il problema (4.1) possa avere soluzione,non è possibile assegnare la f arbitrariamente, ma è necessario, per le formule di Green, che si abbia

$$\int_\Sigma f \, d\sigma = 0 \, .$$

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, considereremo il problema in una classe più ampia, assegnando il dato nello spazio $L^p(\Sigma)$. Precisamente cercheremo la soluzione nello spazio $\mathcal{S}^p(\Omega)$ delle funzioni armoniche che si lasciano rappresentare da un potenziale di semplice strato densità in $L^p(\Sigma)$, *i.e.*:

$$u \in \mathcal{S}^p(\Omega) \iff \exists \, \psi \in L^p(\Sigma) \; : \; u(x) = \int_\Sigma \psi(y) \, s(x,y) \, d\sigma_y \quad (x \in \Omega)$$

e interpreteremo la condizione su Σ nel senso che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu^+_{x_0}}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = f(x_0) \qquad q.o. \text{ su } \Sigma.$$

19 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato tale che la sua frontiera Σ sia di Lyapunov. Sia, inoltre, $\mathbb{R}^n - \Omega$ connesso. Sia $f \in L^p(\Sigma)$ con $1 < p < \infty$ tale che*

$$\int_\Sigma f \, d\sigma = 0 \, . \tag{4.2}$$

Esiste una soluzione del problema di Neumann

$$\begin{cases} u \in \mathcal{S}^p(\Omega) & \\ \Delta_2 u = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f & \text{su } \Sigma \; . \end{cases} \tag{4.3}$$

Se $\widetilde{u}$ è un'altra soluzione del medesimo problema, risulta $\widetilde{u} = u + c$ (con c costante).

Rappresentando la soluzione cercata con un potenziale di densità incognita φ:

$$u(x) = \int_\Sigma \varphi(y)\, s(x,y)\, d\sigma_y$$

e imponendo la condizione al contorno (cfr. teorema 13), si ottiene la seguente equazione integrale nell'incognita φ:

$$-\frac{1}{2}\,\varphi(x) + \int_\Sigma \varphi(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_x} s(x,y)\, d\sigma_y = f(x) \qquad \text{q.o. } x \in \Sigma. \tag{4.4}$$

Tale equazione, quando considerata in uno spazio $L^p(\Sigma)$, risulta essere un'equazione di Fredholm. Esiste quindi una soluzione $\varphi \in L^p(\Sigma)$ se e solo se il termine noto $f \in L^p(\Sigma)$ è ortogonale a tutte le autosoluzioni dell'equazione trasposta, ossia se e solo se

$$\int_\Sigma f\,\psi\, d\sigma = 0 \tag{4.5}$$

per ogni $\psi \in L^q(\Sigma)$ tale che

$$-\frac{1}{2}\,\psi(x) + \int_\Sigma \psi(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = 0 \qquad \text{q.o. } x \in \Sigma. \tag{4.6}$$

È evidente che le costanti sono autosoluzioni dell'equazione (4.6) (si ricordi la (2.23) per $x \in \Sigma$). Vogliamo ora dimostrare che non esistono altre autosoluzioni.

In base alla teoria di Riesz-Fredholm, l'equazione (4.6) e l'equazione omogenea associata alla (4.4):

$$-\frac{1}{2}\,\gamma(x) + \int_\Sigma \gamma(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_x} s(x,y)\, d\sigma_y = 0 \qquad \text{q.o. } x \in \Sigma. \tag{4.7}$$

hanno lo stesso numero di soluzioni linearmente indipendenti. Otterremo che la (4.6) non ha altre autosoluzioni mostrando che la (4.7) non può avere due autosoluzioni linearmente indipendenti.

Siano, dunque, γ_1 e γ_2 due autosoluzioni di (4.7) linearmente indipendenti. Sia u_j il potenziale di semplice strato di densità γ_j:

$$u_j(x) = \int_\Sigma \gamma_j(y)\, s(x,y)\, d\sigma_y \qquad (j = 1, 2).$$

Ragionando come nel teorema 17, si vede che le γ_j, a priori in $L^q(\Sigma)$, devono essere in $C^0(\Sigma)$. Questo implica che i potenziali u_j sono continui in tutto $\mathbb{R}^n$ (teorema 14). Essendo le γ_j soluzioni dell'equazione omogenea (4.7), risulta

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{su } \Sigma.$$

La (2.42) mostra che $u_j(x) = d_j$ in Ω.

È evidente che possiamo scegliere due costanti c_1, c_2 non entrambe nulle tali che

$$c_1 \int_\Sigma \gamma_1 \, d\sigma + c_2 \int_\Sigma \gamma_2 \, d\sigma = 0\,. \tag{4.8}$$

Sia $\gamma = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2$ e

$$u(x) = \int_\Sigma \gamma(y)\, s(x,y)\, d\sigma_y\ .$$

Risulta $u = c_1u_1 + c_2u_2$ e quindi la u è costante in Ω, diciamo $u = c$. Considerando ora il complementare di Ω; la condizione (4.8) significa che la γ ha media nulla, e quindi sussiste la (2.47) per ogni n; questa formula, essendo $u = c$ su Σ, può essere riscritta come

$$-c \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu^-}\, d\sigma = \int_{\mathbb{R}^n - \Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

(con un ovvio significato di $\partial\nu^-$). D'altra parte, essendo (cfr. la (3.9))

$$\frac{\partial u}{\partial \nu^-} - \frac{\partial u}{\partial \nu^+} = \gamma$$

si ha

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu^-}\, d\sigma - \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_+}\, d\sigma = \int_\Sigma \gamma\, d\sigma$$

e quindi, tenendo presente che la γ ha media nulla,

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu^+}\, d\sigma = \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_-}\, d\sigma\,.$$

Ricordando il teorema 15 e il fatto che la u è costante in Ω,

$$0 = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx = c\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu^+}\, d\sigma = c\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_-}\, d\sigma = -c\int_{\mathbb{R}^n - \Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

e quindi $u = c$ anche in $\mathbb{R}^n - \Omega$.

D'altra parte, se $n \geqslant 3$, il potenziale di semplice strato u tende a 0 all'infinito. Ciò è vero anche se $n = 2$, dato che abbiamo visto, nel corso della dimostrazione del teorema 16, che, se la densità ha media nulla, allora il relativo potenziale di semplice strato tende a 0 all'infinito.

In ogni caso, abbiamo $c = 0$ e quindi risulta $\gamma = 0$ per la (2.47). Ciò significa che $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 = 0$ su Σ, e questo è assurdo per la supposta indipendenza lineare.

Abbiamo così dimostrato che l'equazione (4.7) non può avere due autosoluzioni linearmente indipendenti. Ciò implica che le uniche autosoluzioni dell'equazione (4.6) sono le costanti. Le condizioni di compatibilità (4.5) sono quindi soddisfatte se e solo se f ha media nulla, ossia se e solo se sussiste la (4.2).

Sia ora $\widetilde{u}$ un'altra soluzione del problema (4.3); il potenziale $\widetilde{u} - u$ è soluzione di un problema di Neumann dove il dato è $f = 0$. Ricordando la (2.42), si ha $\widetilde{u} - u = c$ e il teorema è così completamente dimostrato.

Osservazione. Nel corso della dimostrazione sono stati considerati, in sostanza, dei problemi di Dirichlet esterni. È interessante, a tale proposito, osservare quanto segue. Consideriamo il caso $n = 2$ e sia u una funzione armonica "abbastanza regolare" nel complementare di Ω, infinitesima all'infinito. Si può dimostrare che una siffatta funzione si deve poter rappresentare con un potenziale di semplice strato, la densità del quale indichiamo con γ. Come abbiamo già visto, essendo la u infinitesima all'infinito, si deve avere che γ ha media nulla. Supponiamo ora che la u sia uguale ad una costante c su Σ; in base ai ragionamenti eseguiti nella dimostrazione precedente, si deve avere $c = 0$, ossia non esistono funzioni armoniche nel complementare di Ω che siano costanti su Σ ed infinitesime all'infinito, tranne il caso della funzione identicamente nulla.

Ciò è in contrasto con quanto accade in dimensione superiore. Sia, infatti, $n \geqslant 3$ e $\Omega = B_1(0)$; la funzione

$$u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

risulta armonica nel complementare di Ω, uguale ad 1 su Σ ed infinitesima all'infinito.

5 Il potenziale di campo

Dati tre numeri (m, s, α) con m reale non negativo, s intero non negativo ed $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, diremo che la funzione k appartiene a $Z(m, s, \alpha)$ se

i) k è definita in $\mathbb{R}^n - \{0\}$;

ii) $k(\lambda x) = \dfrac{1}{\lambda^m} k(x) \qquad \forall\, \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$;

iii) $k \in C^{s,\alpha}(\mathbb{R}^n - \{0\})$

dove l'ultima condizione significa che la funzione k è di classe C^s e, se $0 < \alpha \leqslant 1$, le sue derivate di ordine s soddisfano, su ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$, una condizione uniforme di Hölder di esponente α; se, invece, $\alpha = 0$, significa semplicemente che k è di classe C^s. Scrivendo $k \in Z(m, \infty, 0)$ intenderemo che k, oltre a verificare la i) e la ii), appartiene a C^∞.

Osserviamo che, in base alla ipotesi fatte su k, il nucleo $k(x-y)$ soddisfa una condizione del tipo (1.2), dato che

$$k(x-y) = k\left(|x-y|\,\frac{x-y}{|x-y|}\right) = \frac{1}{|x-y|^m}\,k\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)$$

e quindi, variando il punto $\frac{x-y}{|x-y|}$ sulla sfera unitaria dove k è continua,

$$|k(x-y)| \leqslant \frac{H_0}{|x-y|^m} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \neq y.$$

Oggetto di questo paragrafo è lo studio dei potenziali del tipo

$$\int_\Omega \varphi(y)\,k(x-y)\,dy\ .$$

Osserviamo che la soluzione fondamentale e le sue derivate sono nuclei del tipo $k(x-y)$, con k appartenente a qualche classe Z; infatti abbiamo

$$s(x,y) = k(x-y), \qquad k(x) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\,\frac{1}{|x|^{n-2}}\ (n \geqslant 3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} s(x,y) = k(x-y), \qquad k(x) = \frac{1}{\omega_n}\,\frac{x_k}{|x|}\,;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y) = k(x-y), \qquad k(x) = \frac{\delta_{hk}}{|x-y|^n} - n\,\frac{x_h x_k}{|x-y|^{n+2}}$$

e dunque abbiamo, rispettivamente nei tre casi, $k \in Z(n-2, \infty, 0)$, $k \in Z(n-1, \infty, 0)$, $k \in Z(n, \infty, 0)$.

20 *Fissato un numero reale $m < n$ ed un $\varepsilon > 0$, esiste un r_ε tale che, se $0 < \delta \leqslant r_e$, qualunque sia il punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, risulta*

$$\int_{B_\delta(x_0)} \frac{dy}{|x-y|^m} < \varepsilon \qquad \forall\, x \in B_\delta(x_0).$$

Basta scegliere r_ε in modo tale che sia

$$\int_{B_{2r_\varepsilon}(0)} \frac{dy}{|y|^m} < \varepsilon$$

(un tale r_ε esiste certamente per la sommabilità dell'integrando). Infatti, se $x, y \in B_\delta(x_0)$ risulta $|y-x| \leqslant |y-x_0| + |x-x_0| < 2\delta$, ossia

$$x \in B_\delta(x_0) \implies B_\delta(x_0) \subset B_{2\delta}(x)\,; \tag{5.1}$$

possiamo allora scrivere

$$\int_{B_\delta(x_0)} \frac{dy}{|x-y|^m} \leqslant \int_{B_{2\delta}(x)} \frac{dy}{|x-y|^m} = \int_{B_{2\delta}(0)} \frac{dy}{|y|^m} < \varepsilon$$

per $0 < \delta \leqslant r_\varepsilon$. Si noti che, se $m \geqslant 0$, questo risultato poteva essere dedotto dal teorema 1.

21 *Sia $k \in Z(m,0,0)$ con $m < n$ e sia $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il potenziale*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy \tag{5.2}$$

è continuo su tutto $\mathbb{R}^n$.

Fissiamo un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e stimiamo la differenza $|u(x) - u(x_0|$; considerato un $\delta > 0$, risulta

$$|u(x) - u(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, k(x_0-y)\, dy \right| \leqslant$$
$$\left| \int_{\mathbb{R}^n - B_\delta(x_0)} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n - B_\delta(x_0)} \varphi(y)\, k(x_0-y)\, dy \right| +$$
$$\left| \int_{B_\delta(x_0)} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy \right| + \left| \int_{B_\delta(x_0)} \varphi(y)\, k(x_0-y)\, dy \right| .$$

Essendo $|\varphi| \leqslant M$ q.o., possiamo maggiorare nel modo seguente:

$$\left| \int_{B_\delta(x_0)} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy \right| \leqslant \int_{B_\delta(x_0)} |\varphi(y)|\, |k(x-y)|\, dy \leqslant$$
$$M\, H_0 \int_{B_\delta(x_0)} \frac{dy}{|x-y|^m}$$

e quindi, ricordando il lemma 20, possiamo dire che esiste un r_ε tale che, se $0 < \delta < r_\varepsilon$, risulta

$$\left| \int_{B_\delta(x_0)} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy \right| < \varepsilon \qquad \forall\, x:\ |x-x_0| < r_\varepsilon.$$

Analogamente si ha

$$\left| \int_{B_\delta(x_0)} \varphi(y)\, k(x_0-y)\, dy \right| < \varepsilon \qquad (\delta < r_\varepsilon).$$

Essendo poi, evidentemente,

$$\lim_{x\to x_0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, k(x_0-y)\, dy \right| = 0$$

abbiamo

$$\limsup_{x\to x_0} |u(x) - u(x_0| \leqslant 2\,\varepsilon$$

da cui la tesi.

22 *Sia* $k \in Z(m,1,0)$ *con* $m < n-1$ *e sia* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Il potenziale (5.2) risulta di classe* $C^1(\mathbb{R}^n)$ *e inoltre*

$$\frac{\partial u}{\partial x_h}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy\ . \tag{5.3}$$

Osserviamo che, essendo k omogeneo di grado $-m$, una sua derivata prima sarà omogenea di grado $-m-1$ e quindi

$$\frac{\partial k}{\partial x_h} \in Z(m+1,0,0)$$

ed essendo $m+1 < n$ per ipotesi, l'integrale a secondo membro della (5.3) esiste e fornisce una funzione continua in tutto $\mathbb{R}^n$) (cfr. teorema precedente).

Sia ora $l(u)$ una funzione di una variabile reale, la quale sia di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e tale che $l(u) = 0,\ u \leqslant 1,\ l(u) = 1,\ u \geqslant 2,\ 0 \leqslant l(u) \leqslant 1,\ u \in \mathbb{R}$. Fissato un $\delta > 0$, poniamo

$$l_\delta(u) = l\left(\frac{u}{\delta}\right);$$

risulta $l_\delta(u) = 0,\ u \leqslant \delta,\ l_\delta(u) = 1,\ u \geqslant 2\delta,\ 0 \leqslant l_\delta(u) \leqslant 1,\ u \in \mathbb{R}$. Osserviamo che $l'_\delta(u) = \frac{1}{\delta} l'\left(\frac{u}{\delta}\right)$ e quindi

$$l'_\delta(u) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Poniamo

$$k_\delta(x-y) = l_\delta(|x-y|)\, k(x-y)\,;\ \ u_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, k_\delta(x-y)\, dy\ .$$

Essendo $k_\delta \in C^1(\mathbb{R}^n)$, abbiamo

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x_h}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k_\delta(x-y)\, dy\ .$$

Dimostreremo la tesi facendo vedere che

$$u_\delta \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} u\,; \qquad \frac{\partial u_\delta}{\partial x_h} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy\ . \tag{5.4}$$

Tenendo presente che $k_\delta(x-y) = k(x-y)$ quando $|y-x| \geqslant 2\delta$, possiamo scrivere

$$|u_\delta(x) - u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, k_\delta(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy \right| =$$
$$\left| \int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, l_\delta(|x-y|)\, k(x-y)\, dy - \int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy \right|\ .$$

In base al lemma 20, fissato un $\varepsilon > 0$, esiste un $r_\varepsilon > 0$ tale che, qualunque sia $x \in \mathbb{R}^n$ e per $0 < \delta < r_\varepsilon$ risulta (si ricordi che $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$)

$$\left| \int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, l_\delta(|x-y|)\, k(x-y)\, dy \right| \leqslant M \int_{B_{2\delta}(x)} \frac{dy}{|x-y|^m} < \varepsilon\ . \tag{5.5}$$

Analogamente
$$\left|\int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy\right| \leqslant \varepsilon$$
non appena $0 < \delta < r_e$. Abbiamo dunque
$$|u_\delta(x) - u(x)| < 2\varepsilon \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$
per $0 < \delta < r_\varepsilon$ e questo prova che $u_\delta \to u$.

Consideriamo ora una derivata prima; ricordando che $k_\delta(x-y) = k(x-y)$ quando $|x-y| \geqslant 2\delta$, abbiamo
$$\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x_h}(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy\right| =$$
$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k_\delta(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy\right| =$$
$$\left|\int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k_\delta(x-y)\, dy - \int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy\right| \leqslant$$
$$\left|\int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} l_\delta(|x-y|)\ k(x-y)\, dy\right| +$$
$$\left|\int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, l_\delta(|x-y|)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy\right|.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, essendo
$$\frac{\partial}{\partial x_h} l_\delta(|x-y|) = l'_\delta(|x-y|)\, \frac{x_h - y_h}{|x-y|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta}\right) \tag{5.6}$$
ed essendo $l'_\delta(|x-y|) = 0$ per $|x-y| < \delta$, abbiamo
$$\left|\int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} l_\delta(|x-y|)\ k(x-y)\, dy\right| =$$
$$\left|\int_{B_{2\delta}(x) - B_\delta(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} l_\delta(|x-y|)\ k(x-y)\, dy\right| \leqslant$$
$$\frac{C}{\delta} \int_{B_{2\delta}(x) - B_\delta(x)} \frac{dy}{|x-y|^m} \leqslant \frac{C}{\delta^{m+1}} \int_{B_{2\delta}(x) - B_\delta(x)} dy \leqslant \frac{C}{\delta^{m+1}}\ \Omega_n (2\delta)^n =$$
$$\widetilde{C}\ \delta^{n-m-1}$$

(con un ovvio significato di $\widetilde{C}$). Essendo, per ipotesi, $n-m-1>0$, l'integrale che stiamo considerando tende a 0 per $\delta \to 0^+$, uniformemente rispetto a $x \in \mathbb{R}^n$.

Per quanto riguarda gli altri due integrali, basta ripetere un ragionamento già fatto: per il lemma 20 (questa volta applicato alla funzione $\frac{\partial k}{\partial x_h}$; si noti che $m+1<n$) esiste un $r_\varepsilon > 0$ tale che, per $0<\delta<r_\varepsilon$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, risulta (cfr. la (5.5))

$$\left| \int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, l_\delta(|x-y|)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy \right| < 2\varepsilon \ .$$

Ciò dimostra la (5.4) e quindi la tesi.

Se $k \in Z(n-1,1,0)$ il teorema precedente non è più applicabile. Per determinare le derivate prime di un potenziale di campo con un nucleo di questo tipo bisogna ricorrere al concetto di integrale singolare, concetto al quale è dedicata la prossima sezione.

6 Gli integrali singolari

Sia f una funzione definita in $\Omega - \{x_0\}$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$. Supponiamo che la f risulti sommabile in ogni insieme del tipo $\Omega - B_\delta(x_0)$. Se esiste finito il limite

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\Omega - B_\delta(x_0)} f(x)\, dx$$

diciamo che esiste l'integrale singolare della f e questo limite viene indicato con un asterisco sul simbolo di integrale. In altri termini poniamo

$$\int_\Omega^* f(x)\, dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{\Omega - B_\delta(x_0)} f(x)\, dx \ .$$

È ovvio che se la funzione f risulta sommabile su Ω, l'integrale di Lebesgue della f coincide con l'integrale singolare:

$$\int_\Omega^* f(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx \ .$$

Tuttavia, in generale, può esistere l'integrale singolare senza che la funzione sia sommabile. Ad esempio, prendendo $n=1$, $\Omega = (-1,+1)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, risulta

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\delta}+\int_{\delta}^{1}\right)\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}(\log\delta-\log\delta)=0.$$

Esiste allora l'integrale singolare

$$\int_{-1}^{*\,1}\frac{dx}{x}=0$$

laddove

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{|x|}=+\infty$$

e quindi la funzione non è sommabile in $(-1,+1)$.

Si noti che nella definizione di integrale singolare bisogna prestare attenzione a come si scelgono gli insiemi di esclusione. Se, infatti, nell'esempio precedente, si prendessero come insiemi di esclusione gli intervalli $(-\delta,2\,\delta)$, ossia si considerasse il limite

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\delta}+\int_{2\delta}^{1}\right)\frac{1}{x}\,dx$$

si otterrebbe qualcosa di diverso, dato che tale limite risulta uguale a

$$\lim_{\delta\to 0^+}(\log\delta-\log(2\delta))=\log\frac{1}{2}\,.$$

Si noti la differenza con quanto accade per l'integrale di Lebesgue, dove, se f è sommabile in $(-1,1)$, risulta

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\delta}+\int_{\delta}^{1}\right)f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\delta}+\int_{2\delta}^{1}\right)f(x)\,dx\ .$$

L'integrale singolare gode di alcune delle proprietà dell'integrale, ma non di tutte. Ad esempio, se f e g ammettono un integrale singolare, ciò è vero anche per la funzione $af+bg$ e si ha

$$\int_{\Omega}^{*}[af(x)+bg(x)]\,dx=a\int_{\Omega}^{*}f(x)\,dx+b\int_{\Omega}^{*}g(x)\,dx\ .$$

Si ha anche che

$$\left|\int_{\Omega}^{*}f(x)\,dx\right|\leqslant\int_{\Omega}|f(x)|\,dx$$

(si noti che l'ultimo integrale è certamente un integrale di Lebesgue), ma questa maggiorazione non è particolarmente utile, perché, diversamente da quanto accade per l'integrale di Lebesgue (dove la sommabilità di f è equivalente a quella di $|f|$), l'integrale del modulo di $|f|$ potrebbe essere uguale a $+\infty$ (cfr. l'ultimo esempio). Questo fatto rende l'uso dell'integrale singolare più delicato e meno maneggevole di quello di Lebesgue. Tuttavia in diverse questioni importanti dell'Analisi Matematica entrano in gioco questi integrali ed è quindi opportuno saperli usare.

Consideriamo ora un $k \in Z(n,0,0)$ e chiediamoci quand'è che, fissato un $x \in \mathbb{R}^n$, esiste l'integrale singolare seguente

$$\int_\Omega^* k(x-y)\,dy \tag{6.1}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Sia $0 < R < \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$; abbiamo

$$\int_\Omega^* k(x-y)\,dy = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{\Omega-B_\delta(x)} k(x-y)\,dy = \int_{\Omega-B_R(x)} k(x-y)\,dy + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{B_R(x)-B_\delta(x)} k(x-y)\,dy$$

e quindi esiste l'integrale singolare in questione se e solo se esiste finito il limite

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{B_R(x)-B_\delta(x)} k(x-y)\,dy\ . \tag{6.2}$$

Essendo

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x)-B_\delta(x)} k(x-y)\,dy = \int_\delta^R r^{n-1}dr\int_{|\eta|=1} k(r\eta)\,d\sigma_\eta = \\ \int_\delta^R \frac{dr}{r}\int_{|\eta|=1} k(\eta)\,d\sigma_\eta = \log\frac{R}{\delta}\int_{|\eta|=1} k(\eta)\,d\sigma_\eta\end{aligned} \tag{6.3}$$

il limite (6.2) esiste finito se e solo se

$$\int_{|\eta|=1} k(\eta)\,d\sigma_\eta = 0\ . \tag{6.4}$$

La funzione $k(\eta)$ ($|\eta| = 1$) prende il nome di *caratteristica* del nucleo $k(x-y)$. La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'integrale singolare (6.1) è dunque che la caratteristica del nucleo abbia media nulla.

Si noti che abbiamo anche ottenuto che

$$\int_{\Omega}^{*} k(x-y)\, dy = \int_{\Omega - B_R(x)} k(x-y)\, dy \ . \tag{6.5}$$

È ovvio che esistono nuclei k soddisfacenti la (6.4). Una classe importante di essi è fornita dal prossimo lemma.

23 *Sia $k \in Z(n-1,1,0)$; le funzioni*

$$\frac{\partial k}{\partial x_h}(x) \qquad h = 1, \dots, n$$

appartengono a $Z(n,0,0)$ e soddisfano la (6.4).

L'appartenenza a $Z(n,0,0,)$ è ovvia. Per quanto riguarda l'altra parte dell'enunciato, essendo

$$\int_{B_2(0)-B_1(0)} \frac{\partial k}{\partial x_h}(x)\, dx = \int_1^2 r^{n-1} dr \int_{|\eta|=1} \frac{\partial k}{\partial x_h}(r\eta)\, d\sigma_\eta = \\ \int_1^2 \frac{dr}{r} \int_{|\eta|=1} \frac{\partial k}{\partial x_h}(\eta)\, d\sigma_\eta$$

abbiamo

$$\int_{B_2(0)-B_1(0)} \frac{\partial k}{\partial x_h}(x)\, dx = \log 2 \int_{|\eta|=1} \frac{\partial k}{\partial x_h}(\eta)\, d\sigma_\eta \, . \tag{6.6}$$

D'altra parte, applicando le formule di Gauss-Green, lo stesso integrale può essere scritto nel modo seguente

$$\int_{B_2(0)-B_1(0)} \frac{\partial k}{\partial x_h}(x)\, dx = \int_{|v|=2} k(v) \frac{v_h}{|v|}\, d\sigma_v - \int_{|\eta|=1} k(\eta)\, \eta_h\, d\sigma_\eta .$$

Osservando che

$$\int_{|v|=2} k(v)\, \frac{v_h}{|v|}\, d\sigma_v = \int_{|\eta|=1} k(2\eta)\, \eta_h\, 2^{n-1} d\sigma_\eta = \int_{|\eta|=1} k(\eta)\, \eta_h\, d\sigma_\eta$$

risulta

$$\int_{B_2(0)-B_1(0)} \frac{\partial}{\partial x_h} k(x)\, dx = 0$$

e quindi la (6.6) implica la tesi.

Chiediamoci ora per quali φ esiste l'integrale singolare

$$\int_\Omega^* \varphi(y)\, k(x-y)\, dy \ . \tag{6.7}$$

Diremo che la funzione φ definita in Ω soddisfa *la condizione del Dini* nel punto $x \in \Omega$ se è continua in x e se esiste un $R > 0$ tale che

$$\int_{B_R(x)} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y-x|^n}\, dy < +\infty \ .$$

È evidente che se la funzione φ soddisfa in x una condizione di Hölder, allora essa soddisfa la condizione del Dini in x. Infatti se

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant H\, |y-x|^h \qquad (H > 0,\ 0 < h \leqslant 1)$$

allora

$$\int_{B_R(x)} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y-x|^n}\, dy \leqslant \int_{B_R(x)} \frac{dy}{|y-x|^{n-h}} < +\infty.$$

24 *Sia $k \in Z(n,0,0)$ tale che sussiste la (6.4) e sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Se $\varphi \in L^1(\Omega)$ soddisfa la condizione del Dini nel punto x, esiste l'integrale singolare (6.7) e si ha*

$$\int_\Omega^* \varphi(y)\, k(x-y)\, dy = \int_\Omega [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy + \varphi(x) \int_\Omega^* k(x-y)\, dy \ . \tag{6.8}$$

Abbiamo

$$\int_{\Omega - B_\delta(x)} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy =$$
$$\int_{\Omega - B_\delta(x)} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy + \varphi(x) \int_{\Omega - B_\delta(x)} k(x-y)\, dy$$

e la tesi segue dal ricordare la (6.5), dall'osservare che esiste finito il limite

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\Omega - B_\delta(x)} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy$$

e che tale limite è uguale all'integrale (di Lebesgue)

$$\int_\Omega [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy\,,$$

dato che la funzione integranda è sommabile per ipotesi.

Supponiamo ora di avere una funzione φ la quale soddisfa la condizione del Dini in ogni $x \in \Omega$; diremo che la φ soddisfa *la condizione del Dini uniforme* in Ω se

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{B_\delta(x)} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y-x|^n}\, dy = 0 \tag{6.9}$$

uniformemente al variare di $x \in \Omega$. Si noti che, se la φ soddisfa la condizione del Dini in ogni $x \in \Omega$, quest'ultima relazione di limite è senz'altro vera per ogni $x \in \Omega$, ma potrebbe non essere uniforme al variare di $x \in \Omega$. Infine diremo che la φ soddisfa *la condizione del Dini uniforme nell'interno di* Ω se essa soddisfa la condizione dei Dini uniforme in ogni compatto contenuto in Ω.

Osservazione. Se φ soddisfa la condizione del Dini uniforme nell'interno di Ω (in particolare se φ è uniformemente hölderiana nell'interno di Ω), allora la relazione di limite

$$\lim_{\delta\to o^+} \int_{\Omega - B_\delta(x)} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy = \int_\Omega^* \varphi(y)\, k(x-y)\, dy$$

è uniforme nell'interno di Ω. Infatti, basta osservare che, fissato un compatto $K \subset \Omega$, il limite

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{\Omega - B_\delta(x)} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy = \int_\Omega [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy$$

è uniforme al variare di $x \in K$, dato che, per $0 < \delta < \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$,

$$\left| \left(\int_\Omega - \int_{\Omega - B_\delta(x)} \right) [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy \right| \leqslant C \int_{B_\delta(x)} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y-x|^n}\, dy\,.$$

Inoltre

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{\Omega - B_\delta(x)} k(x-y)\, dy = \int_\Omega^* k(x-y)\, dy$$

uniformemente per $x \in K$, dato che

$$\int_{\Omega - B_\delta(x)} k(x-y)\, dy = \int_\Omega^* k(x-y)\, dy$$

non appena $0 < \delta < \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$ (cfr. la (6.5)).

25 *Sia $k \in Z(n,0,0)$ tale che sussiste la (6.4) e sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Se $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ soddisfa la condizione del Dini uniforme nell'interno di Ω, allora la funzione*

$$u(x) = \int_\Omega^* \varphi(y)\, k(x-y)\, dy$$

risulta continua in Ω.

Ricordando la (6.8), si tratta di dimostrare la continuità delle funzioni seguenti

$$v(x) = \int_\Omega [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy\,, \qquad w(x) = \int_\Omega^* k(x-y)\, dy$$

dato che si ha

$$u(x) = v(x) + \varphi(x)\, w(x)$$

e la φ è continua per ipotesi.

Per dimostrare la continuità di v si può procedere come nel teorema 21. Infatti risulta

$$|v(x) - v(x_0)| =$$
$$\left| \int_\Omega [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy - \int_\Omega [\varphi(y) - \varphi(x_0)]\, k(x_0-y)\, dy \right| \leqslant$$
$$\left| \int_{\Omega - B_\delta(x_0)} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy - \int_{\Omega - B_\delta(x_0)} [\varphi(y) - \varphi(x_0)]\, k(x_0-y)\, dy \right| +$$
$$\left| \int_{\Omega \cap B_\delta(x_0)} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy \right| + \left| \int_{\Omega \cap B_\delta(x_0)} [\varphi(y) - \varphi(x_0)]\, k(x_0-y)\, dy \right| .$$

Essendo soddisfatta la condizione del Dini uniforme all'interno di Ω, fissato un compatto $K \subset \Omega$ ed assegnato un $\varepsilon > 0$, esiste un $r_\varepsilon > 0$ tale che $B_{2r_\varepsilon}(x) \subset\subset \Omega$,

$$\int_{B_{2r_\varepsilon}(x)} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y-x|^n}\, dy < \varepsilon \qquad \forall\, x \in K.$$

Si ha allora, per $0 < \delta < r_\varepsilon$, $|x - x_0| < \delta$ (cfr. la (5.1)),

$$\left| \int_{\Omega \cap B_\delta(x_0)} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy \right| = \left| \int_{B_\delta(x_0)} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy \right| \leqslant$$
$$\int_{B_{2\delta}(x)} |\varphi(y) - \varphi(x)|\, |k(x-y)|\, dy \leqslant H_0 \int_{B_{2\delta}(x)} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y-x|^n}\, dy < H_0\, \varepsilon\ .$$

Inoltre, sempre per $0 < \delta < r_\varepsilon$,

$$\left| \int_{B_\delta(x_0)} [\varphi(y) - \varphi(x_0)]\, k(x_0 - y)\, dy \right| \leqslant \int_{B_\delta(x_0)} |\varphi(y) - \varphi(x_0)|\, |k(x_0 - y)|\, dy \leqslant$$
$$H_0 \int_{B_\delta(x)} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x_0)|}{|y - x_0|^n}\, dy < H_0\, \varepsilon\ .$$

Non è difficile dimostrare che, essendo la φ limitata, Ω limitato e k continuo al di fuori dell'origine, risulta

$$\lim_{\delta \to 0^+} \left| \int_\Omega [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x - y)\, dy - \int_\Omega [\varphi(y) - \varphi(x_0)]\, k(x_0 - y)\, dy \right| = 0\,.$$

Abbiamo così fatto vedere che

$$\limsup_{\delta \to 0^+} |v(x) - v(x_0)| \leqslant 2 H_0\, \varepsilon$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, che v è continua in K. Per l'arbitrarietà di K, resta acquisita la continuità di v in tutto Ω.

Passiamo ora a studiare la w; ricordando la (6.5), fissato un compatto $K \subset \Omega$, possiamo scrivere

$$w(x) = \int_{\Omega - B_R(x)} k(x - y)\, dy$$

essendo $0 < R < \operatorname{dist}\{K, \partial\Omega\}$. Poniamo

$$\Phi(x,y) \begin{cases} = k(x-y) & \text{se } |x-y| > R \\ = 0 & \text{se } |x-y| \leqslant r \end{cases}$$

Si ha

$$w(x) = \int_\Omega \Phi(x,y)\, dy\ .$$

Inoltre, per ogni fissato $x_0 \in K$, abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} \Phi(x,y) = \Phi(x_0,y) \qquad \forall\, y \in \Omega\ :\ |y - x_0| \neq R$$

come si riconosce agevolmente dalla definizione di Φ. Possiamo quindi affermare che

$$\lim_{x \to x_0} \Phi(x,y) = \Phi(x,y) \qquad \text{q.o. } y \in \Omega\,.$$

Essendo poi

$$|\Phi(x,y)| \leqslant \frac{H_0}{|y-x|^n} \leqslant \frac{H_0}{R^n}$$

per ogni (x,y) tali che $|y-x|>R$ ed essendo $\Phi(x,y)\equiv 0$ quando $|y-x|\leqslant R$, si ha

$$|\Phi(x,y)| \leqslant \frac{H_0}{R^n} \qquad \forall\, x\in K,\ y\in\Omega\,.$$

Il teorema della convergenza dominata permette dunque di passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{x\to x_0} w(x) = \lim_{x\to x_0}\int_\Omega \Phi(x,y)\,dy = \int_\Omega \Phi(x_0,y)\,dy = w(x_0)$$

e il teorema è dimostrato.

Siamo ora in grado di risolvere il problema che ci siamo posti alla fine della sezione precedente (p.47).

26 *Sia $k\in Z(n-1,1,0)$ e sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Se $\varphi\in L^\infty(\Omega)$ soddisfa la condizione del Dini uniforme nell'interno di Ω il potenziale*

$$u(x) = \int_\Omega \varphi(y)\,k(x-y)\,dy$$

risulta di classe $C^1(\Omega)$ e inoltre

$$\frac{\partial u}{\partial x_h}(x) = \int_\Omega^* \varphi(y)\,\frac{\partial}{\partial x_h}k(x-y)\,dy + \varphi(x)\int_{|\eta|=1} k(\eta)\,\eta_h\,d\sigma_\eta\ . \tag{6.10}$$

Notiamo che, in base al lemma 23, esiste certamente l'integrale singolare che compare a secondo membro della (6.10) e, in base al teorema 25, esso risulta continuo.

Consideriamo ora la funzione l_δ introdotta a p.45 e poniamo

$$k_\delta(x-y) = l_\delta(|x-y|)\,k(x-y), \qquad u_\delta(x) = \int_\Omega \varphi(y)\,k_\delta(x-y)\,dy\ .$$

Essendo k_δ di classe C^1 abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial x_h}(x) = \int_\Omega \varphi(y)\,\frac{\partial}{\partial x_h}k_\delta(x-y)\,dy\ .$$

Il fatto che $u_\delta \rightrightarrows u$ in Ω si dimostra esattamente come nel teorema 22 (p.44), sfruttando il fatto che il nucleo $k(x-y)$ presenta una singolarità debole.

Il teorema sarà quindi dimostrato se facciamo vedere che

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x_h} \rightrightarrows \int_\Omega^* \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy + \varphi(x) \int_{|\eta|=1} k(\eta)\, \eta_h\, d\sigma_\eta$$

nell'interno di Ω.

Fissato un compatto $K \subset \Omega$, sia $0 < 2\delta < \text{dist}(K, \partial\Omega)$; si ha, per ogni $x \in K$,

$$\begin{gathered} \int_\Omega \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k_\delta(x-y)\, dy - \int_{\Omega - B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy = \\ \int_{\Omega - B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k_\delta(x-y)\, dy - \int_{\Omega - B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy + \\ \int_{B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k_\delta(x-y)\, dy \end{gathered}$$

e quindi, essendo $k_\delta(x-y) = k(x-y)$ quando $|x-y| > 2\delta$ e $k_\delta(x-y) = 0$ quando $|x-y| < \delta$,

$$\begin{gathered} \int_\Omega \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k_\delta(x-y)\, dy = \int_{\Omega - B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy + \\ \int_{B_{2\delta}(x) - B_\delta(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k_\delta(x-y)\, dy\ . \end{gathered} \tag{6.11}$$

Quest'ultimo integrale può essere scritto come somma dei due seguenti

$$\begin{gathered} \int_{B_{2\delta}(x) - B_\delta(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} l_\delta(|x-y|)\; k(x-y)\, dy + \\ \int_{B_{2\delta}(x) - B_\delta(x)} \varphi(y)\, l_\delta(|x-y|)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy \end{gathered} \tag{6.12}$$

che ora considereremo separatamente. Per il primo si ha

$$\begin{gathered} \int_{B_{2\delta}(x) - B_\delta(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} l_\delta(|x-y|)\; k(x-y)\, dy = \\ \int_{B_{2\delta}(x) - B_\delta(x)} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, \frac{\partial}{\partial x_h} l_\delta(|x-y|)\; k(x-y)\, dy + \\ \varphi(x) \int_{B_{2\delta}(x) - B_\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x_h} l_\delta(|x-y|)\; k(x-y)\, dy\ . \end{gathered} \tag{6.13}$$

Ricordando la (5.6) ed osservando che, ovviamente, $|y-x|<2\delta$ quando $y\in B_{2\delta}(x)$, fissato un $\varepsilon>0$, abbiamo

$$\left|\int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)}[\varphi(y)-\varphi(x)]\,\frac{\partial}{\partial x_h}l_\delta(|x-y|)\;k(x-y)\,dy\right|\leqslant$$
$$\frac{C}{\delta}\int_{B_{2\delta(x)}-B_\delta(x)}\frac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{|y-x|^{n-1}}dy\leqslant 2C\int_{B_{2\delta}(x)}\frac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{|y-x|^n}dy<\varepsilon$$

non appena $0<\delta<r_\varepsilon$ per un opportuno r_ε (si ricordi la (6.9)). Questo dimostra che

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)}[\varphi(y)-\varphi(x)]\,\frac{\partial}{\partial x_h}l_\delta(|x-y|)\;k(x-y)\,dy=0$$

uniformemente al variare di $x\in K$.

Per quanto riguarda l'ultimo integrale in (6.13), si ha

$$\int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)}\frac{\partial}{\partial x_h}l_\delta(|x-y|)\;k(x-y)\,dy=$$
$$\int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)}l'_\delta(|x-y|)\,\frac{x_h-y_h}{|x-y|}\,k(x-y)\,dy=$$
$$\int_\delta^{2\delta}l'_\delta(r)\,r^{n-1}dr\int_{|\eta|=1}k(r\eta)\,\eta_h\,d\sigma_\eta=\int_\delta^{2\delta}l'_\delta(r)\,dr\int_{|\eta|=1}k(\eta)\,\eta_h\,d\sigma_\eta$$

(abbiamo posto $y=x-r\eta$, $|\eta|=1$); essendo poi

$$\int_\delta^{2\delta}l'_\delta(r)\,dr=l_\delta(2\delta)-l_\delta(\delta)=1$$

segue

$$\int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)}\frac{\partial}{\partial x_h}l_\delta(|x-y|)\;k(x-y)\,dy=\int_{|\eta|=1}k(\eta)\,\eta_h\,d\sigma_\eta$$

per ogni $\delta>0$. Abbiamo quindi dimostrato che

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)}\varphi(y)\,\frac{\partial}{\partial x_h}l_\delta(|x-y|)\;k(x-y)\,dy=\varphi(x)\int_{|\eta|=1}k(\eta)\,\eta_h\,d\sigma_\eta \tag{6.14}$$

uniformemente al variare di $x\in K$.

Consideriamo ora il secondo integrale in (6.12); possiamo scrivere

$$\int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)} \varphi(y)\, l_\delta(|x-y|)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy = \int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)} [\varphi(y)-\varphi(x)]\, l_\delta(|x-y|)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy$$

dato che

$$\int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)} l_\delta(|x-y|)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy = \int_\delta^{2\delta} l_\delta(r)\, r^{n-1} dr \int_{|\eta|=1} \frac{\partial k}{\partial x_h}(r\eta)\, d\sigma_\eta = \int_\delta^{2\delta} l_\delta(r)\, \frac{dr}{r} \int_{|\eta|=1} \frac{\partial k}{\partial x_h}(\eta)\, d\sigma_\eta = 0$$

(si ricordi il lemma 23). Essendo

$$\left| \int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)} [\varphi(y)-\varphi(x)]\, l_\delta(|x-y|)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy \right| \leqslant C \int_{B_{2\delta}(x)} \frac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{|y-x|^n}\, dy < \varepsilon$$

per $0<\delta<r_\varepsilon$, qualunque sia $x \in \Omega$, abbiamo

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)} \varphi(y)\, l_\delta(|x-y|)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy = 0$$

uniformemente al variare di $x \in K$.

In virtù della (6.14) (cfr. anche la (6.12)) abbiamo

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{B_{2\delta}(x)-B_\delta(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k_\delta(x-y)\, dy = \varphi(x) \int_{|\eta|=1} k(\eta)\, \eta_h\, d\sigma_\eta$$

uniformemente al variare di $x \in K$. Dalla (6.11) segue la tesi, non appena si osservi che

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{\Omega-B_{2\delta}(x)} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy = \int_\Omega^* \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} k(x-y)\, dy$$

uniformemente in K (cfr. l'Osservazione di p.52).

7 Applicazioni alla teoria del potenziale di campo armonico

Il teorema 22 implica immediatamente (cfr. anche p.42)

27 *Sia* $\varphi \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *dove* Ω *è un aperto qualsiasi di* $\mathbb{R}^n$. *Il potenziale*

$$u(x) = \int_\Omega \varphi(y)\, s(x,y)\, dy \tag{7.1}$$

risulta di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ *e si ha*

$$\frac{\partial u}{\partial x_h}(x) = \int_\Omega \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} s(x,y)\, dy \tag{7.2}$$

A rigore questo teorema segue immediatamente dal 22 soltanto nel caso $n \geqslant 3$, dato che per $n = 2$ la soluzione fondamentale si comporta come il $\log|x-y|$ (e non è quindi omogeneo). Tuttavia non è difficile riconoscere che la tesi del teorema sussiste anche per il potenziale logaritmico.

28 *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$. *Se* $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ *soddisfa la condizione del Dini uniforme nell'interno di* Ω *il potenziale (7.1) risulta di classe* $C^2(\Omega)$, *le derivate prime sono date da (7.2) mentre per le derivate seconde si ha*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}(x) = \int_\Omega^* \varphi(y)\, \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y)\, dy + \frac{\delta_{hk}}{n}\varphi(x)\ . \tag{7.3}$$

Che la funzione u sia di classe C^1 segue dal teorema precedente, dato che le ipotesi qui fatte su φ implicano la sua sommabilità in Ω.

Per quanto riguarda le derivate seconde, il teorema 26, dove

$$k(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_k} s(x,y)\,,$$

mostra che $u \in C^2(\Omega)$ e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}(x) = \int_\Omega^* \varphi(y)\, \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y)\, dy + \varphi(x) \int_{|\eta|=1} \frac{\partial s}{\partial \eta_k}(\eta)\, \eta_h\, d\sigma_\eta\ .$$

Per ottenere la (7.3), basterà calcolare gli integrali

$$\int_{|\eta|=1} \frac{\partial s}{\partial \eta_k}(\eta)\, \eta_h\, d\sigma_\eta \qquad \left(s(\eta) = \frac{-1}{(n-2)\,\omega_n} \frac{1}{|\eta|^{n-2}} \right).$$

Tenendo presente che sulla sfera unitaria $\eta_h = \nu_h$ e applicando le formule di Gauss-Green, si trova

$$\int_{|\eta|=1} \frac{\partial s}{\partial \eta_k}(\eta)\, \eta_h \, d\sigma_\eta = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\eta|=1} \frac{\eta_k}{|\eta|^n}\, \eta_h \, d\sigma_\eta = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\eta|=1} \eta_k \, \nu_h \, d\sigma_\eta =$$
$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|x|<1} \frac{\partial x_k}{\partial x_h}\, dx = \frac{\delta_{hk}}{\omega_n}\,\Omega_n = \frac{\delta_{hk}}{n}\,{}^{9}$$

da cui segue la (7.3).

29 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Se $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ soddisfa la condizione del Dini uniforme nell'interno di Ω il potenziale (7.1) risulta di classe $C^2(\Omega)$ e soddisfa l'equazione di Poisson*

$$\Delta_2 u(x) = \varphi(x) \qquad x \in \Omega\,.$$

È una conseguenza immediata del teorema precedente, dato che

$$\Delta_{2,x} s(x,y) = 0$$

per ogni $y \neq x$.

Questi ultimi risultati sono validi, in particolare, se la funzione φ è uniformemente hölderiana in $\overline{\Omega}$. È naturale chiedersi se, in tal caso, le derivate seconde del potenziale (7.1) soddisfano anche loro una condizione di Hölder in $\overline{\Omega}$; la risposta a questo quesito è affermativa, ma la dimostrazione è piuttosto difficile. I prossimi teoremi avranno come scopo l'ottenimento di questo risultato.

8 Hölderianità di certi potenziali di campo

Sia $G(x,y)$ una funzione definita in $A \times B - \Delta$, dove $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Diremo che la funzione G appartiene alla classe $G_1(m,\alpha)$, dove $m \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, se

i) $|G(x,y)| \leqslant \dfrac{G_0}{|x-y|^m}$

ii) $|G(x,y) - G(x',y)| \leqslant C\, \dfrac{|x-x'|^\alpha}{[\varrho_y(x,x')]^{m+\alpha}}$

[9] Si ha, infatti, $\omega_n = n\,\Omega_n$ (cfr., ad esempio, A. Cialdea, Una Introduzione alla Teoria delle Equazioni alle Derivate Parziali).

dove
$$\varrho_y(x,x') = \min\{|x-y|,\, |x'-y|\}\,.$$

Analogamente si definisce la classe $G_2(m,\alpha)$, scambiando il ruolo di x e di y. Dimostriamo ora delle disuguaglianze elementari che ci saranno utili in seguito.

30 *Siano $x', x'', y \in \mathbb{R}^n$ tali che $0 < |x'-y| \leqslant |x''-y|$ e sia $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Risulta*
$$\frac{\big|\,|x'-y| - |x''-y|\,\big|}{|x''-y|} \leqslant \frac{|x'-x''|^\alpha}{|x'-y|^\alpha} \tag{8.1}$$

Si ha, con ovvi passaggi,

$$\big|\,|x'-y| - |x''-y|\,\big| = \big|\,|x'-y| - |x''-y|\,\big|^\alpha\, \big|\,|x'-y| - |x''-y|\,\big|^{1-\alpha} \leqslant \\ |x'-x''|^\alpha\, |x''-y|^{1-\alpha}$$

da cui
$$\frac{\big|\,|x'-y| - |x''-y|\,\big|}{|x''-y|} \leqslant \frac{|x'-x''|^\alpha\, |x''-y|^{1-\alpha}}{|x''-y|} = \frac{|x'-x''|^\alpha}{|x''-y|^\alpha} \leqslant \frac{|x'-x''|^\alpha}{|x'-y|^\alpha}\;.$$

31 *Siano $x', x'', y \in \mathbb{R}^n$ con $x' \neq y$, $x'' \neq y$ e siano m ed α due numeri reali tali che $m \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Risulta*
$$\left|\frac{1}{|x'-y|^m} - \frac{1}{|x''-y|^m}\right| \leqslant m\,\frac{|x'-x''|^\alpha}{[\varrho_y(x,x'')]^{m+\alpha}}\;. \tag{8.2}$$

Per fissare le idee, supponiamo che sia $|x'-y| \leqslant |x''-y|$.

Per il teorema di Lagrange, presi comunque due numeri reali non negativi u, v, si ha
$$|u^m - v^m| \leqslant m\, w^{m-1}\, |u-v|$$
dove w è compreso tra u e v. Possiamo dunque scrivere
$$\left|\frac{1}{|x'-y|^m} - \frac{1}{|x''-y|^m}\right| \leqslant m\, \xi^{m-1} \left|\frac{1}{|x'-y|} - \frac{1}{|x''-y|}\right|$$
dove
$$\frac{1}{|x''-y|} \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{|x'-y|}\;.$$

Deve quindi essere

$$\xi^{m-1} \leqslant \frac{1}{|x'-y|^{m-1}}$$

(si noti che $m-1 \geqslant 0$ per ipotesi), da cui, ricordando la (8.1),

$$\left|\frac{1}{|x'-y|^m} - \frac{1}{|x''-y|^m}\right| \leqslant m\,\frac{1}{|x'-y|^{m-1}}\,\frac{\big|\,|x''-y|-|x'-y|\,\big|}{|x'-y|\,|x''-y|} \leqslant$$
$$m\,\frac{|x'-x''|^\alpha}{|x'-y|^{m+\alpha}}$$

ossia la tesi, dato che $\varrho_y(x,x') = |x'-y|$.

32 *Siano $x', x'', y \in \mathbb{R}^n$ con $x' \neq y$, $x'' \neq y$. Risulta*

$$\left|\frac{x'-y}{|x'-y|} - \frac{x''-y}{|x''-y|}\right| \leqslant \frac{|x'-x''|}{\varrho_y(x',x'')}\,. \tag{8.3}$$

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $|x'-y| \leqslant |x''-y|$ e poniamo $\xi = x'-y$, $\eta = x''-y$. La tesi segue dalle disuguaglianze seguenti

$$\left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\eta}{|\eta|}\right|^2 = 2-2\,\frac{\xi\cdot\eta}{|\xi|\,|\eta|} = \frac{2\,|\xi|\,|\eta| - 2\,\xi\cdot\eta}{|\xi|\,|\eta|} \leqslant \frac{|\xi|^2+|\eta|^2-2\,\xi\cdot\eta}{|\xi|^2} = \frac{|\xi-\eta|^2}{|\xi|^2}$$

e dall'osservare che $\xi-\eta = x'-x''$ e $\varrho_y(x',x'') = |\xi|$.

Il prossimo teorema fornisce dei nuclei della classe $G_1(m,\alpha)$.

33 *Sia $k \in Z(m,0,\alpha)$ ($m \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$). Il nucleo $k(x-y)$ appartiene a $G_1(m,\alpha)$.*

La condizione i) della definizione di $G_1(m,\alpha)$ è ovviamente soddisfatta. Per quanto riguarda l'altra, presi $x', x'', y \in \mathbb{R}^n$ con $x' \neq y$, $x'' \neq y$, e posto

$$\vartheta' = \frac{x'-y}{|x'-y|}\,, \quad \vartheta'' = \frac{x''-y}{|x''-y|}$$

si ha

$$k(x'-y) - k(x''-y) = \frac{1}{|x'-y|^m}\,k(\vartheta') - \frac{1}{|x''-y|^m}\,k(\vartheta'') =$$
$$\left(\frac{1}{|x'-y|^m} - \frac{1}{|x''-y|^m}\right) k(\vartheta') + \frac{1}{|x''-y|^m}\,[k(\vartheta') - k(\vartheta'')]$$

Per la (8.2), abbiamo

$$\left| \frac{1}{|x'-y|^m} - \frac{1}{|x''-y|^m} \right| |k(\vartheta')| \leqslant C \frac{|x'-x''|^\alpha}{[\varrho_y(x',x'')]^{m+\alpha}}$$

mentre, per la (8.3),

$$\frac{1}{|x''-y|^m} |k(\vartheta')-k(\vartheta'')| \leqslant \frac{C}{[\varrho_y(x',x'')]^m} |\vartheta'-\vartheta''|^\alpha \leqslant \frac{C}{[\varrho_y(x',x'')]^m} \frac{|x'-x''|^\alpha}{[\varrho_y(x',x'')]^\alpha}$$

da cui segue la tesi.

Di qualche utilità è anche il seguente lemma:

34 *Sia* $G \in G_1(m,\lambda)$ *relativamente all'aperto limitato* Ω *e sia* $\varphi \in C^\beta(\overline{\Omega})$ *con* $0 < \lambda < \beta \leqslant 1$, $\beta \leqslant m$. *Il nucleo*

$$H(x,y) = [\varphi(x) - \varphi(y)]\, G(x,y)$$

appartiene a $G_1(m-\beta,\lambda)$.

Si ha, ovviamente,

$$|H(x,y)| = |[\varphi(x) - \varphi(y)]\, G(x,y)| \leqslant C \frac{|x-y|^\beta}{|x-y|^m}.$$

Inoltre, supponendo, per fissare le idee, $|x'-y| \leqslant |x''-y|$, si trova

$$\begin{gathered} |H(x',y) - H(x'',y)| = \\ |\,[\varphi(x') - \varphi(y)]\, G(x',y) - [\varphi(x'') - \varphi(y)]\, G(x'',y)\,| = \\ |\,[\varphi(x') - \varphi(y)]\, [G(x',y) - G(x'',y)] + \\ [\varphi(x') - \varphi(y)]\, G(x'',y) - [\varphi(x'') - \varphi(y)]\, G(x'',y)\,| \leqslant \\ |\,[\varphi(x') - \varphi(y)]\, [G(x',y) - G(x'',y)]\,| + |\,[\varphi(x') - \varphi(x'')]\, G(x'',y)\,|\,; \end{gathered}$$

il primo termine si maggiora con

$$C\,|x'-y|^\beta \frac{|x'-x''|^\lambda}{[\varrho_y(x',x'')]^{m+\lambda}} = C \frac{|x'-x''|^\lambda}{[\varrho_y(x',x'')]^{m-\beta+\lambda}}$$

mentre l'altro si maggiora con

$$C \frac{|x'-x''|^\beta}{|x''-y|^m}.$$

Dato che risulta

$$|x'-x''| \leqslant |x'-y| + |y-x''| \leqslant 2\,|y-x''| \tag{8.4}$$

e quindi

$$|x'-x''|^{\beta} = |x'-x''|^{\lambda}|x'-x''|^{\beta-\lambda} \leqslant 2^{\beta-\lambda}|x'-x''|^{\lambda}|x''-y|^{\beta-\lambda},$$

si ha anche

$$\frac{|x'-x''|^{\beta}}{|x''-y|^{m}} \leqslant 2^{\beta-\lambda}\frac{|x'-x''|^{\lambda}|x''-y|^{\beta-\lambda}}{|x''-y|^{m}} \leqslant 2^{\beta-\lambda}\frac{|x'-x''|^{\lambda}}{[\varrho_y(x',x'')]^{m-\beta+\lambda}}$$

(si noti che $m-\beta+\lambda \geqslant m-\beta > 0$) e quindi la tesi.

Consideriamo ora il problema di determinare l'hölderianità di alcuni potenziali. Cominciamo a considerare il caso di nuclei con singolarità debole.

35 *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e sia* $G \in G_1(m,\alpha)$ *relativamente a* $\overline{\Omega}$ *con* $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < m+\alpha < n$. *Se* $\varphi \in L^{\infty}(\Omega)$, *allora il potenziale*

$$u(x) = \int_{\Omega} \varphi(y)\, G(x,y)\, dy$$

appartiene a $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

Siano $x', x'' \in \overline{\Omega}$ ed $r = |x-x'|$. Possiamo scrivere

$$\begin{gathered}
|u(x')-u(x'')| = \\
\Big| \int_{\Omega\cap B_{2r}(x')} \varphi(y)\, G(x',y)\, dy - \int_{\Omega\cap B_{2r}(x')} \varphi(y)\, G(x'',y)\, dy + \\
\int_{\Omega - B_{2r}(x')} \varphi(y)\, [G(x',y) - G(x'',y)]\, dy \Big| \leqslant \\
G_0 \|\varphi\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{B_{2r}(x')} \frac{dy}{|x'-y|^m} + G_0 \|\varphi\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{B_{2r}(x')} \frac{dy}{|x''-y|^m} + \\
C \|\varphi\|_{L^{\infty}(\Omega)} |x'-x''|^{\alpha} \int_{\Omega - B_{2r}(x')} \frac{dy}{[\varrho_y(x',x'')]^{m+\alpha}}
\end{gathered} \tag{8.5}$$

Per il primo integrale si ha

$$\int_{B_{2r}(x')} \frac{dy}{|x'-y|^m} = \omega_n \int_0^{2r} \frac{t^{n-1}}{t^m} dt = \frac{\omega_n}{n-m}\,(2r)^{n-m}\,. \tag{8.6}$$

Il secondo si maggiora in modo analogo, osservando che $B_{2r}(x') \subset B_{3r}(x'')$ e quindi

$$\int_{B_{2r}(x')} \frac{dy}{|x''-y|^m} \leqslant \int_{B_{3r}(x')} \frac{dy}{|x''-y|^m} = \frac{\omega_n}{n-m}\,(3r)^{n-m}\,. \tag{8.7}$$

Infine, per maggiorare l'ultimo integrale, osserviamo che, se $y \notin B_{2r}(x')$, ossia se $|y-x'| \geqslant 2r$, abbiamo

$$|y-x''| \geqslant \big|\,|y-x'| - |x'-x''|\,\big| = |y-x'| - r \geqslant$$
$$|y-x'| - \frac{|y-x'|}{2} = \frac{|y-x'|}{2}\,.$$

Essendo, ovviamente, $|y-x'| \leqslant 2\,|y-x'|$, l'ultima disuguaglianza ottenuta mostra che

$$|y-x'| \leqslant 2\,\varrho_y(x',x'') \qquad (y \notin B_{2r}(x'))\,. \tag{8.8}$$

Si ha dunque, ponendo $R = \operatorname{diam}\Omega$,

$$\int_{\Omega - B_{2r}(x')} \frac{dy}{[\varrho_y(x',x'')]^{m+\alpha}} \leqslant 2^{m+\alpha}\int_{\Omega - B_{2r}(x')} \frac{dy}{|y-x'|^{m+\alpha}} \leqslant$$
$$2^{m+\alpha}\int_{B_R(x')} \frac{dy}{|y-x'|^{m+\alpha}} = 2^{m+\alpha}\omega_n \int_0^R t^{n-1-(m+\alpha)}dt < +\infty$$

essendo $n-(m+\alpha) > 0$ per ipotesi. In virtù di (8.5), (8.6), (8.7) si ha la tesi, dato che $\alpha < n-m$.

Se il nucleo presenta una singolarità forte, e quindi si ha a che fare con integrali singolari, la questione è più delicata. Consideriamo dapprima il caso in cui la densità è costante.

36 *Sia $k \in Z(n,0,\alpha)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ soddisfacente la condizione (6.4). Sia D un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$. Fissato comunque un dominio $D_0 \subset\subset D$, il potenziale*

$$w(x) = \int_D^* k(x-y)\,dy \tag{8.9}$$

appartiene a $C^\alpha(D_0)$.

Sia $0 < \varrho < \operatorname{dist}(D_0, \partial D)$. Presi due punti $x', x'' \in D_0$, supponiamo che sia

$$r \equiv |x'-x''| < \frac{\varrho}{2}\,. \tag{8.10}$$

Ricordando la (6.5), possiamo scrivere

$$w(x') - w(x'') = \int_{D-B_\varrho(x')} k(x'-y)\,dy - \int_{D-B_\varrho(x'')} k(x''-y)\,dy =$$
$$\int_{D-B_\varrho(x')} [k(x'-y) - k(x''-y)]\,dy +$$
$$\int_{D-B_\varrho(x')} k(x''-y)\,dy - \int_{D-B_\varrho(x'')} k(x''-y)\,dy\ .$$

Stimiamo ora separatamente i tre integrali che compaiono a secondo membro in questa ultima formula. Abbiamo, in virtù del teorema 33,

$$\left|\int_{D-B_\varrho(x')} [k(x'-y) - k(x''-y)]\,dy\right| \leqslant$$
$$\int_{D-B_\varrho(x')} |k(x'-y) - k(x''-y)|\,dy \leqslant C \int_{D-B_\varrho(x')} \frac{|x'-x''|^\alpha}{[\varrho_y(x',x'')]^{n+\alpha}}\,dy\ .$$

Osserviamo che, per $y \in D - B_\varrho(x')$, risulta $\varrho \leqslant |y-x'|$ e quindi si ha anche (cfr. la (8.10))

$$|y-x''| \geqslant |y-x'| - |x'-x''| \geqslant \varrho - r > \varrho - \frac{\varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}\,.$$

Questo implica che

$$y \in D - B_\varrho(x') \implies \varrho_y(x',x'') \geqslant \frac{\varrho}{2}\ .$$

Si ha dunque

$$\int_{D-B_\varrho(x')} |k(x'-y) - k(x''-y)|\,dy \leqslant C\,\left(\frac{2}{\varrho}\right)^{n+\alpha} |D|\,|x'-x''|^\alpha\ . \qquad (8.11)$$

Per stimare gli altri due termini, cominciamo con l'osservare che possiamo scrivere [10]

$$\int_{D-B_\varrho(x')} k(x''-y)\,dy - \int_{D-B_\varrho(x'')} k(x''-y)\,dy =$$
$$\int_{B_\varrho(x'')-B_\varrho(x')} k(x''-y)\,dy - \int_{B_\varrho(x')-B_\varrho(x'')} k(x''-y)\,dy\,.$$

[10]Infatti, se abbiamo due insiemi A e B misurabili, risulta

$$\int_A - \int_B = \int_{A-B} - \int_{B-A}\ .$$

Facciamo vedere ora che $B_{\varrho-r}(x'') \subset B_\varrho(x')$; infatti, dire che $y \in B_{\varrho-r}(x'')$ significa $|y - x''| < \varrho - r$ e questo implica $|y - x'| \leqslant |y - x''| + |x'' - x'| < \varrho - r + |x'' - x'| = \varrho$. Essendo poi, ovviamente, $B_\varrho(x'') \subset B_{\varrho+r}(x'')$, si ha

$$B_\varrho(x'') - B_\varrho(x') = B_\varrho(x'') \cap \widetilde{B}_\varrho(x') \subset$$
$$B_{\varrho+r}(x'') \cap \widetilde{B}_{\varrho-r}(x'') = B_{\varrho+r}(x'') - B_{\varrho-r}(x'')$$

e quindi

$$\left| \int_{B_\varrho(x'')-B_\varrho(x')} k(x''-y)\, dy \right| \leqslant \int_{B_\varrho(x'')-B_\varrho(x')} |k(x''-y)|\, dy \leqslant$$
$$\int_{B_{\varrho+r}(x'')-B_{\varrho-r}(x'')} |k(x''-y)|\, dy = \int_{\varrho-r}^{\varrho+r} t^{n-1} dt \int_{|\eta|=1} |k(t\eta)|\, d\sigma_\eta =$$
$$\int_{\varrho-r}^{\varrho+r} \frac{t^{n-1}}{t^n}\, dt \int_{|\eta|=1} |k(\eta)|\, d\sigma_\eta = C\, \log \frac{\varrho+r}{\varrho-r}\ .$$

Analogamente

$$\left| \int_{B_\varrho(x')-B_\varrho(x'')} k(x''-y)\, dy \right| \leqslant \int_{B_\varrho(x')-B_\varrho(x'')} |k(x''-y)|\, dy \leqslant$$
$$\int_{B_{\varrho+r}(x'')-B_{\varrho-r}(x'')} |k(x''-y)|\, dy = \int_{\varrho-r}^{\varrho+r} t^{n-1} dt \int_{|\eta|=1} |k(t\eta)|\, d\sigma_\eta =$$
$$C\, \log \frac{\varrho+r}{\varrho-r}\ .$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\left| \int_{B_\varrho(x'')-B_\varrho(x')} k(x''-y)\, dy - \int_{B_\varrho(x')-B_\varrho(x'')} k(x''-y)\, dy \right| \leqslant 2\, C\, \log \frac{\varrho+r}{\varrho-r}$$

Nel caso in esame, poi, essendo $A = D - B_\varrho(x')$, $B = D - B_\varrho(x'')$, abbiamo

$$A - B = [D - B_\varrho(x')] - [D - B_\varrho(x'')] = [D \cap \widetilde{B}_\varrho(x')] \cap [D \cap \widetilde{B}_\varrho(x'')]^{\sim} =$$
$$[D \cap \widetilde{B}_\varrho(x')] \cap [\widetilde{D} \cup B_\varrho(x'')] = D \cap \widetilde{B}_\varrho(x') \cap B_\varrho(x'') = B_\varrho(x'') - B_\varrho(x')$$

e, analogamente,

$$B - A = B_\varrho(x') - B_\varrho(x'')\,.$$

da cui [11]

$$\left| \int_{D-B_\varrho(x')} k(x''-y)\,dy - \int_{D-B_\varrho(x'')} k(x''-y)\,dy \right| \leqslant \frac{8\,C}{\varrho}\,|x'-x''|\,.$$

Da questa disuguaglianza e dalla (8.11) segue la tesi.

37 *Sia $k \in Z(n,0,\alpha)$ $(0<\alpha\leqslant 1)$. Sia D un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia, infine, $\varphi \in C^\beta(D)$ con $0<\beta<\alpha$. Fissato comunque un dominio $D_0 \subset\subset D$, il potenziale*

$$u(x) = \int_D^* \varphi(y)\,k(x-y)\,dy \tag{8.12}$$

appartiene a $C^\beta(D_0)$.

Posto

$$v(x) = \int_D [\varphi(y)-\varphi(x)]\,k(x-y)\,dy \tag{8.13}$$

(si noti che questo integrale esiste come integrale di Lebesgue) possiamo scrivere

$$u(x) = v(x) + \varphi(x)\,w(x)$$

dove $w(x)$ è data da (8.9). Essendo $w \in C^\alpha(D_0)$ per il teorema precedente ed essendo $\varphi \in C^\beta(D_0)$ per ipotesi, basterà dimostrare la tesi per la funzione $v(x)$.

Prendiamo due punti $x', x'' \in D_0$ tali da soddisfare la (8.10). La funzione v può decomporsi nel seguente modo

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x) + v_3(x)$$

[11] Infatti, per il teorema di Lagrange, se $0<u\leqslant v$, abbiamo

$$|\log v - \log u| = \frac{1}{w}\,|v-u| \leqslant \frac{1}{u}\,|v-u|$$

dato che $u \leqslant w \leqslant v$. Se $v=\varrho+r$ e $u=\varrho-r$, si ha quindi

$$\left|\log\frac{\varrho+r}{\varrho-r}\right| \leqslant \frac{2}{\varrho-r}\,|x'-x''| \leqslant \frac{4}{\varrho}\,|x'-x''|$$

dato che $v-u=2\,r=2\,|x'-x''|$ e $\varrho-r\geqslant\frac{\varrho}{2}$ (cfr. la (8.10)).

dove

$$v_1(x) = \int_{D-B_\varrho(x')} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy\,,$$

$$v_2(x) = \int_{B_\varrho(x')-B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy\,,$$

$$v_3(x) = \int_{B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy\,,$$

e quindi

$$v(x') - v(x'') = \sum_{j=1}^{3} [v_j(x') - v_j(x'')]\,.$$

Otterremo la tesi dimostrando separatamente le tre disuguaglianze seguenti

$$|v_j(x') - v_j(x'')| \leqslant C_j\, |x' - x''|^\beta \qquad j = 1,2,3. \tag{8.14}$$

Si ha

$$\begin{gathered} v_1(x') - v_1(x'') = \\ \int_{D-B_\varrho(x')} [\varphi(y) - \varphi(x')]\, k(x'-y)\, dy - \int_{D-B_\varrho(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, k(x''-y)\, dy = \\ \int_{D-B_\varrho(x')} \varphi(y)\, [k(x'-y) - k(x''-y)]\, dy - \\ \varphi(x') \int_{D-B_\varrho(x')} k(x'-y)\, dy + \varphi(x'') \int_{D-B_\varrho(x')} k(x''-y)\, dy = \\ \int_{D-B_\varrho(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, [k(x'-y) - k(x''-y)]\, dy + \\ [\varphi(x'') - \varphi(x')] \int_{D-B_\varrho(x')} k(x'-y)\, dy \end{gathered} \tag{8.15}$$

Ricordando la (8.11), abbiamo

$$\left| \int_{D-B_\varrho(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, [k(x'-y) - k(x''-y)]\, dy \right| \leqslant$$

$$H \int_{D-B_\varrho(x')} |y - x''|^\beta\, |k(x'-y) - k(x''-y)|\, dy \leqslant K\, |x' - x''|^\alpha\,.$$

Inoltre, poiché

$$\int_{D-B_\varrho(x')} k(x'-y)\,dy = \int_D^* k(x'-y)\,dy \equiv w(x')$$

ed essendo, in base al teorema 36, $w \in C^\alpha(D_0)$ (e quindi limitata), si ha

$$\left|[\varphi(x'')-\varphi(x')]\int_{D-B_\varrho(x')} k(x'-y)\,dy\right| \leqslant K\,|x'-x''|^\beta$$

e così la (8.14) è dimostrata per $j=1$.

Consideriamo ora la v_2; analogamente a quanto fatto sopra, possiamo scrivere

$$\begin{gathered} v_2(x')-v_2(x'') = \int_{B_\varrho(x')-B_{2r}(x')} [\varphi(y)-\varphi(x'')]\,[k(x'-y)-k(x''-y)]\,dy+ \\ [\varphi(x'')-\varphi(x')]\int_{B_\varrho(x')-B_{2r}(x')} k(x'-y)\,dy\,. \end{gathered}$$

Essendo, d'altra parte, (cfr. (6.3), (6.4))

$$\int_{B_\varrho(x')-B_{2r}(x')} k(x'-y)\,dy = 0\,,$$

sarà sufficiente maggiorare il primo integrale, per il quale, intanto, si ha

$$\begin{gathered} \left|\int_{B_\varrho(x')-B_{2r}(x')} [\varphi(y)-\varphi(x'')]\,[k(x'-y)-k(x''-y)]\,dy\right| \leqslant \\ C\,|x'-x''|^\alpha \int_{B_\varrho(x')-B_{2r}(x')} \frac{|y-x''|^\beta}{[\varrho_y(x',x'')]^{n+\alpha}}\,dy\ . \end{gathered} \tag{8.16}$$

Osserviamo che quando $y \notin B_{2r}(x')$, si ha $|y-x'| \geqslant 2\,r = 2\,|x'-x''|$ e quindi

$$|y-x''| \leqslant |y-x'|+|x'-x''| \leqslant 2\,|y-x'|\ . \tag{8.17}$$

Ricordando anche la (8.8), si trae (si noti che $\alpha-\beta>0$ per ipotesi):

$$\begin{gathered} \int_{B_\varrho(x')-B_{2r}(x')} \frac{|y-x''|^\beta}{[\varrho_y(x',x'')]^{n+\alpha}}dy \leqslant 2^{\alpha+\beta+n}\int_{B_\varrho(x')-B_{2r}(x')} \frac{|y-x'|^\beta}{|y-x'|^{n+\alpha}}dy = \\ 2^{\alpha+\beta+n}\omega_n\int_{2r}^{\varrho} \frac{t^{n-1}}{t^{n+\alpha-\beta}}\,dt = 2^{\alpha+\beta+n}\omega_n\int_{2r}^{\varrho} t^{\beta-\alpha-1}dt = \\ \frac{2^{\alpha+\beta+n}\omega_n}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{(2r)^{\alpha-\beta}}-\frac{1}{\varrho^{\alpha-\beta}}\right] \leqslant \frac{\widetilde{C}}{r^{\alpha-\beta}} \end{gathered} \tag{8.18}$$

da cui, tenendo presente la (8.16), si deduce

$$\left| \int_{B_\varrho(x')-B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')] \, [k(x'-y) - k(x''-y)] \, dy \right| \leqslant$$
$$K|x'-x''|^\alpha \, \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} = K\,|x'-x''|^\beta$$

ossia la (8.14) per $j=2$.

Infine, per quanto riguarda la v_3, abbiamo

$$|v_3(x') - v_3(x'')| =$$
$$\left| \int_{B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x')] \, k(x'-y) \, dy - \int_{B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')] \, k(x''-y) \, dy \right| \leqslant$$
$$C \int_{B_{2r}(x')} \frac{|y-x'|^\beta}{|y-x'|^n} \, dy + C \int_{B_{2r}(x')} \frac{|y-x''|^\beta}{|y-x''|^n} \, dy \ .$$

Questi due ultimi integrali si maggiorano in modo simile; per il primo si ha

$$\int_{B_{2r}(x')} \frac{|y-x'|^\beta}{|y-x'|^n} \, dy = \omega_n \int_0^{2r} t^{\beta-1} dt = \omega_n \, \frac{(2r)^\beta}{\beta}$$

mentre per l'altro basta osservare che $B_{2r}(x') \subset B_{3r}(x'')$ e quindi

$$\int_{B_{2r}(x')} \frac{|y-x''|^\beta}{|y-x''|^n} \, dy \leqslant \int_{B_{3r}(x'')} \frac{|y-x''|^\beta}{|y-x''|^n} \, dy = \omega_n \, \frac{(3r)^\beta}{\beta} \ .$$

Questo prova la (8.14) per $j=3$ e completa la dimostrazione.

Osservazione 1. Una domanda lecita è: cosa succede se $\alpha = \beta$? Possiamo ancora dire che $u \in C^\beta(D_0)$? Da un esame della dimostrazione si vede che la (8.14) continua a sussistere per $j=1$ e $j=3$. Purtroppo questo non accade per la v_2; infatti, dalla (8.18) si vede che quello che si può ottenere è una disuguaglianza del tipo:

$$v_2(x') - v_2(x'') = \mathcal{O}\left(|x'-x''|^\beta \log|x'-x''|\right)$$

e quindi si può solo dire che v (e quindi u) appartiene a $C^\lambda(D_0)$ per ogni $0 < \lambda < \beta$.

Osservazione 2. Se non si è interessati a determinare l'esponente di Hölder migliore e si vuole soltanto dimostrare che la funzione u data da

(8.12) soddisfa una qualche condizione di Hölder nell'interno di D, c'è una dimostrazione molto più semplice. Infatti, dopo aver osservato che è sufficiente dimostrare la hölderianità della funzione v data da (8.13) e che il nucleo $k(x-y)$ appartiene a $G_1(n,\lambda)$ per ogni $\lambda \leqslant \alpha$, basta riconoscere che, in base al lemma 34, il nucleo

$$H(x,y) = [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)$$

appartiene a $G_1(n-\beta,\lambda)$ per ogni $\lambda < \beta$ e applicare il teorema 35, dato che, per questi valori di λ, si ha $n-\beta+\lambda < n$. Si ottiene così che v (e quindi u) appartiene a $C^\lambda(D_0)$ per ogni $0 < \lambda < \beta$.

9 Hölderianità del potenziale di doppio strato

Nel seguito ci sarà utile il concetto di numero di Lebesgue, il quale può essere dato su un qualsiasi spazio metrico M. Sia $\{\mathcal{G}\}$ un ricoprimento, costituito da aperti, di M. Il numero $\lambda > 0$ si chiama *numero di Lebesgue* del ricoprimento $\{\mathcal{G}\}$ se qualsiasi sottoinsieme di M di diametro minore di λ è contenuto in un $G \in \mathcal{G}$.

38 *Sia M uno spazio metrico compatto. Se $\{\mathcal{G}\}$ è un suo ricoprimento costituito da aperti, esso ammette un numero di Lebesgue.*

Dimostriamo questo teorema per assurdo. Se non esiste un numero di Lebesgue, per ogni n intero possiamo trovare un sottoinsieme $E_n \subset M$ con $\operatorname{diam} E_n < \frac{1}{n}$ e tale che E_n non è contenuto in alcun $G \in \{\mathcal{G}\}$.

Scegliamo un x_n in ciascuno degli E_n. Essendo M compatto, da $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente: $x_{n_k} \to x_0$. Essendo $\{\mathcal{G}\}$ un ricoprimento di M, esiste almeno un $G \in \{\mathcal{G}\}$ tale che $x \in G$. Essendo poi G aperto, esiste un $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset G$. Sia, allora, k tale che

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2}, \qquad \frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}\,.$$

Se y è un qualsiasi punto di E_{n_k}, si ha

$$d(y,x_0) \leqslant d(y,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x_0) < \delta\,;$$

questo implica che $E_{n_k} \subset G$ e ciò è assurdo.

In tutto questo paragrafo supporremo che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia limitato e la sua frontiera $\Sigma = \partial\Omega$ sia di Lyapunov, ossia $\Sigma \in C^{1,h}$.

Premettiamo due lemmi.

39 *Se $\Sigma \in C^{1,h}$ esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$|(x_k - y_k)\nu_k(y)| \leqslant C\,|x-y|^{1+h} \qquad \forall\, x, y \in \Sigma \tag{9.1}$$

(è sottointesa la sommazione per $k = 1, \ldots, n$).

È ovvio che possiamo ricoprire Σ con un numero finito di palle B_j tali che, per ogni j, $\Sigma \cap B_j$ si rappresenta localmente mediante un'equazione del tipo (2.2). Sia Λ un numero di Lebesgue relativo a questo ricoprimento.

Se risulta $|x-y| < \Lambda$, per definizione di numero di Lebesgue, i due punti x ed y appartengono allo stesso intorno $\Sigma \cap B_j$. Introduciamo, quindi, un sistema di riferimento $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ del tipo considerato più volte (cfr. la dimostrazione del teorema 7) in modo che $\Sigma \cap B_j$ si rappresenti con una equazione del tipo (2.2). I punti x ed y si scrivono, nel nuovo sistema di riferimento, nel modo seguente:

$$x = (\xi;\, \gamma(\xi)), \qquad y = (\eta;\, \gamma(\eta))$$

dove $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ appartengono ad una palla $(n-1)$-dimensionale B_R, mentre il vettore ν_y ha le componenti date da (2.6). Si ha dunque

$$|(x_k - y_k)\nu_k(y)| = \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}} \left| \sum_{j=1}^{n-1} (\xi_j - \eta_j)\gamma_{\eta_j}(\eta) - (\gamma(\xi) - \gamma(\eta)) \right|$$

ed essendo

$$\gamma(\xi) - \gamma(\eta) = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_{\eta_j}(\tau)\,(\xi_j - \eta_j)$$

con $\tau = \eta + \lambda(\xi - \eta)$ $(0 < \lambda < 1)$, abbiamo

$$|(x_k - y_k)\nu_k(y)| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{n-1} (\xi_j - \eta_j)\left(\gamma_{\eta_j}(\eta) - \gamma_{\eta_j}(\tau)\right) \right| \leqslant$$
$$H\,|\xi - \eta|\,|\eta - \tau|^h \leqslant H\,|\xi - \eta|^{1+h} \leqslant H\,|x - y|^{1+h}$$

dato che $|\tau - \eta| = \lambda\,|\xi - \eta| \leqslant |\xi - \eta|$, $|\xi - \eta| \leqslant |x - y|$ (si ricordi anche la (2.3)). La (9.1) è quindi vera se $|x - y| < \Lambda$.

Supponiamo ora che sia $|x - y| \geqslant \Lambda$; in questo caso si ha

$$|(x_k - y_k)\nu_k(y)| \leqslant |x - y| = \frac{|x-y|}{\Lambda^h}\,\Lambda^h \leqslant \frac{1}{\Lambda^h}\,|x - y|^{1+h}$$

e dunque la (9.1) sussiste con

$$C = \max\left\{H, \frac{1}{\Lambda^h}\right\}.$$

40 *Se $\Sigma \in C^{1,h}$ esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$|(x'_k - x''_k)\nu_k(y)| \leqslant C\,|x' - x''|\,(\max\{|x' - y|, |x'' - y|\})^h \qquad \forall\, x', x'', y \in \Sigma \tag{9.2}$$

(è sottointesa la sommazione per $k = 1, \ldots, n$).

Per fissare le idee supponiamo che sia $|x' - y| \leqslant |x'' - y|$. Sia inoltre $|x'' - y| < \frac{\Lambda}{2}$, dove Λ ha lo stesso significato del lemma precedente. Per definizione di Λ, i punti x', x'', y appartengono allo stesso $\Sigma \cap B_j$. Nel solito riferimento locale, possiamo scrivere

$$x' = (\xi'; \gamma(\xi')), \quad x'' = (\xi''; \gamma(x'')), \quad y = (\eta; \gamma(\eta))$$

e dunque

$$|(x'_k - x''_k)\nu_k(y)| = \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}}\left|\sum_{j=1}^{n-1}(\xi'_j - \xi''_j)\gamma_{\eta_j}(\eta) - (\gamma(\xi') - \gamma(\xi''_i))\right|.$$

Essendo

$$\gamma(\xi') - \gamma(\xi'') = \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_{\eta_j}(\tau)(\xi'_j - \xi''_j)$$

con $\tau = \xi' + \lambda(\xi'' - \xi')$ $(0 < \lambda < 1)$, abbiamo

$$|(x'_k - x''_k)\nu_k(y)| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n-1}(\xi'_j - \xi''_j)(\gamma_{\eta_j}(\eta) - \gamma_{\eta_j}(\tau))\right| \leqslant H\,|\xi' - \xi''|\,|\eta - \tau|^h.$$

Osserviamo che $\tau - \eta = (1-\lambda)\xi' + \lambda\xi'' - \eta = (1-\lambda)(\xi' - \eta) + \lambda(\xi'' - \eta)$ e quindi $|\tau - \eta| \leqslant (1-\lambda)|\xi' - \eta| + \lambda|\xi'' - \eta| \leqslant (1-\lambda)|x' - y| + \lambda|x'' - y| \leqslant |x'' - y|$. In definitiva abbiamo

$$|(x'_k - x''_k)\nu_k(y)| \leqslant H\,|x' - x''|\,|x'' - y|^h.$$

Se, invece, $|x'' - y| \geqslant \frac{\Lambda}{2}$, possiamo scrivere

$$|(x'_k - x''_k)\nu_k(y)| \leqslant |x' - x''| = \frac{|x' - x''|}{\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^h}\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^h \leqslant \left(\frac{2}{\Lambda}\right)^h |x' - x''|\,|x'' - y|^h.$$

È così dimostrato che la (9.2) sussiste con

$$C = \max\left\{H, \left(\frac{2}{\Lambda}\right)^h\right\}.$$

41 *Se* $\Sigma \in C^{1,h}$ *risulta*

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y) \in G_1(n-1-h, \alpha) \qquad (x, y \in \Sigma)$$

per ogni $0 < \alpha \leqslant 1$.

La i) di p.60 segue immediatamente dalla (9.1), dato che

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\,\frac{(y_h - x_h)\nu_h(y)}{|y - x|^n}.$$

Per quanto riguarda l'altra condizione, supponendo $|y - x'| \leqslant |y - x''|$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x',y) - \frac{\partial}{\partial\nu_y} s(x'',y) = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{(y_h - x'_h)\nu_h(y)}{|y - x'|^n} - \frac{(y_h - x''_h)\nu_h(y)}{|y - x''|^n}\right) =$$
$$\frac{1}{\omega_n}\,(y_h - x'_h)\nu_h(y)\left[\frac{1}{|y - x'|^n} - \frac{1}{|y - x''|^n}\right] +$$
$$\frac{1}{\omega_n}\,\frac{(y_h - x'_h)\nu_h(y) - (y_h - x''_h)\nu_h(y)}{|y - x''|^n}$$

Da (8.2), (9.1) segue

$$\left|(y_h - x'_h)\nu_h(y)\left[\frac{1}{|y-x'|^n} - \frac{1}{|y-x''|^n}\right]\right| \leqslant$$

$$C\,|y-x'|^{1+h}\,\frac{|x'-x''|^\alpha}{[\varrho_y(x',x'')]^{n+\alpha}} = C\,\frac{|x'-x''|^\alpha}{[\varrho_y(x',x'')]^{n-1-h+\alpha}}.$$

Inoltre, in virtù della (9.2),

$$\left|\frac{(y_h - x'_h)\nu_h(y) - (y_h - x''_h)\nu_h(y)}{|y-x''|^n}\right| =$$

$$\left|\frac{(x''_h - x'_h)\nu_h(y)}{|y-x''|^n}\right| \leqslant C\,\frac{|x'-x''|\,|x''-y|^h}{|y-x''|^n}$$

Ricordando la (8.4), si trae

$$|x'-x''| = |x'-x''|^\alpha |x'-x''|^{1-\alpha} \leqslant 2^{1-\alpha}|x'-x''|^\alpha |y-x''|^{1-\alpha} \tag{9.3}$$

da cui

$$\left|\frac{(y_h - x'_h)\nu_h(y) - (y_h - x''_h)\nu_h(y)}{|y-x''|^n}\right| \leqslant$$

$$2^{1-\alpha}C\,\frac{|x'-x''|^\alpha}{|y-x''|^{n-1-h+\alpha}} \leqslant 2^{1-\alpha}C\,\frac{|x'-x''|^\alpha}{[\varrho_y(x',x'')]^{n-1-h+\alpha}}$$

(si noti che $n-1-h+\alpha > 0$ dato che $n-1-h \geqslant n-2 \geqslant 0$) e il teorema è dimostrato.

42 *Sia $\Sigma \in C^{1,h}$ e sia $\varphi \in L^\infty(\Sigma)$. Il potenziale di doppio strato*

$$w(x) = \int_\Sigma \varphi(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_y}s(x,y)\,d\sigma_y$$

appartiene a $C^\beta(\Sigma)$ per ogni $0 < \beta < h$.

In base al teorema precedente abbiamo che

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}s(x,y) \in G_1(n-1-h,\beta).$$

Poiché stiamo supponendo $\beta < h$, abbiamo $n-1-h+\beta < n-1$ e sono quindi soddisfatte delle ipotesi analoghe a quelle del teorema 35. Il presente risultato si ottiene ripetendo i ragionamenti impiegati nella dimostrazione del detto teorema. È facile, infatti, vedere che è possibile ripetere quei ragionamenti su Σ.

10 I potenziali di doppio strato tangenziali

Indichiamo con M^{ih} il seguente operatore tangenziale

$$M^{ih} = \nu_i \frac{\partial}{\partial x_h} - \nu_h \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (1 \leqslant i, h \leqslant n).$$

Chiameremo potenziali di doppio strato tangenziali i seguenti integrali

$$\int_\Sigma \varphi(y)\, M^{ih}_y[s(x,y)]\, d\sigma_y \,. \tag{10.1}$$

Tali potenziali risultano ovviamente definiti in $\mathbb{R}^n - \Sigma$, mentre su Σ la questione dell'esistenza è più delicata, dato che, a differenza del nucleo del potenziale di doppio strato - che presenta una singolarità debole - il nucleo $M^{ih}_y[s(x,y)]$ presenta una singolarità forte:

$$M^{ih}_y[s(x,y)] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\right). \tag{10.2}$$

43 *Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$ risulta*

$$\int_\Sigma M^{ih} u \, d\sigma = 0\,.$$

Inoltre

$$\int_\Sigma M^{ih}_y[s(x,y)]\, d\sigma_y = 0 \qquad \forall\; x \in \mathbb{R}^n - \Sigma. \tag{10.3}$$

La prima parte della tesi segue dalle formule di Gauss-Green:

$$\int_\Sigma M^{ih} u\, d\sigma = \int_\Sigma (\nu_i u_{x_h} - \nu_h u_{x_i})\, d\sigma = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_{x_h}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{x_i}}{\partial x_h}\right) dx = 0.$$

Questo implica immediatamente la (10.3) per $x \in \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$. Sia ora $x \in \Omega$; presa una palla $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, applicando la formula di Gauss-Green in $\Omega - B_\varepsilon(x)$, si trova:

$$\int_{\partial(\Omega - B_\varepsilon(x))} M^{ih}_y[s(x,y)]\, d\sigma_y = 0$$

ossia
$$\int_\Sigma M_y^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} M_y^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y$$
(su $\partial B_\varepsilon(x)$ abbiamo preso la normale esterna a $B_\varepsilon(x)$) e d'altra parte
$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} M_y^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (\nu_i(y)s_{y_h}(x,y) - \nu_h(y)s_{y_i}(x,y))\,d\sigma_y =$$
$$\frac{1}{\omega_n\varepsilon^n}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} (\nu_i(y)\,(y_h - x_h) - \nu_h(y)\,(y_i - x_i))\,d\sigma_y = 0\,.$$

Se $x \in \Sigma$ il potenziale (10.1) non esiste - in generale - come integrale di Lebesgue; tuttavia vedremo, sotto opportune ipotesi sulla densità φ, che esso esiste come integrale singolare, ossia
$$\int_\Sigma^* \varphi(y)\,M_y^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\Sigma - B_\varepsilon(x)} \varphi(y)\,M_y^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y\,.$$

44 *Sia $\Sigma \in C^{1,h}(\Sigma)$ e supponiamo $\varphi \in C^\beta(\Sigma)$ $(0 < h,\beta \leqslant 1)$. Per ogni $x \in \Sigma$ esiste l'integrale singolare*
$$\int_\Sigma^* \varphi(y)\,M_y^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y\,. \tag{10.4}$$

Dimostriamo dapprima che l'integrale singolare esiste se $\varphi \equiv 1$. Fissato $x \in \Sigma$, consideriamo una palla $B_\varepsilon(x)$ tale che $\Sigma \cap B_\varepsilon(x)$ si sia costituito da un unico "pezzo" di frontiera. Consideriamo l'aperto Ω_ε la cui frontiera è costituita da $(\Sigma - B_\varepsilon(x)) \cup (\partial B_\varepsilon(x) \cap \Omega)$; essendo $s(x,y)$ regolare in Ω_ε e potendo applicare le formule di Gauss-Green (come nel lemma precedente), troviamo
$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} M_y^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y = 0\,,$$
ossia
$$\int_{\Sigma - B_\varepsilon(x)} M_y^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y = \int_{\partial B_\varepsilon(x)\cap\Omega} M_y^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y.$$

D'altra parte, su $\partial B_\varepsilon(x)$ si ha
$$\nu_h(y) = \frac{y_h - x_h}{\varepsilon}\,.$$

Si ha dunque

$$M_y^{ih}[s(x,y)] = \left(\nu_i(y)\frac{\partial}{\partial y_h} - \nu_h(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\right) s(x,y) =$$
$$\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{y_i - x_i}{\varepsilon}\,\frac{y_h - x_h}{\varepsilon^n} - \frac{y_h - x_h}{\varepsilon}\,\frac{y_i - x_i}{\varepsilon^n}\right) \equiv 0$$

e quindi

$$\int_{\Sigma - B_\varepsilon(x)} M_y^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y = \int_{\partial B_\varepsilon(x)\cap\Omega} M_y^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y = 0 \tag{10.5}$$

da cui segue immediatamente che il seguente limite esiste e si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Sigma - B_\varepsilon(x)} M_y^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y = 0\,.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\int_\Sigma^* M_y^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y = 0 \qquad x \in \Sigma. \tag{10.6}$$

Sia ora $\varphi \in C^\beta(\Sigma)$; si ha

$$\int_{\Sigma - B_\varepsilon(x)} \varphi(y)\, M_y^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y =$$
$$\int_{\Sigma - B_\varepsilon(x)} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, M_y^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y + \varphi(x) \int_{\Sigma - B_\varepsilon(x)} M_y^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y$$

da cui, tenendo presente la (10.6),

$$\int_\Sigma^* \varphi(y)\, M_y^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y = \int_\Sigma [\varphi(y) - \varphi(x)]\, M_y^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y\,,$$

dato che questo integrale esiste come integrale di Lebesgue, essendo

$$[\varphi(y) - \varphi(x)]\, M_y^{ih}[s(x,y)] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1-\beta}}\right).$$

45 *Sia* $\Sigma \in C^{1,h}$*; risulta*

$$M_y^{ih}[s(x,y)] \in G_1(n-1,\alpha) \qquad (x, y \in \Sigma)$$

per ogni $0 < \alpha \leqslant 1$.

La (10.2) mostra che la i) di p.60 è soddisfatta. Inoltre, supponendo $|y - x'| \leqslant |y - x''|$,

$$
\begin{gathered}
M_y^{ih}[s(x',y)] - M_y^{ih}[s(x'',y)] = \\
\frac{1}{\omega_n}\left[\frac{\nu_i(y)\,(y_h - x'_h) - \nu_h(y)\,(y_i - x'_i)}{|y - x'|^n} - \frac{\nu_i(y)\,(y_h - x''_h) - \nu_h(y)\,(y_i - x''_i)}{|y - x''|^n}\right] = \\
\frac{1}{\omega_n}\left[\nu_i(y)\,(y_h - x'_h) - \nu_h(y)\,(y_i - x'_i)\right]\left[\frac{1}{|y - x'|^n} - \frac{1}{|y - x''|^n}\right] + \\
\frac{1}{\omega_n}\frac{\nu_i(y)\,(y_h - x'_h) - \nu_h(y)\,(y_i - x'_i) - \nu_i(y)\,(y_h - x''_h) + \nu_h(y)\,(y_i - x''_i)}{|y - x''|^n}
\end{gathered}
$$

e ricordando la (8.2), il primo termine si può maggiorare nel modo seguente

$$
\begin{gathered}
\left|\left[\nu_i(y)\,(y_h - x'_h) - \nu_h(y)\,(y_i - x'_i)\right]\left[\frac{1}{|y - x'|^n} - \frac{1}{|y - x''|^n}\right]\right| \leqslant \\
2\,n\,|y - x'|\frac{|x' - x''|^\alpha}{[\varrho_y(x', x'')]^{n+\alpha}} = 2\,n\,\frac{|x' - x''|^\alpha}{[\varrho_y(x', x'')]^{n-1+\alpha}}
\end{gathered}
$$

mentre, per quanto riguarda l'altro termine, (cfr. la (9.3))

$$
\begin{gathered}
\left|\frac{\nu_i(y)\,(y_h - x'_h) - \nu_h(y)\,(y_i - x'_i) - \nu_i(y)\,(y_h - x''_h) + \nu_h(y)\,(y_i - x''_i)}{|y - x''|^n}\right| = \\
\left|\frac{\nu_i(y)\,(x''_h - x'_h) - \nu_h(y)\,(x''_i - x'_i)}{|y - x''|^n}\right| \leqslant 2\,\frac{|x' - x''|}{|y - x''|^n} \leqslant \\
2^{2-\alpha}\frac{|x' - x''|^\alpha |y - x''|^{1-\alpha}}{|y - x''|^n} = 2^{2-\alpha}\frac{|x' - x''|^\alpha}{|y - x''|^{n-1+\alpha}} \leqslant 2^{2-\alpha}\frac{|x' - x''|^\alpha}{[\varrho_y(x', x'')]^{n-1+\alpha}}
\end{gathered}
$$

e questo completa la dimostrazione.

Il prossimo teorema fornisce un analogo del teorema del salto 8 per il potenziale di doppio strato tangenziale.

46 *Sia* $\varphi \in L^1(\Sigma)$ *e sia* x_0 *un punto di Lebesgue della* φ. *Risulta*

$$
\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu^{\pm}_{x_0}}} \left[\int_\Sigma \varphi(y)\, M^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y - \int_{\Sigma - \Sigma_r(x_0)} \varphi(y)\, M^{ih}[s(x_0,y)]\, d\sigma_y\right] = 0\,, \tag{10.7}
$$

dove $r = |x - x_0|$ *e* $\Sigma_r(x_0) = \Sigma \cap B_r(x_0)$.

Per fissare le idee consideriamo il caso $x \in \nu^+_{x_0}$; in maniera del tutto analoga si ragiona se $x \in \nu^-_{x_0}$. Se $\varphi \equiv 1$ la formula (10.7) è senz'altro vera per ogni $x_0 \in \Sigma$, come segue subito dalle (10.3), (10.5). La tesi sarà quindi ottenuta se facciamo vedere che, fissato un punto di Lebesgue x_0 della φ, risulta

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}_{x_0}}} \left[\int_\Sigma \psi(y)\, M^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y - \int_{\Sigma-\Sigma_r(x_0)} \psi(y)\, M^{ih}[s(x_0,y)]\, d\sigma_y\right] = 0$$

dove $\psi(y) = \varphi(x) - \varphi(x_0)$. Possiamo scegliere un $d > 0$ tale che, per ogni $x \in \Sigma$, l'intersezione $\Sigma \cap B_d(x)$ si rappresenta con un'equazione del tipo (2.2). Inoltre possiamo supporre d tale che $|\operatorname{grad}\gamma(\eta)| \leqslant 1$ [12]. Non appena $0 < r < d$ possiamo scrivere

$$\begin{gathered}\int_\Sigma \psi(y)\, M^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y - \int_{\Sigma-\Sigma_r(x_0)} \psi(y)\, M^{ih}[s(x_0,y)]\, d\sigma_y = \\ \int_{\Sigma-\Sigma_d(x_0)} \psi(y)\,\{M^{ih}[s(x,y)] - M^{ih}[s(x_0,y)]\}\, d\sigma_y + \\ \int_{\Sigma_d(x_0)-\Sigma_r(x_0)} \psi(y)\,\{M^{ih}[s(x,y)] - M^{ih}[s(x_0,y)]\}\, d\sigma_y + \\ \int_{\Sigma_r(x_0)} \psi(y)\, M^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y\,.\end{gathered}$$

È ovvio che risulta

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{+}_{x_0}}} \int_{\Sigma-\Sigma_d(x_0)} \psi(y)\,\{M^{ih}[s(x,y)] - M^{ih}[s(x_0,y)]\}\, d\sigma_y = 0\,. \tag{10.8}$$

Inoltre, tenendo presente come abbiamo scelto d ed essendo $x \in \nu^+_{x_0}$, risulta [13] $|x-y| \geqslant \frac{|x_0-y|}{\sqrt{2}}$. Possiamo quindi maggiorare così il secondo termine:

$$\left|\int_{\Sigma_d(x_0)-\Sigma_r(x_0)} \psi(y)\,\{M^{ih}[s(x,y)] - M^{ih}[s(x_0,y)]\}\, d\sigma_y\right| \leqslant$$

[12] Perché ?

[13] Introdotte le solite coordinate locali η, avremo $x_0 = (0;0)$, $y = (\eta;\gamma(\eta))$, $x = (0;r)$ ($r = |x-x_0|$). Da questo segue $|x_0-y|^2 = |\eta|^2 + \gamma^2(\eta) \leqslant 2\,|\eta|^2$ (si ricordi che, per come è stato scelto d risulta $|\operatorname{grad}\gamma| \leqslant 1$ e dunque $|\gamma(\eta)| \leqslant |\eta|$). Segue $|x-y|^2 = |\eta|^2 + (\gamma(\eta)-r)^2 \geqslant |\eta|^2 \geqslant \frac{|x_0-y|^2}{2}$.

$$C\,|x-x_0|\int_{\Sigma_d(x_0)-\Sigma_r(x_0)}\frac{|\psi(y)|}{|y-x_0|^n}\,d\sigma_y=$$
$$C\,|x-x_0|\int_\Delta\frac{\Psi(\eta)}{[|\eta|^2+\gamma^2(\eta)]^{\frac{n}{2}}}\sqrt{1+|\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}\,d\eta$$

dove $\Delta=\{\eta\in\mathbb{R}^{n-1}\mid r\leqslant\sqrt{|\eta|^2+\gamma^2(\eta)}\leqslant d\}$ e $\Psi(\eta)$ rappresenta la funzione $|\psi(y)|$ espressa in termini della variabile η. In Δ risulta $|\eta|\leqslant\sqrt{|\eta|^2+\gamma^2(\eta)}\leqslant d$, $r\leqslant\sqrt{|\eta|^2+\gamma^2(\eta)}\leqslant\sqrt{2}\,|\eta|$ e quindi

$$\Delta\subset b_d(0)-b_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(0) \tag{10.9}$$

dove le b denotano delle palle $(n-1)$-dimensionali. Quindi, ponendo

$$\Phi(\varrho)=\int_{b_\varrho(0)}\Psi(\eta)\,d\eta=\int_0^\varrho t^{n-1}\int_{|\omega|=1}\Psi(t\omega)\,d\sigma_\omega\,,$$

abbiamo

$$\int_\Delta\frac{\Psi(\eta)}{[|\eta|^2+\gamma^2(\eta)]^{\frac{n}{2}}}\sqrt{1+|\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}\,d\eta\leqslant\sqrt{2}\int_{b_d(0)-b_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(0)}\frac{\Psi(\eta)}{|\eta|^n}\,d\eta=$$
$$\sqrt{2}\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^d\frac{t^{n-1}}{t^n}\,dt\int_{|\omega|=1}\Psi(t\omega)\,d\sigma_\omega=\sqrt{2}\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^d\frac{\Phi'(t)}{t^n}\,dt=$$
$$\sqrt{2}\left[\frac{\Phi(t)}{t^n}\right]_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^d+n\sqrt{2}\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^d\frac{\Phi(t)}{t^{n+1}}\,dt=\sqrt{2}\left[\frac{\Phi(d)}{d^n}-\frac{\Phi\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^n}\right]+n\sqrt{2}\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^d\frac{\Phi(t)}{t^{n+1}}\,dt.$$

Il fatto che x_0 sia un punto di Lebesgue per la φ significa che

$$\lim_{r\to0^+}\frac{\Phi(r)}{r^{n-1}}=0\,;$$

fissato un $\varepsilon>0$ si può allora determinare un $r_\varepsilon>0$ tale che per $0<t<r_\varepsilon$ risulta

$$\frac{\Phi(t)}{t^{n-1}}<\varepsilon\ .$$

In definitiva, per quanto riguarda il secondo termine, prendendo $d<r_\varepsilon$, risulta

$$\left|\int_{\Sigma_d(x_0)-\Sigma_r(x_0)}\psi(y)\,\{M^{ih}[s(x,y)]-M^{ih}[s(x_0,y)]\}\,d\sigma_y\right|\leqslant$$
$$\widetilde{C}\,r\left(\frac{\Phi(d)}{d^n}+\varepsilon\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^d\frac{dt}{t^2}\right)\leqslant\widetilde{C}\,r\left(\frac{\Phi(d)}{d^n}+\varepsilon\,\frac{\sqrt{2}}{r}\right)$$

da cui segue subito

$$\limsup_{r\to 0^+}\left|\int_{\Sigma_d(x_0)-\Sigma_r(x_0)}\psi(y)\,\{M^{ih}[s(x,y)]-M^{ih}[s(x_0,y)]\}\,d\sigma_y\right|\leqslant \widetilde{C}\,\sqrt{2}\,\varepsilon\,. \tag{10.10}$$

Infine, per quanto riguarda l'integrale esteso a $\Sigma_r(x_0)$, dimostriamo dapprima che, prendendo d tale da soddisfare - oltre a tutte le condizioni già richieste - anche la disuguaglianza $|\operatorname{grad}\gamma(\eta)|\leqslant \frac{1}{2}$, risulta

$$|x-y|\geqslant\frac{|x-x_0|}{\sqrt{2}}\,. \tag{10.11}$$

Infatti, utilizzando il solito sistema di coordinate locali, per il quale $x_0=(0;0)$, $y=(\eta;\gamma(\eta))$, $x=(0;r)$, abbiamo $|\gamma(\eta)|\leqslant\frac{|\eta|}{2}$ da cui

$$|x-y|^2=|\eta|^2+(\gamma(\eta)-r)^2=|\eta|^2+\gamma^2(\eta)+r^2-2\,r\,\gamma(\eta)\geqslant|\eta|^2+r^2-r\,|\eta|\geqslant$$
$$|\eta|^2+r^2-\frac{1}{2}\,(|\eta|^2+r^2)=\frac{1}{2}\,(|\eta|^2+r^2)\geqslant\frac{r^2}{2}=\frac{|x-x_0|^2}{2}\,.$$

La (10.11) permette dunque di maggiorare nel modo seguente

$$\left|\int_{\Sigma_r(x_0)}\psi(y)\,M^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y\right|\leqslant C\int_{\Sigma_r(x_0)}\frac{\psi(y)}{|x-y|^n}\,d\sigma_y\leqslant$$
$$2^{\frac{n}{2}}\,C\,\frac{1}{r^{n-1}}\int_{\Sigma_r(x_0)}\psi(y)\,d\sigma_y$$

dove l'ultimo termine tende a 0 quando $r\to 0^+$ per definizione di punto di Lebesgue. Questo fatto, unito alle (10.8) e (10.10), mostra che

$$\limsup_{r\to 0^+}\left|\int_{\Sigma}\psi(y)\,M^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y-\int_{\Sigma-\Sigma_r(x_0)}\psi(y)\,M^{ih}[s(x_0,y)]\,d\sigma_y\right|\leqslant\widetilde{C}\,\sqrt{2}\,\varepsilon$$

ossia la tesi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon>0$.

Tenendo conto del teorema appena dimostrato e del 44 si ottiene

47 *Sia $\Sigma\in C^{1,h}$ e supponiamo $\varphi\in C^{\beta}(\Sigma)$ $(0<h,\beta\leqslant 1)$. Per ogni $x_0\in\Sigma$ risulta*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}_{x_0}}}\int_{\Sigma}\varphi(y)\,M^{ih}[s(x,y)]\,d\sigma_y=\int^{*}_{\Sigma}\varphi(y)\,M^{ih}[s(x_0,y)]\,d\sigma_y\,.$$

Tale relazione di limite è uniforme al variare di $x_0 \in \Sigma$ *e quindi la funzione*

$$v(x) \begin{cases} = \displaystyle\int_\Sigma \varphi(y)\, M^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y & x \in \Omega \\ \displaystyle\int_\Sigma^* \varphi(y)\, M^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y & x \in \Sigma \end{cases}$$

è continua in $\overline{\Omega}$.

La prima parte del teorema è una conseguenza immediata della (10.7) e del fatto che l'integrale singolare

$$\int_\Sigma^* \varphi(y)\, M^{ih}[s(x_0,y)]\, d\sigma_y$$

esiste in virtù del teorema 44. Un attento esame della dimostrazione del teorema 46 mostra, poi, che la relazione di limite (10.7) è uniforme rispetto a $x_0 \in \Sigma$. L'ultima parte dell'enunciato, quindi, segue dal lemma 10.

48 *Sia* $\Sigma \in C^{1,h}$ *e supponiamo* $\varphi \in C^\beta(\Sigma)$ *con* $0 < \beta < h \leqslant 1$. *I potenziali di doppio strato tangenziali (10.4) risultano di classe* $C^\beta(\Sigma)$.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema 37. Posto $v(x)$ il potenziale (10.4), ricordando la (10.6), possiamo scrivere

$$v(x) = \int_\Sigma [\varphi(y) - \varphi(x)]\, M_y^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y.$$

Esiste un $d > 0$ tale che, per ogni $x \in \Sigma$, l'intersezione $\Sigma \cap B_d(x)$ si rappresenta con un'equazione del tipo (2.2). Supponiamo di prendere due punti $x', x'' \in \Sigma$ tali che $r \equiv |x' - x''| < \frac{d}{3}$ e consideriamo la differenza

$$v(x') - v(x'') =$$
$$\int_\Sigma [\varphi(y) - \varphi(x')]\, M_y^{ih}[s(x',y)]\, d\sigma_y - \int_\Sigma [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, M_y^{ih}[s(x'',y)]\, d\sigma_y;$$

possiamo scrivere

$$\int_\Sigma = \int_{\Sigma - B_{2r}(x')} + \int_{\Sigma \cap B_{2r}(x')}.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, abbiamo (cfr. (8.15) e (10.5))

$$\left| \int_{\Sigma - B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x')]\, M_y^{ih}[s(x',y)]\, d\sigma_y - \right.$$
$$\left. \int_{\Sigma - B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, M_y^{ih}[s(x'',y)]\, d\sigma_y \right| =$$
$$\left| \int_{\Sigma - B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, [M_y^{ih}[s(x',y) - s(x'',y)]\, d\sigma_y + \right.$$
$$\left. [\varphi(x'') - \varphi(x')] \int_{\Sigma - B_{2r}(x')} M_y^{ih}[s(x',y)]\, d\sigma_y \right| =$$
$$\left| \int_{\Sigma - B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, [M_y^{ih}[s(x',y) - s(x'',y)]\, d\sigma_y \right| .$$

Quest'ultimo integrale può essere ulteriormente decomposto:

$$\int_{\Sigma - B_{2r}(x')} = \int_{\Sigma - B_d(x')} + \int_{(\Sigma \cap B_d(x')) - B_{2r}(x')}$$

e si ha, in virtù del lemma 45, e ragionando come per la (8.11),

$$\left| \int_{\Sigma - B_d(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, [M_y^{ih}[s(x',y) - s(x'',y)]\, d\sigma_y \right|$$
$$C \int_{\Sigma - B_d(x')} |y - x''|^{\beta} \frac{|x' - x''|^h}{[\varrho_y(x',x'')]^{n-1+h}}\, d\sigma_y \leqslant K\, |x' - x''|^h .$$

Inoltre, ricordando (8.8) e (8.17),

$$\left| \int_{(\Sigma \cap B_d(x')) - B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, [M_y^{ih}[s(x',y) - s(x'',y)]\, d\sigma_y \right| \leqslant$$
$$C \int_{(\Sigma \cap B_d(x')) - B_{2r}(x')} |y - x''|^{\beta} \frac{|x' - x''|^h}{[\varrho_y(x',x'')]^{n-1+h}}\, d\sigma_y \leqslant$$
$$K\, |x' - x''|^h \int_{(\Sigma \cap B_d(x')) - B_{2r}(x')} \frac{d\sigma_y}{|y - x'|^{n-1+h-\beta}} =$$
$$K\, |x' - x''|^h \int_{\Delta} \frac{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \gamma(\eta)|^2}}{[|\eta|^2 + \gamma^2(\eta)]^{\frac{n-1+h-\beta}{2}}}\, d\eta$$

dove $\Delta = \{\eta \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 2r \leqslant \sqrt{|\eta|^2 + \gamma^2(\eta)} \leqslant d\}$. Per stimare quest'ultimo integrale, osserviamo che, ragionando come per la (10.9), si trova

$$\Delta \subset b_d(0) - b_{\sqrt{2}r}(0)$$

dove le b denotano delle palle $(n-1)$-dimensionali. Si ha quindi

$$\begin{gathered}\int_\Delta \frac{\sqrt{1 + |\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}}{[|\eta|^2 + \gamma^2(\eta)]^{\frac{n-1+h-\beta}{2}}}\, d\eta \leqslant \sqrt{2} \int_{b_d(0)-b_{\sqrt{2}r}(0)} \frac{d\eta}{|\eta|^{n-1+h-\beta}} = \\ \sqrt{2}\,\omega_{n-1} \int_{\sqrt{2}r}^{d} \frac{t^{n-2}}{t^{n-1+h-\beta}}\, dt \leqslant \sqrt{2}\,\omega_{n-1} (\sqrt{2}\,r)^{\beta-h}.\end{gathered} \tag{10.12}$$

Questo mostra che

$$\left| \int_{(\Sigma\cap B_d(x'))-B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, [M_y^{ih}[s(x',y) - s(x'',y)]\, d\sigma_y \right| \leqslant \widetilde{K}\, |x' - x''|^\beta.$$

Infine, per quanto riguarda gli integrali estesi a $\Sigma \cap B_{2r}(x')$, abbiamo

$$\begin{gathered}\left| \int_{\Sigma\cap B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x')]\, M_y^{ih}[s(x',y)]\, d\sigma_y - \right. \\ \left. \int_{\Sigma\cap B_{2r}(x')} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, M_y^{ih}[s(x'',y)]\, d\sigma_y \right| \leqslant \\ C \left(\int_{\Sigma\cap B_{2r}(x')} \frac{d\sigma_y}{|y - x'|^{n-1-\beta}} + \int_{\Sigma\cap B_{3r}(x'')} \frac{d\sigma_y}{|y - x''|^{n-1-\beta}} \right) \leqslant K\, |x' - x''|^\beta\end{gathered}$$

dato che risulta

$$\begin{gathered}\int_{\Sigma\cap B_{2r}(x')} \frac{d\sigma_y}{|y - x'|^{n-1-\beta}} \leqslant \int_{b_{2r}(0)} \frac{\sqrt{1 + |\operatorname{grad}\gamma(\eta)|^2}}{[|h|^2 + \gamma^2(\eta)]^{n-1-\beta}}\, d\eta \leqslant \\ \sqrt{2} \int_{b_{2r}(0)} \frac{d\eta}{|\eta|^{n-1-\beta}} = K\, |x' - x''|^\beta\end{gathered} \tag{10.13}$$

e, analogamente,

$$\int_{\Sigma\cap B_{3r}(x'')} \frac{d\sigma_y}{|y - x''|^{n-1-\beta}} \leqslant K\, |x' - x''|^\beta.$$

Il teorema è così dimostrato.

Anche ora possiamo fare due osservazioni analoghe a quelle fatte a p.71.

Osservazione 1. Cosa succede se $\alpha = \beta$? Anche qui, come a p.71, potremmo osservare che la dimostrazione eseguita non permette di concludere che il potenziale di doppio strato tangenziale appartiene a $C^\beta(\Sigma)$ quando $\alpha = \beta$. Tuttavia in questo caso, a differenza di quanto accade nel teorema 37, stiamo considerando un nucleo estremamente particolare. Si può dimostrare che, se $\alpha = \beta < 1$, in effetti il potenziale di doppio strato appartiene a $C^\beta(\Sigma)$. Questo risultato si basa su un teorema piuttosto difficile, del quale diremo qualcosa più avanti (cfr. l'Osservazione di p.95).

Osservazione 2. L'osservazione 2 di p.71, invece, si può ripetere. Infatti, se ci si contenta di dimostrare soltanto l'hölderianità per ogni $\lambda < \beta$, si può applicare il teorema 45 e ragionare come nell'osservazione 2 di p.71. Lasciamo al lettore il compito di sviluppare i dettagli.

11 Hölderianità delle derivate seconde di un potenziale di campo armonico

Cominciamo col dimostrare il seguente lemma:

49 *Si ha*

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) \in G_1(n-1,\alpha), \qquad M^{ih}[s(x,y)] \in G_1(n-1,\alpha) \quad (x \in \overline{\Omega},\ y \in \Sigma)$$

per ogni $0 < \alpha \leqslant 1$.

La tesi segue facilmente dal fatto che, in base al teorema 33, per $h = 1, \ldots, n$, risulta

$$\frac{x_h - y_h}{|x-y|^n} \in G_1(n-1,\alpha)\,.$$

Il prossimo teorema è piuttosto difficile, ma fornisce un risultato per noi essenziale.

50 *Sia* $\Sigma \in C^{1,h}$ *e supponiamo* $\varphi \in C^\beta(\Sigma)$ *con* $0 < \beta < h \leqslant 1$. *Le funzioni*

$$w_1(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Sigma \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y & x \in \Omega \\ \displaystyle\frac{1}{2}\varphi(x) + \int_\Sigma \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y & x \in \Sigma \end{cases}$$

$$w_{ih}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Sigma \varphi(y)\, M^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y & x \in \Omega \\ \displaystyle\int_\Sigma^* \varphi(y)\, M^{ih}[s(x,y)]\, d\sigma_y & x \in \Sigma \end{cases}$$

risultano di classe $C^\beta(\overline{\Omega})$.

Indichiamo con $w(x)$ una delle funzioni di cui all'enunciato e con $G(x,y)$ il relativo nucleo, ossia (per $x \in \Omega$)

$$w(x) = \int_\Sigma \varphi(y)\, G(x,y)\, d\sigma_y\,.$$

Sia d il numero di cui alla nota [12]; ovviamente possiamo ricoprire Σ con l'unione

$$\bigcup_{x\in\Sigma} \Sigma_d(x) \qquad (\Sigma_d(x) = \Sigma \cap B_d(x))$$

e determinare un $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ tale che

$$\overline{\Omega} \subset \Omega_0 \cup \bigcup_{x\in\Sigma} B_d(x)\,.$$

Sia Λ un numero di Lebesgue relativo a questo ricoprimento. È chiaro [14] che non è restrittivo supporre $\Lambda \leqslant d$.

Sappiamo già che la funzione w risulta continua in $\overline{\Omega}$ (cfr. l'Osservazione di p.20 e il teorema 47). Basterà, quindi, dimostrare che

$$|w(x') - w(x'')| \leqslant C\, |x' - x''|^\beta \qquad \forall\, x', x'' \in \Omega.$$

Fissiamo due di questi punti x', x'' e consideriamo i seguenti vari casi (si ricordi la definizione di numero di Lebesgue !):

1) $|x' - x''| \geqslant \dfrac{\Lambda}{4}$

2) $|x' - x''| < \dfrac{\Lambda}{4}$ con $x', x'' \in \Omega_0$;

3) $|x' - x''| < \dfrac{\Lambda}{4}$ con $x', x'' \in B_d(x)$ per un $x \in \Sigma$.

[14] Se Λ è un numero di Lebesgue per un ricoprimento, ogni Λ' tale che $0 < \Lambda' < \Lambda$ è ancora un numero di Lebesgue per lo stesso ricoprimento.

Nel caso 1), essendo w continua in $\overline{\Omega}$ e quindi limitata, si ha semplicemente

$$|w(x') - w(x'')| \leqslant 2\,M = \frac{2\,M}{\frac{\Lambda}{4}}\,\frac{\Lambda}{4} \leqslant \frac{8\,M}{\Lambda}\,|x' - x''|\,.$$

Anche il secondo caso è piuttosto semplice, dato che, indicata con c la distanza (positiva) tra Ω_0 e Σ, si ha

$$|w(x') - w(x'')| \leqslant \int_\Sigma |\varphi(y)|\,|G(x',y) - G(x'',y)|\,d\sigma_y \leqslant$$
$$K\,|x' - x''| \int_\Sigma \frac{|\varphi(y)|}{[\varrho_y(x',x'')]^n}\,d\sigma_y \leqslant \frac{K}{c^n}\,|x' - x''| \int_\Sigma |\varphi(y)|\,d\sigma = C\,|x' - x''|\,.$$

Più delicato è il caso 3), per il quale converrà distinguere ancora due sottocasi, ponendo $r = |x' - x''|$:
3.1) $d(x',\Sigma) < 2\,r$ oppure $d(x'',\Sigma) < 2\,r$
3.2) $d(x',\Sigma) \geqslant 2\,r$, $d(x'',\Sigma) \geqslant 2\,r$
(con $d(x,\Sigma)$ indichiamo la distanza tra x e Σ). Consideriamo il caso 3.1), supponendo che sia, per fissare le idee,

$$d(x',\Sigma) < 2\,r\,; \tag{11.1}$$

indichiamo con z' e z'' due punti di Σ tali che

$$d(x',\Sigma) = |x' - z'|, \qquad\qquad d(x'',\Sigma) = |x'' - z''|.$$

Possiamo scrivere

$$|w(x') - w(x'')| \leqslant |w(x') - w(z')| + |w(z') - w(z'')| + |w(x'') - w(z'')|\,. \tag{11.2}$$

Inoltre

$$w(x') - w(z') = \int_\Sigma [\varphi(y) - \varphi(z')]\,[G(x',y) - G(z',y)]\,d\sigma_y; \tag{11.3}$$

Infatti, se

$$G(x,y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\,,$$

ricordando la (2.23), abbiamo

$$w(x') - w(z') = \int_\Sigma \varphi(y)\, G(x',y)\, d\sigma_y - \frac{1}{2}\,\varphi(z') - \int_\Sigma \varphi(y)\, G(z',y)\, d\sigma_y =$$
$$\int_\Sigma [\varphi(y) - \varphi(z')]\, [G(x',y) - G(z',y)]\, d\sigma_y + \varphi(z') \int_\Sigma G(x',y)\, d\sigma_y -$$
$$\varphi(z') \int_\Sigma G(z',y)\, d\sigma_y - \frac{1}{2}\,\varphi(z') = \int_\Sigma [\varphi(y) - \varphi(z')]\, [G(x',y) - G(z',y)]\, d\sigma_y +$$
$$\varphi(z') - \frac{1}{2}\,\varphi(z') - \frac{1}{2}\,\varphi(z') = \int_\Sigma [\varphi(y) - \varphi(z')]\, [G(x',y) - G(z',y)]\, d\sigma_y\,.$$

Se, invece,

$$G(x,y) = M^{ih}[s(x,y)]$$

in virtù delle (10.3), (10.6), abbiamo

$$w(x') - w(z') = \int_\Sigma \varphi(y)\, G(x',y)\, d\sigma_y - \int_\Sigma^* \varphi(y)\, G(z',y)\, d\sigma_y =$$
$$\int_\Sigma [\varphi(y) - \varphi(z')]\, [G(x',y) - G(z',y)]\, d\sigma_y$$

e quindi la (11.3) è vera in ogni caso.

Abbiamo dunque

$$|w(x') - w(z')| \leqslant \int_\Sigma |\varphi(y) - \varphi(z')|\ |G(x',y) - G(z',y)|\, d\sigma_y\,.$$

Decomponiamo l'integrale nel modo seguente

$$\int_\Sigma = \int_{\Sigma - \Sigma_d(z')} + \int_{\Sigma_d(z') - \Sigma_{2r}(z')} + \int_{\Sigma_{2r}(z')}\,.$$

Per il primo integrale, tenendo presente il lemma 49, si ha

$$\int_{\Sigma - \Sigma_d(z')} |\varphi(y) - \varphi(z')|\, |G(x',y) - G(z',y)|\, d\sigma_y \leqslant$$
$$C\, |x' - z'| \int_{\Sigma - \Sigma_d(z')} \frac{|\varphi(y) - \varphi(z')|}{[\varrho_y(x',z')]^n}\, d\sigma_y$$

ed essendo $\varrho_y(x',z') \geqslant \frac{\Lambda}{2}$ dato che

$$\begin{array}{l} |y - z'| \geqslant \Lambda \\ |x' - z'| < 2r < \dfrac{\Lambda}{2} \end{array} \implies |y - x'| \geqslant |y - z'| - |z' - x'| \geqslant \Lambda - \frac{\Lambda}{2} = \frac{\Lambda}{2}\,,$$

si ha

$$\int_{\Sigma-\Sigma_d(z')} |\varphi(y)-\varphi(z')|\,|G(x',y)-G(z',y)|\,d\sigma_y \leqslant K|x'-z'| \leqslant 2\,K\,|x'-x''|\,.$$

Consideriamo ora l'integrale esteso a $\Sigma_d(z')-\Sigma_{2r}(z')$;

$$\int_{\Sigma_d(z')-\Sigma_{2r}(z')} |\varphi(y)-\varphi(z')|\,|G(x',y)-G(z',y)|\,d\sigma_y \leqslant$$
$$C\,|x'-z'| \int_{\Sigma_d(z')-\Sigma_{2r}(z')} \frac{|y-z'|^\beta}{[\varrho_y(x',z')]^n}\,d\sigma_y$$

Tenendo presente che x' appartiene alla $\nu_{z'}$, ragionando come nella nota [13] si trova che $|x'-y| \geqslant \frac{|z'-y|}{\sqrt{2}}$, da cui

$$\int_{\Sigma_d(z')-\Sigma_{2r}(z')} |\varphi(y)-\varphi(z')|\,|G(x',y)-G(z',y)|\,d\sigma_y \leqslant$$
$$K\,|x'-x''| \int_{\Sigma_d(z')-\Sigma_{2r}(z')} \frac{d\sigma_y}{|y-z'|^{n-\beta}}.$$

Ragionando come per la (10.12) si trova

$$\int_{\Sigma_d(z')-\Sigma_{2r}(z')} |\varphi(y)-\varphi(z')|\,|G(x',y)-G(z',y)|\,d\sigma_y \leqslant \widetilde{K}\,|x'-x''|^\beta.$$

Infine, per quanto attiene l'integrale esteso a $\Sigma_{2r}(z')$, abbiamo

$$\int_{\Sigma_{2r}(z')} |\varphi(y)-\varphi(z')|\,|G(x',y)-G(z',y)|\,d\sigma_y \leqslant$$
$$\int_{\Sigma_{2r}(z')} |\varphi(y)-\varphi(z')|\,|G(x',y)|\,d\sigma_y + \int_{\Sigma_{2r}(z')} |\varphi(y)-\varphi(z')|\,|G(z',y)|\,d\sigma_y \leqslant$$
$$C\int_{\Sigma_{2r}(z')} \frac{|y-z'|^\beta}{|y-x'|^{n-1}}\,d\sigma_y + C\int_{\Sigma_{2r}(z')} \frac{|y-z'|^\beta}{|y-z'|^{n-1}}\,d\sigma_y\,.$$

Per l'ultimo integrale si ha

$$\int_{\Sigma_{2r}(z')} \frac{d\sigma_y}{|y-z'|^{n-1-\beta}} \leqslant K\,r^\beta$$

(cfr. la (10.13)), mentre per l'altro, ricordando ancora la nota [13], si ha

$$\int_{\Sigma_{2r}(z')} \frac{|y-z'|^\beta}{|y-x'|^{n-1}}\, d\sigma_y \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}} \int_{\Sigma_{2r}(z')} \frac{d\sigma_y}{|y-z'|^{n-1-\beta}} \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}} K\, r^\beta .$$

Abbiamo così dimostrato che

$$|w(x') - w(z')| \leqslant C\, |x' - x''|^\beta .$$

Essendo poi, ricordando la (11.1),

$$|x'' - z''| = d(x'', \Sigma) \leqslant |x'' - z'| \leqslant |x'' - x'| + |x' - z'| < 3\, r \tag{11.4}$$

con ragionamenti analoghi a quelli appena fatti si trova

$$|w(x'') - w(z'')| \leqslant C\, |x' - x''|^\beta$$

(la costante C non essendo necessariamente la stessa di prima).

Per quanto riguarda il termine $|w(z') - w(z'')|$, osservando che si ha

$$w(z') - w(z'') = \frac{1}{2}\, [\varphi(z') - \varphi(z'')] + \int_\Sigma \varphi(y) \left[\frac{\partial}{\partial \nu_y} s(z', y) - \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(z'', y) \right] d\sigma_y$$

per il doppio strato e

$$w(z') - w(z'') = \int_\Sigma^* \varphi(y)\, M^{ih}[s(z', y)]\, d\sigma_y - \int_\Sigma^* \varphi(y)\, M^{ih}[s(z'', y)]\, d\sigma_y$$

per il doppio strato tangenziale, i teoremi 42 e 48 portano a

$$|w(z') - w(z'')| \leqslant C\, |z' - z''|^\beta \leqslant 6^\beta C\, |x' - x''|^\beta$$

dato che (cfr. la (11.4))

$$|z' - z''| \leqslant |z' - x'| + |x' - x''| + |x'' - z''| < 2\, r + r + 3\, r = 6\, r .$$

Abbiamo così provato (si ricordi la (11.2)) che

$$|w(x') - w(x'')| \leqslant C\, |x' - x''|^\beta$$

nel caso 3.1).

Consideriamo ora l'ultimo caso, ossia il 3.2). Questa volta converrà scrivere la differenza $w(x') - w(x'')$ come

$$w(x') - w(x'') = \int_\Sigma [\varphi(y) - \varphi(z')]\, [G(x', y) - G(x'', y)]\, d\sigma_y \,,$$

cosa possibile dato che

$$\int_\Sigma G(x', y)\, d\sigma_y - \int_\Sigma G(x'', y)\, d\sigma_y = 0 \qquad \forall\, x', x'' \in \Omega$$

sia nel caso del potenziale di doppio strato (entrambi gli integrali sono uguali a 1), sia nel caso del doppio strato tangenziale (entrambi gli integrali sono nulli). Scriviamo dunque

$$|w(x') - w(x'')| \leqslant \int_\Sigma |\varphi(y) - \varphi(z')|\, |G(x', y) - G(x'', y)|\, d\sigma_y$$

e decomponiamo l'integrale nel modo seguente (ricordiamo che c denota la distanza tra Ω_0 e $\partial\Omega$)

$$\int_\Sigma = \int_{\Sigma - \Sigma_{2c}(z')} + \int_{\Sigma_{2c}(z') - \Sigma_{2r}(z')} + \int_{\Sigma_{2r}(z')} .$$

Possiamo supporre che risulti $|x' - z'| \leqslant c$ oppure $|x'' - z''| \leqslant c$; infatti, se così non fosse, avremmo $|x' - z'| > c$, $|x'' - z''| > c$ e questo è possibile solo se $x', x'' \in \Omega_0$ e ricadremmo nel caso 2). Per fissare le idee supponiamo che sia $|x' - z'| \leqslant c$. Inoltre (cfr. nota [14]) possiamo supporre che risulti $\Lambda < 2\,c$.

In $\Sigma - \Sigma_{2c}(z')$ si ha

$$\begin{aligned} |y - x'| &\geqslant |y - z'| - |z' - x'| \geqslant 2\,c - c = c \,, \\ |y - x''| &\geqslant |y - x'| - |x' - x''| \geqslant c - \frac{\Lambda}{4} > \frac{c}{2} \end{aligned}$$

e questo implica

$$\varrho_y(x', x'') \geqslant \frac{c}{2} \qquad\qquad y \in \Sigma - \Sigma_{2c}(z') .$$

Ne segue

$$\int_{\Sigma - \Sigma_{2c}(z')} |\varphi(y) - \varphi(z')|\, |G(x', y) - G(x'', y)|\, d\sigma_y \leqslant$$
$$C\, |x' - x''| \int_{\Sigma - \Sigma_{2c}(z')} \frac{d\sigma_y}{[\varrho_y(x', x'')]^n} \leqslant \widetilde{C} |x' - x''| \,.$$

Infine in $\Sigma_{2c}(z')$ si ha

$$|y - z'| \leqslant |y - x'| + |x' - z'| \leqslant 2\,|x' - y|$$

(dato che $|x' - z'| = d(x', \Sigma) \leqslant |x' - y|$) e inoltre

$$|y - x'| \leqslant |y - x''| + |x'' - x'| \leqslant \frac{3}{2}\,|y - x''|$$

giacché

$$|x'' - x'| = r \leqslant \frac{1}{2}\,|x'' - z''| = \frac{1}{2}\,d(x'', \Sigma) \leqslant \frac{1}{2}\,|x'' - y|\,.$$

Essendo quindi

$$|x' - y| \geqslant \frac{1}{2}\,|y - z'|\,, \qquad |x'' - y| \geqslant \frac{2}{3}\,|x' - y| \geqslant \frac{1}{3}\,|y - z'| \tag{11.5}$$

abbiamo $\varrho_y(x', x'') \geqslant \frac{|y-z'|}{3}$ e possiamo scrivere

$$\begin{gathered}
\int_{\Sigma_{2c}(z') - \Sigma_{2r}(z')} |\varphi(y) - \varphi(z')|\, |G(x', y) - G(x'', y)|\, d\sigma_y \leqslant \\
K\,|x' - x''| \int_{\Sigma_{2c}(z') - \Sigma_{2r}(z')} \frac{|y - z'|^{\beta}}{[\varrho_y(x', x'')]^n}\, d\sigma_y \leqslant \\
\widetilde{K}\,|x' - x''| \int_{\Sigma_{2c}(z') - \Sigma_{2r}(z')} \frac{d\sigma_y}{|y - z'|^{n-\beta}} \leqslant C\,|x' - x''|^{\beta}
\end{gathered}$$

(per l'ultimo passaggio si ragioni ancora una volta come in (10.12)).

Infine, tenendo presenti le (11.5),

$$\begin{gathered}
\int_{\Sigma_{2r}(z')} |\varphi(y) - \varphi(z')|\, |G(x', y) - G(x'', y)|\, d\sigma_y \leqslant \\
C \int_{\Sigma_{2r}(z')} \frac{|y - z'|^{\beta}}{|y - x'|^n}\, d\sigma_y + C \int_{\Sigma_{2r}(z')} \frac{|y - z'|^{\beta}}{|y - x''|^n}\, d\sigma_y \leqslant \\
\widetilde{C} \int_{\Sigma_{2r}(z')} \frac{d\sigma_y}{|y - z'|^{n-\beta}} \leqslant K\,|x' - x''|^{\beta}
\end{gathered}$$

(cfr. la (10.13)). Il teorema è così completamente dimostrato.

51 *Sia $\Sigma \in C^{1,h}$ e supponiamo $\varphi \in C^{\beta}(\Sigma)$ con $0 < \beta < h \leqslant 1$. Il potenziale di semplice strato*

$$u(x) = \int_{\Sigma} \varphi(y)\, s(x,y)\, d\sigma_y \tag{11.6}$$

risulta di classe $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$.

Sappiamo già che u risulta continuo in $\overline{\Omega}$ (cfr. teorema 14). Per quanto riguarda le derivate prime, è ovvio che nei punti $x \notin \Sigma$ si può derivare sotto il segno di integrale:

$$\frac{\partial u}{\partial x_h}(x) = \int_{\Sigma} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial x_h} s(x,y)\, d\sigma_y \ .$$

Allo scopo di studiare questi potenziali, osserviamo che possiamo scrivere

$$\frac{\partial u}{\partial x_h}(x) = -\int_{\Sigma} \varphi(y)\, \frac{\partial}{\partial y_h} s(x,y)\, d\sigma_y$$

e, inoltre,

$$\frac{\partial}{\partial y_h} = \nu_h(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} + \sum_{j=1}^{n} \nu_j(y) \left(\nu_j(y)\, \frac{\partial}{\partial y_h} - \nu_h(y)\, \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial y_h} = \nu_h(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} + \sum_{j=1}^{n} \nu_j(y)\, M_y^{jh} \ .$$

Questo permette di scrivere una derivata prima di un potenziale di semplice strato in termini di potenziali di doppio strato. Precisamente

$$\frac{\partial u}{\partial x_h}(x) = -\int_{\Sigma} \varphi(y)\, \nu_h(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y - \sum_{j=1}^{n} \int_{\Sigma} \varphi(y)\, \nu_j(y)\, M_y^{jh}[s(x,y)]\, d\sigma_y \, .$$

Essendo, per ipotesi, $\varphi\, \nu_j \in C^{\beta}(\Sigma)$ (si noti che $\nu_j \in C^{h}(\Sigma)$ e che $\beta < h$) il teorema 50 fornisce immediatamente il risultato richiesto.

Osservazione. Anche per questo teorema possiamo chiederci cosa succede se $\beta = h$. Il teorema che abbiamo appena dimostrato permette soltanto di dire che il potenziale di semplice strato u appartiene a $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ per ogni $0 < \lambda < h$. Tuttavia, utilizzando un difficile teorema dimostrato da Carlo

Miranda[15] è possibile ottenere il seguente risultato: *Sia* $\Sigma \in C^{1,h}$ *e supponiamo* $\varphi \in C^h(\Sigma)$ *con* $0 < h < 1$. *Il potenziale di semplice strato (11.6) risulta di classe* $C^{1,h}(\overline{\Omega})$.

Siamo finalmente in grado di dimostrare quanto annunciato a p.60, ossia di dimostrare l'hölderianità fin sulla frontiera delle derivate seconde di un potenziale di campo.

52 *Sia* $\Sigma \in C^{1,h}$ *e supponiamo* $\varphi \in C^\beta(\overline{\Omega})$ *con* $0 < \beta < h \leqslant 1$. *Il potenziale di dominio*

$$u(x) = \int_\Omega \varphi(y)\, s(x,y)\, dy$$

risulta di classe $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *per ogni* $0 < \alpha < \beta$.

Ovviamente ci basta dimostrare che le derivate seconde verificano una condizione di Hölder di esponente α. Ricordando la (7.3) possiamo scrivere

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}(x) = \int_\Omega^* \varphi(y)\, \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y)\, dy + \frac{\delta_{hk}}{n}\, \varphi(x) = \\ \int_\Omega [\varphi(y) - \varphi(x)]\, \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y)\, dy + \\ \varphi(x) \left[\int_\Omega^* \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y)\, dy + \frac{\delta_{hk}}{n} \right] = \\ \int_\Omega [\varphi(y) - \varphi(x)]\, \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y)\, dy + \varphi(x)\, \frac{\partial}{\partial x_h} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} s(x,y)\, dy\end{gathered} \tag{11.7}$$

(per l'ultimo passaggio si applichi la (7.3) con $\varphi \equiv 1$).

Per ottenere l'hölderianità del primo integrale nell'ultimo membro di (11.7) si può procedere nel seguente modo: poniamo

$$G(x,y) = [\varphi(y) - \varphi(x)]\, \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y)\,;$$

in base al teorema 33 il nucleo

$$\frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y)$$

[15] Cfr. C. Miranda, *Sulle proprietà di regolarità di certe trasformazioni integrali*, Memorie dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Serie VIII, Vol. VII, 1966, 303–335.

appartiene a $G_1(n,\alpha)$ per ogni α. Essendo questo vero, in particolare, per $0<\alpha<\beta$, il lemma 34 permette di affermare che $G(x,y)\in G_1(n-\beta,\alpha)$. Ma allora, in virtù del teorema 35 (N.B. abbiamo $n-\beta+\alpha<n$), il potenziale

$$\int_\Omega G(x,y)\,dy \equiv \int_\Omega [\varphi(y)-\varphi(x)]\,\frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y)\,dy \tag{11.8}$$

appartiene a $C^\alpha(\overline{\Omega})$.

Consideriamo ora l'ultimo integrale in (11.7). Si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} s(x,y)\,dy = -\int_\Sigma \nu_k(y)\,s(x,y)\,d\sigma_y\,. \tag{11.9}$$

Infatti, considerata una $B_\varepsilon(x)\subset\subset\Omega$, possiamo scrivere

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} s(x,y)\,dy = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_k} s(x,y)\,dy =$$
$$-\int_{\Omega-B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial y_k} s(x,y)\,dy - \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial y_k} s(x,y)\,dy\,.$$

D'altra parte, essendo

$$\int_{B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial y_k} s(x,y)\,dy = \frac{1}{\omega_n}\int_{B_\varepsilon(x)} \frac{y_k-x_k}{|y-x|^n}\,dy =$$
$$\frac{1}{\omega_n}\int_0^\varepsilon \frac{t^{n-1}}{t^n}\,dt \int_{|\eta|=1} \eta_k\,d\sigma_\eta =^{16} 0$$

si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} s(x,y)\,dy = -\int_{\Omega-B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial y_k} s(x,y)\,dy =$$
$$-\int_\Sigma s(x,y)\,\nu_k(y)\,d\sigma_y + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} s(x,y)\,\nu_k(y)\,d\sigma_y$$

(su $\partial B_\varepsilon(x)$ abbiamo preso la normale esterna a $B_\varepsilon(x)$).

[16] Si noti che, indicata con "1" la funzione identicamente uguale ad 1, risulta

$$\int_{|\eta|=1} \eta_k\,d\sigma_\eta = \int_{B_1(0)} \frac{\partial 1}{\partial x_k}\,dx = 0.$$

Ma, ancora per la nota [16], l'ultimo integrale è nullo:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} s(x,y)\,\nu_k(y)\,d\sigma_y = -\frac{1}{(n-2)\omega_n\varepsilon^{n-2}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} y_k\,d\sigma_y = 0$$

e così la (11.9) è dimostrata. L'ultimo termine in (11.7) può quindi scriversi come

$$-\varphi(x)\,\frac{\partial}{\partial x_h}\int_\Sigma \nu_k(y)\,s(x,y)\,d\sigma_y\,; \qquad (11.10)$$

essendo $\nu_k \in C^h(\Sigma)$ il teorema 51 implica che il potenziale di semplice strato

$$\int_\Sigma \nu_k(y)\,s(x,y)\,d\sigma_y$$

appartiene a $C^{1,h'}(\overline{\Omega})$ per ogni $0 < h' < h$. Il termine (11.10) risulta quindi di classe $C^\beta(\overline{\Omega})$ e il teorema è dimostrato.

Osservazione. Occorre precisare che, con una dimostrazione un pò più raffinata (cfr. lavoro citato nella nota [15]) è possibile dimostrare che il termine (11.8) risulta di classe $C^\beta(\overline{\Omega})$ (si noti che nella dimostrazione da noi seguita per dimostrare l'hölderianità di (11.8) non abbiamo mai usato la regolarità della frontiera del dominio, fatto, invece, di cui bisognerebbe tenerne conto).

Indice