Note su alcuni argomenti di teoria delle distribuzioni

1 Distribuzioni a supporto compatto

Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ una distribuzione definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Non essendo T una funzione di punto, non ha senso parlare di valore di una distribuzione in un punto. Ha senso, tuttavia, dire che una distribuzione è nulla in un aperto $A \subset \Omega$. Precisamente, diremo che T è nulla in A (e scriveremo $T|_A = 0$) se $\langle T, \varphi \rangle = 0$, per ogni $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(A)$. Per esempio, se $T = \delta$, allora T è nulla su un qualsiasi aperto A che non contenga l'origine.

Data la distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ consideriamo l'insieme

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\ I_x :\ T|_{I_x} = 0\}$$

dove I_x indica un aperto contenente il punto x. L'insieme W è chiaramente un aperto (eventualmente vuoto) e chiameremo supporto di T il suo complementare:

$$\operatorname{spt} T = \mathbb{R}^n \setminus W.$$

Per esempio, si ha

$$\operatorname{spt} \delta = \{0\}, \quad \operatorname{spt} T_f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}, \quad \operatorname{spt} \partial_i \chi_D = \partial D$$

(negli ultimi due esempi f è una funzione continua e D è un dominio regolare di $\mathbb{R}^n$).

Si noti che - in generale - se la funzione φ si annulla sul supporto di T, non è detto che risulti $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Si prenda, per esempio, $T = \delta'$ e φ una funzione $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$.

Per essere certi che $\langle T, \varphi \rangle = 0$, quindi, non è sufficiente supporre $\varphi = 0$ sul supporto di T, ma occorre richiedere qualcosa in più. Sussiste il seguente risultato:

1 *Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Se*

$$\operatorname{spt} T \cap \operatorname{spt} \varphi = \emptyset, \tag{1}$$

allora $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Dim. Per definizione di $\operatorname{spt} T$ ed essendo il $\operatorname{spt}\varphi$ contenuto nel suo complementare W, per ogni $x \in \operatorname{spt}\varphi$ esiste un intorno I_x tale che $T|_{I_x} = 0$. Possiamo quindi scrivere

$$\operatorname{spt}\varphi \subset \bigcup_{x\in\operatorname{spt}\varphi} I_x\,.$$

Essendo il $\operatorname{spt}\varphi$ compatto, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito, ossia esistono $x_1,\dots,x_m \in \operatorname{spt}\varphi$ tali che

$$\operatorname{spt}\varphi \subset \bigcup_{j=1}^{m} I_{x_j}\,.$$

Sia ϑ_j una partizione dell'unità del $\operatorname{spt}\varphi$ subordinata a questo ricoprimento finito. Risulta

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \vartheta_j(x)\varphi(x)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti, se $x \in \operatorname{spt}\varphi$, questa identità è soddisfatta perché $\sum_{j=1}^{m}\vartheta_j = 1$ su questo insieme; se, invece, $x \notin \operatorname{spt}\varphi$, entrambi i membri dell'equazione sono nulli, essendo $\varphi(x) = 0$. Ponendo $\varphi_j = \vartheta_j\varphi$, abbiamo dunque

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Da questo segue

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{j=1}^{m}\langle T,\varphi_j\rangle = 0$$

(si noti che $\operatorname{spt}\varphi_j \subset I_{x_j}$ e $T|_{I_{x_j}} = 0$), ossia la tesi. $\square$

Di particolare interesse sono le distribuzioni a supporto compatto. Dimostriamo che le distribuzioni a supporto compatto sono necessariamente di ordine finito.

2 *Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Supponiamo che $\operatorname{spt} T$ sia compatto. Allora, fissato un intorno compatto $\widetilde{K}$ di $\operatorname{spt} T$, esiste una costante $C > 0$ ed un intero $N \in \mathbb{N}$ tali che*

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant N} \sup_{\widetilde{K}} |D^\alpha\varphi| \tag{2}$$

per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Dim. Fissato un intorno compatto $\widetilde{K}$ di $\operatorname{spt} T$, sia $\varrho \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che il suo supporto sia contenuto all'interno di $\widetilde{K}$ e risulti $\varrho = 1$ in un intorno del $\operatorname{spt} T$.

Osserviamo che

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varrho\varphi\rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{3}$$

Infatti, la (3) equivale ad affermare che

$$\langle T, \varphi - \varrho\varphi\rangle = 0, \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Ma questa è vera, in quanto la funzione test $\varphi - \varrho\varphi$ verifica l'ipotesi del lemma 1, poiché è nulla in un intorno del $\operatorname{spt} T$.

Essendo T una distribuzione, esistono - relativamente al compatto $\widetilde{K}$ - una costante C e un intero N tali che

$$|\langle T, \psi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant N} \sup_{\widetilde{K}} |D^\alpha \psi|\,, \qquad \forall\, \psi \in \mathring{C}^\infty(\widetilde{K}).$$

Abbiamo dunque

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \varrho\varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant N} \sup_{\widetilde{K}} |D^\alpha(\varrho\varphi)|\,, \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Dalla formula di Leibniz per le derivate di un prodotto si trae che, fissato un multi-indice α di lunghezza minore di N,

$$\sup_{\widetilde{K}} |D^\alpha(\varrho\varphi)| \leqslant K \sum_{|\beta|\leqslant N} \sup_{\widetilde{K}} |D^\beta \varphi|\,,$$

dove la costante K dipende solo da α e ϱ. Dalle disuguaglianze ottenute segue la (2). $\square$

Il risultato appena dimostrato ha come ovvia conseguenza che l'ordine di T è finito. Infatti, dalla (2) segue subito che, per ogni compatto $H \subset \Omega$ risulta

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant N} \sup_{H} |D^\alpha \varphi|$$

per ogni $\varphi \in \mathring{C}^\infty(H)$ [(1)].

[(1)] Si noti che, se $\varphi \in \mathring{C}^\infty(H)$, risulta $|D^\alpha\varphi(x)| \leqslant \sup_H |D^\alpha\varphi|$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Da questo segue che $\sup_{\widetilde{K}} |D^\alpha\varphi| \leqslant \sup_H |D^\alpha\varphi|$.

E' interessante notare che - in generale - nella disuguaglianza (2) non si può prendere il $\operatorname{spt} T$ invece di un suo intorno compatto $\widetilde{K}$.

Come esempio consideriamo la distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definita da

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) \right]. \tag{4}$$

Dimostriamo prima di tutto che la serie converge qualunque sia la φ di $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ e che la (4) definisce effettivamente una distribuzione. Infatti, applicando il teorema di Lagrange, troviamo

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left| \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sup |\varphi'| = \frac{\pi^2}{6} \sup |\varphi'| .$$

Questo dimostra che la serie converge per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e che T è una distribuzione di ordine (al più) 1. Evidentemente si ha

$$\operatorname{spt} T = \{0\} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\},$$

che risulta essere un compatto (è evidentemente un insieme chiuso e limitato).

Incidentalmente, osserviamo che T non può essere di ordine 0. Supponiamo per assurdo che lo sia e consideriamo il compatto $[0, 2]$: dovrebbe esistere una costante $C > 0$ tale che

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sup_{[0,2]} |\varphi| \tag{5}$$

per ogni $\varphi \in \overset{\circ}{C}^{\infty}([0, 2])$.

Consideriamo una successione di funzioni $\varphi_m \in \overset{\circ}{C}^{\infty}([0, 2])$ tali che $0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1$ e inoltre

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leqslant \frac{1}{m+1} \\ 1 & \text{per } \frac{1}{m} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

La (5) implica

$$|\langle T, \varphi_m \rangle| \leqslant C , \qquad m = 1, 2, \dots .$$

D'altra parte:

$$\langle T, \varphi_m \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\varphi_m\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi_m(0) \right] = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} .$$

Dovrebbe allora essere

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \leqslant C\,, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

e questo è assurdo. Non è quindi vero che esiste una costante C tale che la (5) vale, ossia non è vero che T è una distribuzione di ordine 0.

Supponiamo ora che, per questa distribuzione T, sussista la (2) con $K = \operatorname{spt} T$ al posto di $\widetilde{K}$, ossia

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C(\sup_K |\varphi| + \sup_K |\varphi'|), \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}). \tag{7}$$

Consideriamo la successione φ_m introdotta poc'anzi. Essendo

$$\varphi_m' \left(\frac{1}{n}\right) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

la (7) porta di nuovo alla (6).

Notiamo che per particolari distribuzioni, la (2) potrebbe sussistere con $K = \operatorname{spt} T$ al posto di $\widetilde{K}$. Per esempio, se T fosse una derivata della delta di Dirac, diciamo $T = \delta^{(m)}$, si ha ovviamente $\operatorname{spt} T = \{0\}$ e:

$$|\langle \delta^{(m)}, \varphi\rangle| = |\varphi^{(m)}(0)| \leqslant \sum_{j=0}^{m} \sup_K |\varphi^{(j)}|\,.$$

L'esempio (4) mostra che questo fatto è, però, in generale falso.

2 Gli spazi $\mathscr{E}(\Omega)$ ed $\mathscr{E}'(\Omega)$

Denotiamo con $\mathscr{E}(\Omega)$ lo spazio $C^{\infty}(\Omega)$ nel quale abbiamo introdotto il seguente concetto di convergenza: una successione di funzioni φ_n converge a φ in $\mathscr{E}(\Omega)$ se, per ogni compatto $K \subset \Omega$ e per ogni multi-indice α, la successione $D^{\alpha}\varphi_n$ converge uniformemente su K alla funzione $D^{\alpha}\varphi$. Seguendo Hadamard, potremmo dire che φ_n converge a φ in $\mathscr{E}(\Omega)$ se, per ogni multi-indice α, $D^{\alpha}\varphi_n$ *converge uniformemente all'interno di* K alla funzione $D^{\alpha}\varphi$.

Denotiamo con $\mathscr{E}'(\Omega)$ lo spazio duale di $\mathscr{E}(\Omega)$, ossia lo spazio dei funzionali lineari da $\mathscr{E}(\Omega)$ in $\mathbb{R}$ continui. Questo significa che l'operatore lineare $T : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathbb{R}$ appartiene a $\mathscr{E}'(\Omega)$ se, e solo se,

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{E}(\Omega)} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \varphi_n\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle. \tag{8}$$

Abbiamo la seguente caratterizzazione

3 *Sia T un operatore lineare da $\mathscr{E}(\Omega)$ in $\mathbb{R}$. Si ha che T appartiene a $\mathscr{E}'(\Omega)$ se, e solo se, esiste un compatto $K \subset \Omega$, un numero reale $C > 0$ ed un intero $N \in \mathbb{N}$ tali che*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant N} \sup_K |D^\alpha \varphi| \tag{9}$$

per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

Dim. E' facile verificare che, se sussiste la (9), l'operatore T è continuo, ossia soddisfa la (8).

Viceversa, supponiamo che $T \in \mathscr{E}'(\Omega)$ e che non sussista la (9). Fissata una successione di compatti $K_n \subset \Omega$, con $K_n \subset K_{n+1}$ e

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \, ,$$

esisterà una successione $\{\varphi_n\} \subset C^\infty(\Omega)$ tale che

$$|\langle T, \varphi_n\rangle| > n \sum_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{K_n} |D^\alpha \varphi_n| \, . \tag{10}$$

Poniamo

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{n \displaystyle\sum_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{K_n} |D^\alpha \varphi_n|}$$

(si noti che il denominatore è certamente positivo, in quanto se fosse nullo, avremmo $\varphi_n = 0$ e quindi $\langle T, \varphi_n\rangle = 0$. Ma questo contraddice la disuguaglianza stretta in (10)).

Ovviamente si ha

$$|D^\alpha \psi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}, \qquad x \in K_n, \ |\alpha| \leqslant n. \tag{11}$$

Sia ora K un qualsiasi compatto contenuto in Ω e α un qualsiasi multiindice. Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $K \subset K_{n_0}$ e $|\alpha| \leqslant n_0$. Per ogni $n \geqslant n_0$, in virtù della (11), avremo

$$|D^\alpha \psi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}, \qquad x \in K \, .$$

Abbiamo così dimostrato che $\psi_n \xrightarrow{\mathscr{E}(\Omega)} 0$ ed essendo $T \in \mathscr{E}'(\Omega)$,

$$\langle T, \psi_n\rangle \to 0.$$

Ma questo è assurdo, perché la (10) implica

$$|\langle T, \psi_n \rangle| > 1,$$

e la tesi è dimostrata. $\square$

La delta di Dirac δ o una qualsiasi sua derivata, sono esempi di elementi di $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$.

Sia $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$. Visto che le funzioni test sono particolari funzioni C^∞, possiamo considerare l'operatore T dato dalla restrizione di S allo spazio $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$, ossia

$$T = S|_{\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)}.$$

Osserviamo che se φ_n è una successione di funzioni $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ risulta

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathscr{E}(\Omega)} \varphi\,,$$

e quindi $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ implica $\langle T, \varphi_n \rangle = \langle S, \varphi_n \rangle \to \langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$. Questo mostra che T è una distribuzione. Inoltre T risulta a supporto compatto. Infatti, se $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ è tale che $\operatorname{spt} \varphi \cap K = \emptyset$, essendo K il compatto che compare nella (9), abbiamo $\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle = 0$. Questo mostra che $T|_{\Omega \setminus K} = 0$ e quindi $\operatorname{spt} T \subset K$.

In altri termini, la restrizione di un elemento di $\mathscr{E}'(\Omega)$ alle funzioni test definisce una distribuzione a supporto compatto. Vale anche il viceversa, come mostrato dal seguente risultato.

4 *Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a supporto compatto. Esiste ed è unico un operatore $S \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tale che $T = S|_{\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)}$.*

Dim. Fissata una funzione $\varrho \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ tale che $\varrho = 1$ in un intorno del supporto di T, definiamo

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varrho\varphi \rangle \tag{12}$$

al variare di $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Essendo il supporto di T contenuto in quello di ϱ, e tenendo presente il teorema 2, abbiamo le seguenti disuguaglianze (dove $\widetilde{K} = \operatorname{spt} \varrho$)

$$|\langle S, \varphi \rangle| = |\langle T, \varrho\varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant N} \sup_{\widetilde{K}} |D^\alpha(\varrho\varphi)| \leqslant \widetilde{C} \sum_{|\alpha| \leqslant N} \sup_{\widetilde{K}} |D^\alpha \varphi|$$

per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ (nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la formula di Leibniz per le derivate di un prodotto e maggiorato in modo ovvio).

Questo mostra che l'operatore lineare S definito da (12) è un elemento di $\mathscr{E}'(\Omega)$ (si ricordi il teorema 3).

Inoltre, se $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$, abbiamo

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varrho\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

(per l'ultima uguaglianza, si ricordi la (3)) e quindi S è un'estensione di T.

Dimostriamo, infine, l'unicità di tale estensione. Basterà far vedere che se $S \in \mathscr{E}'(\Omega)$ è tale che

$$\langle S, \varphi \rangle = 0, \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega),$$

allora $S = 0$. Essendo $S \in \mathscr{E}'(\Omega)$, sussiste la disuguaglianza (9) per un certo compatto $K \subset \Omega$. Presa una funzione $\sigma \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$ uguale a 1 in un intorno di K, avremo

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \sigma\varphi \rangle, \qquad \forall\, \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Basta osservare che la funzione $\varphi - \sigma\varphi$ è una funzione C^∞ identicamente nulla in un intorno di K e dunque (per la (9)) $\langle S, \varphi - \sigma\varphi \rangle = 0$. D'altra parte, essendo $\sigma\varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$, si ha $\langle S, \sigma\varphi \rangle = 0$. Abbiamo così mostrato che $\langle S, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, ossia che $S = 0$. $\square$

Il teorema appena dimostrato, insieme all'osservazione che lo precede, permettono di identificare gli elementi di $\mathscr{E}'(\Omega)$ con le distribuzioni a supporto compatto.

3 Il problema della divisione

Supponiamo assegnati una distribuzione $S \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e una funzione $f \in C^\infty(\Omega)$. Ci chiediamo se esiste una distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ soluzione dell'equazione

$$fT = S\,. \tag{13}$$

E' questo il cosiddetto problema della divisione in teoria delle distribuzioni. Se la funzione f è sempre diversa da 0, l'unica soluzione di (13) è evidentemente data dalla distribuzione

$$T = \frac{1}{f}\, S$$

(si noti che in questo caso $1/f$ è di classe C^∞ e quindi $(1/f)S$ ha senso).

Se la f non è sempre diversa da 0, il problema si complica notevolmente. Come esempio, consideriamo l'equazione uni-dimensionale

$$x^m T = S\,,$$

(m è un intero naturale fissato).

Per determinare tutte le soluzioni di questa equazione, premettiamo dei lemmi.

5 *Sia* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *tale che* $\operatorname{spt} T = \{0\}$. *Allora esistono delle costanti* c_h *tali che*

$$T = \sum_{h=0}^{n} c_h\, \delta^{(h)}\,.$$

Dim. Per il teorema 2, considerato il compatto $[-1,1]$, esistono una costante $C > 0$ ed un intero n tali che

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{h=0}^{n} \sup_{[-1,1]} |\varphi^{(h)}|$$

per ogni $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$. Ricordando la formula di Taylor, data una funzione $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$, scriviamo

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{n} \frac{\varphi^{(h)}(0)}{h!}\, x^h + R_n(x) \tag{14}$$

da cui

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{h=0}^{n} \frac{\varphi^{(h)}(0)}{h!} \langle T, x^h\rangle + \langle T, R_n\rangle\,. \tag{15}$$

Si noti che potendo identificare la distribuzione a supporto compatto T con un elemento di $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$ ha perfettamente senso considerare $\langle T, x^h\rangle$ e $\langle T, R_n\rangle$.

Facciamo vedere che $\langle T, R_n\rangle = 0$. Consideriamo a tal fine una funzione $\varrho \in \mathring{C}^\infty([-1,1])$ che sia uguale ad 1 in un intorno dell'origine e poniamo $\varrho_\varepsilon(x) = \varrho(x/\varepsilon)$.

Abbiamo [2]

$$|\langle T, R_n\rangle| = |\langle T, \varrho_\varepsilon R_n\rangle| \leqslant C \sum_{h=0}^{n} \sup_{[-1,1]} |D^h(\varrho_\varepsilon R_n)| \,.$$

D'altra parte

$$D^h(\varrho_\varepsilon \varphi) = \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} D^k(\varrho_\varepsilon) D^{h-k}(R_n). \tag{16}$$

Si verifica facilmente che [3]

$$|D^k(\varrho_\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^{-k}.$$

Per quanto riguarda R_n invece, ricordiamo l'espressione del resto in forma integrale

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\, dt\,. \tag{17}$$

Da questa segue facilmente che esiste una costante C tale che

$$|D^j(R_n(x))| \leqslant C\,|x|^{n+1-j}, \qquad j = 0, 1, \dots, n+1.$$

Dalla (16) deduciamo quindi

$$|D^h(\varrho_\varepsilon \varphi)(x)| \leqslant C \sum_{k=0}^{h} \varepsilon^{-k} |x|^{n+1-h+k}\,.$$

In particolare, per $|x| < \varepsilon$,

$$|D^h(\varrho_\varepsilon \varphi)(x)| \leqslant C\,(h+1)\,\varepsilon^{n+1-h} \leqslant C\,(h+1)\,\varepsilon$$

(prendendo $0 < \varepsilon \leqslant 1$). Poiché per $|x| > \varepsilon$ la funzione $\varrho_\varepsilon \varphi$ è identicamente nulla, questa disuguaglianza sussiste per ogni $x \in \mathbb{R}$.

---

[2] Si ricordi che scrivendo $\langle T, R_n\rangle$ intendiamo in realtà $\langle S, R_n\rangle$, dove S è l'unica estensione in $\mathscr{E}'(\Omega)$ di T. La prima uguaglianza della formula segue quindi dalle considerazioni fatte alla fine della dimostrazione del teorema 4.

[3] In questa e nella disuguaglianze seguenti la lettera C non indica necessariamente la stessa costante.

Abbiamo dunque

$$|\langle T, R_n\rangle| = |\langle T, \varrho_\varepsilon R_n\rangle| \leqslant C\,\varepsilon$$

da cui segue, facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$, $\langle T, R_n\rangle = 0$.

Ricordando la (15), scriviamo

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{h=0}^{n} \frac{\varphi^{(h)}(0)}{h!}\langle T, x^h\rangle$$

ossia

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{h=0}^{n} c_h \langle \delta^{(h)}, \varphi\rangle$$

e la tesi è dimostrata. □

Consideriamo ora l'equazione omogenea $x^m T = 0$.

6 *Sia $m \in \mathbb{N}$. La distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ soddisfa l'equazione*

$$x^m T = 0 \tag{18}$$

se e solo se esistono delle costanti c_h tali che

$$T = \sum_{h=0}^{m-1} c_h \delta^{(h)}. \tag{19}$$

Dim. Facciamo vedere, intanto, che $\operatorname{spt} T = \{0\}$. Sia $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$ tale che $0 \notin \operatorname{spt}\varphi$. Poniamo

$$\widetilde{\varphi}(x) \begin{cases} = x^{-m}\varphi(x) & \text{se } x \in \operatorname{spt}\varphi \\ = 0 & \text{se } x \notin \operatorname{spt}\varphi. \end{cases}$$

Ovviamente risulta $x^m\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ per ogni x e, inoltre, $\widetilde{\varphi} \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$. Quindi

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, x^m\widetilde{\varphi}\rangle = \langle x^m T, \widetilde{\varphi}\rangle = 0$$

dato che T soddisfa la (18). Questo mostra che $\operatorname{spt} T = \{0\}$. Per il lemma precedente, esistono un $N \in \mathbb{N}$ e delle costanti c_h tali che

$$T = \sum_{h=0}^{N} c_h \delta^{(h)}. \tag{20}$$

Per completare la dimostrazione occorre far vedere che $c_h = 0$ per ogni $h \geqslant m$. Se $N < m$ non c'è niente da dimostrare. Supponiamo, quindi, $N \geqslant m$.

Sia φ una qualsiasi funzione di $\overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R})$. Avremo

$$\langle x^m T, \varphi \rangle = 0.$$

D'altra parte,in virtù della (20), possiamo scrivere

$$0 = \langle x^m T, \varphi \rangle = \sum_{h=0}^{N} c_h \langle x^m \delta^{(h)}, \varphi \rangle = \sum_{h=0}^{N} c_h \langle \delta^{(h)}, x^m \varphi \rangle =$$

$$\sum_{h=0}^{N} (-1)^h c_h \langle \delta, D^h(x^m \varphi) \rangle = \sum_{h=0}^{N} (-1)^h c_h D^h(x^m \varphi) \Big|_{x=0}.$$

Inoltre abbiamo

$$D^h(x^m \varphi(x)) = \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} D^k(x^m)\, \varphi^{(h-k)}(x).$$

Essendo

$$D^k(x^m) \begin{cases} = m(m-1)\dots(m-k+1)\, x^{m-k} & \text{se } k < m, \\ = m! & \text{se } k = m \\ = 0 & \text{se } k > m, \end{cases}$$

e dunque

$$D^k(x^m)\Big|_{x=0} = \delta_k^m m!,$$

avremo

$$D^h(x^m \varphi(x))\Big|_{x=0} \begin{cases} = \dbinom{h}{m} m!\, \varphi^{(h-m)}(0) & \text{se } h \geqslant m \\ \\ = 0 & \text{se } h < m. \end{cases}$$

Questo implica

$$\sum_{h=m}^{N} (-1)^h \frac{h!}{(h-m)!}\, c_h\, \varphi^{(h-m)}(0) = 0,$$

ossia

$$\sum_{s=0}^{N-m} (-1)^{m+s} \frac{(m+s)!}{s!}\, c_{m+s}\, \varphi^{(s)}(0) = 0. \tag{21}$$

La (21) dovrà quindi valere per ogni $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$. Sia ψ una funzione $\mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$ che vale 1 in un intorno dell'origine. Fissiamo un $k \in \mathbb{N}$ con $0 \leqslant k \leqslant N-m$ e poniamo

$$\varphi(x) = x^k \psi(x).$$

Si ha $\varphi^{(j)}(0) = \delta_j^k\, k!$. Ponendo questa φ in (21), troviamo $c_{m+k} = 0$. Nell'espressione (20) di T, allora, tutti i coefficienti c_h con $h \geqslant m$ devono essere nulli e dunque sussiste la (19). $\square$

7 *Sia* $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$. *Risulta*

$$\varphi^{(j)}(0) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{22}$$

se, e solo se, esiste una $\psi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$ *tale che*

$$\varphi(x) = x^m \psi(x)\,. \tag{23}$$

Dim. Una funzione φ data da (23) verifica le condizioni (22), come si verifica facilmente. Viceversa, supponiamo che la φ soddisfi le (22). Dalla formula di Taylor (14), ricordando l'espressione del resto (17), troviamo

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(t)\, dt = x^m \int_0^1 \frac{(1-s)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(xs)\, ds$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo operato la sostituzione $t = xs$), ossia la (23) dove

$$\psi(x) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(xs)\, ds\,. \tag{24}$$

E' evidente da questa rappresentazione che la ψ risulta di classe C^∞. Inoltre, sussistendo la (23), la ψ risulta anche a supporto compatto. $\square$

Siamo ora in grado di discutere l'equazione

$$x^m T = S \tag{25}$$

dove $m \in \mathbb{N}$ e S è una distribuzione di $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ assegnata.

8 *Assegnata comunque la distribuzione $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ esiste una distribuzione $T_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ soluzione della* (25)*. Ogni altra soluzione della* (25) *è data dalla formula*

$$T = T_0 + \sum_{h=0}^{m-1} c_h \delta^{(h)} \tag{26}$$

essendo le c_h delle costanti reali arbitrarie.

Dim. Dire che T soddisfa la (25) significa

$$\langle x^m T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}),$$

ossia

$$\langle T, x^m \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}). \tag{27}$$

Modifichiamo la formula di Taylor (14) in modo tale che i vari termini siano a supporto compatto. Introduciamo, quindi, una funzione $\varrho \in \mathring{C}^\infty(|R)$ che sia uguale ad 1 in un intorno dell'origine, diciamo per $|x| \leqslant 1$, e, presa una qualsiasi $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$, scriviamo

$$\varphi(x) = \varrho(x) \sum_{h=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(h)}(0)}{h!}\, x^h + \widetilde{R}_m(x)\,.$$

In altri termini, poniamo

$$\widetilde{R}_m(x) = \varphi(x) - \varrho(x) \sum_{h=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(h)}(0)}{h!}\, x^h\,.$$

Essendo $\varrho(x) = 1$ in $[-1, 1]$, avremo

$$\widetilde{R}_m(x) = R_m(x) = x^m \psi(x), \qquad |x| \leqslant 1 \tag{28}$$

dove ψ è la funzione di classe C^∞ data dall'integrale (24).

Poniamo

$$\mu[\varphi](x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{se } |x| < \dfrac{1}{2}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{x^m}\left[\varphi(x) - \varrho(x) \displaystyle\sum_{h=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(h)}(0)}{h!}\, x^h\right], & \text{se } |x| \geqslant \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Tenendo presente la (28), risulta

$$\widetilde{R}_m(x) = x^m \mu[\varphi](x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

E' facile dedurre da questo che risulta anche $\mu[\varphi] \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R})$. Possiamo pensare, quindi, μ come un operatore lineare da $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R})$ in sé stesso, tale che

$$\varphi(x) = \varrho(x) \sum_{h=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(h)}(0)}{h!}\, x^h + x^m \mu[\varphi](x)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Poniamo

$$\langle T_0, \varphi\rangle = \langle S, \mu[\varphi]\rangle\,.$$

Lasciamo al lettore la verifica che l'operatore T_0 definito in questo modo definisce una distribuzione di $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Osserviamo che, essendo

$$x^m \varphi(x) = x^m \mu[x^m\varphi](x)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

(basta porre nella (29) $x^m\varphi$ al posto della φ e ricordare il lemma 7) e quindi

$$\varphi(x) = \mu[x^m\varphi](x)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

l'operatore T_0 soddisfa la (27), dato che abbiamo

$$\langle T_0, x^m\varphi\rangle = \langle S, \mu[x^m\varphi]\rangle = \langle S, \varphi\rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}).$$

In altri termini T_0 è soluzione dell'equazione (25). Che tutte le soluzioni di questa equazione siano date dalla formula (26) segue dal teorema 6. □

4 Il prodotto tensoriale di distribuzioni

Supponiamo di avere due funzioni, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ e $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Il prodotto puntuale $f(x)g(y)$ definisce in modo naturale una funzione di $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{m+n})$. Se consideriamo le distribuzioni regolari associate a queste funzioni, possiamo dire che la funzione $f(x)g(y)$ definisce la distribuzione di $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ definita da

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x)\, g(y)\, \varphi(x,y)\, dxdy$$

($\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$). Chiameremo questa il prodotto tensoriale delle due distribuzioni regolari T_f e T_g e la indicheremo con $T_f \otimes T_g$. Questo prodotto gode delle seguenti proprietà (che si dimostrano utilizzando i classici teoremi di Fubini e Tonelli):

1. $T_f \otimes T_g = T_g \otimes T_f$;

2. se $\varphi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$, la funzione $\langle T_{g,y}, \varphi(\cdot, y)\rangle$ appartiene a $\overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ e risulta [4]
$$\langle T_f \otimes T_g, \varphi\rangle = \langle T_{f,x}, \langle T_{g,y}, \varphi(x, y)\rangle\rangle \,;$$

3. se $\varphi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$, la funzione $\langle T_{f,x}, \varphi(x, \cdot)\rangle$ appartiene a $\overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e risulta
$$\langle T_f \otimes T_g, \varphi\rangle = \langle T_{g,y}, \langle T_{f,x}, \varphi(x, y)\rangle\rangle$$

4. se $\varphi(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, con $\alpha \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ e $\beta \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora
$$\langle T_f \otimes T_g, \varphi\rangle = \langle T_f, \alpha\rangle \langle T_g, \beta\rangle \,.$$

Queste osservazioni suggeriscono la definizione di prodotto tensoriale $T \otimes S$ delle due distribuzioni $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ ed $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Infatti si può dimostrare il seguente teorema (di cui omettiamo la dimostrazione) che alcuni chiamano il Teorema di Fubini per le distribuzioni.

9 *Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ ed $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Esiste ed è unica una distribuzione $T \otimes S \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{m+n})$, detta prodotto tensoriale di T ed S, tale che, se $\varphi(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, con $\alpha \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ e $\beta \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$,*
$$\langle T \otimes S, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\rangle \langle S, \beta\rangle \,.$$

Questa prodotto tensoriale gode delle seguenti proprietà:

1. *se $\varphi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$, la funzione $\langle T_y, \varphi(\cdot, y)\rangle$ appartiene a $\overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ e risulta*
$$\langle T \otimes S, \varphi\rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x, y)\rangle\rangle \,;$$

2. *se $\varphi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$, la funzione $\langle T_x, \varphi(x, \cdot)\rangle$ appartiene a $\overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e risulta*
$$\langle T \otimes S, \varphi\rangle = \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x, y)\rangle\rangle \,;$$

3. *$T \otimes S = S \otimes T$.*

[4] Scrivendo $T_{f,x}$ ($T_{g,y}$) intendiamo che la distribuzione T_f (T_g) agisce sulla variabile x (y).

5 Il prodotto di convoluzione di due distribuzioni

Date due funzioni f e g di $L^1(\mathbb{R}^n)$, si definisce prodotto di convoluzione $f * g$ la funzione

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy\,.$$

Utilizzando i teoremi di Fubini e Tonelli si verifica che l'integrale che definisce $f * g$ esiste finito quasi ovunque e definisce una funzione di $L^1(\mathbb{R}^n)$ (farlo per esercizio !).

Si dimostra facilmente che questo prodotto è commutativo (ossia $f * g = g * f$), associativo (ossia $(f * g) * h = f * (g * h)$) e gode della proprietà distributiva (ossia $f * (g + h) = f * g + f * h$). Il prodotto di convoluzione rende $L^1(\mathbb{R}^n)$ un'algebra commutativa ma priva di unità (ossia non esiste alcuna funzione $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $f * g = g * f = f$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Osserviamo anche che, se f e g sono derivabili (anche solo in senso debole), si ha $\partial_i(f * g) = (\partial_i f) * g = f * (\partial_i g)$.

Se ci chiediamo che espressione abbia la distribuzione regolare associata alla funzione $f * g$, osserviamo che si ha

$$\langle T_{f*g}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy =$$
$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \varphi(x)\, dxdy.$$

Ponendo nell'ultimo integrale $\xi = x - y$, $\eta = y$, troviamo

$$\langle T_{f*g}, \varphi\rangle = \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(\xi)\, g(\eta)\, \varphi(\xi+\eta)\, d\xi d\eta\,.$$

Abbiamo quindi che T_{f*g} può esprimersi mediante un prodotto tensoriale:

$$\langle T_{f*g}, \varphi\rangle = \langle T_{f,x} \otimes T_{g,y}, \varphi(x+y)\rangle\,.$$

Questa osservazione suggerisce come definire il prodotto di convoluzione di due distribuzioni T ed S appartenenti a $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. A questo punto viene, infatti, naturale porre

$$\langle T * S, \varphi\rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x+y)\rangle\,, \tag{30}$$

essendo φ una qualsiasi funzione di $\mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Purtroppo, in generale, (30) non ha senso. Consideriamo per semplicità il caso $n = 1$ e supponiamo che il supporto della funzione test φ sia l'intervallo $[a, b]$. Il supporto della funzione $\varphi(x + y)$ sarà tutta la striscia $a - x \leqslant y \leqslant b - x$. Non risultando questo insieme compatto, la funzione $\varphi(x + y)$ **non** appartiene a $\mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ e non ha dunque senso applicargli la distribuzione $T \otimes S$.

Questo mostra che - in generale - non si può definire il prodotto di convoluzione di due distribuzioni. Tuttavia, se almeno una delle due distribuzioni è a supporto compatto, ossia appartiene a $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, allora la (30) ha senso. Infatti, supponendo per fissare le idee $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ed $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, la funzione $\langle S_y, \varphi(\cdot + y)\rangle$ risulta appartenere a $\mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e quindi ha senso considerare

$$\langle T_x, \langle S_y, \varphi(x + y)\rangle\rangle \, .$$

Definiamo quindi

$$\langle T * S, \varphi\rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x + y)\rangle\rangle \, .$$

Si noti che ha senso anche

$$\langle S_y, \langle T_x, \varphi(x + y)\rangle\rangle$$

dato che $\langle T_x, \varphi(x + \cdot)\rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $S \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Si può dimostrare che

$$\langle T_x, \langle S_y, \varphi(x + y)\rangle\rangle = \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x + y)\rangle\rangle \, .$$

Come esempio, prendiamo una qualsiasi $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $S = \delta$. Si ha

$$\langle T_x * \delta_y, \varphi\rangle = \langle T_x \otimes \delta_y, \varphi(x + y)\rangle = \langle T_x, \langle \delta_y, \varphi(x + y)\rangle\rangle = \langle T_x, \varphi(x)\rangle \, .$$

Si noti che avremmo avuto lo stesso risultato se avessimo considerato

$$\langle \delta_y, \langle T_x, \varphi(x + y)\rangle\rangle = \langle T_x, \varphi(x)\rangle.$$

Abbiamo dunque $T * \delta = \delta * T = T$. In altri termini, abbiamo un elemento neutro per il prodotto di convoluzione: la distribuzione δ. Si ricordi che, invece, nell'algebra $L^1(\mathbb{R}^n)$ non esiste alcun elemento neutro.

Per quanto abbiamo visto, il prodotto di convoluzione gode della proprietà commutativa: $T * S = S * T$.

Una proprietà interessante è che

$$\partial_i(T * S) = T * (\partial_i S) = (\partial_i T) * S\,. \tag{31}$$

Si noti che supponendo che una delle due distribuzioni sia a supporto compatto, diciamo la S, si avrà anche $\partial_i S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e quindi hanno senso tutte le convoluzioni considerate in (31).

Dimostriamo la prima delle (31). Si ha

$$\begin{gathered}\langle \partial_i(T * S), \varphi\rangle = -\langle T * S, \partial_i\varphi\rangle = -\langle T_x \otimes S_y, \partial_i\varphi(x+y)\rangle = \\ -\langle T_x, \langle S_y, \partial_{y_i}[\varphi(x+y)]\rangle\rangle = \langle T_x, \langle \partial_{y_i} S_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle = \\ \langle T_x \otimes \partial_{y_i} S_y, \varphi(x+y)\rangle = \langle T * \partial_i S, \varphi\rangle, \qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\end{gathered}$$

e la prima delle (31) è dimostrata. In maniera analoga si verifica l'altra.

E' interessante osservare che il prodotto di convoluzione così definito non gode - in generale - della proprietà associativa. Verifichiamo questa affermazione provando che, in una dimensione, risulta

$$(T_1 * \delta') * H \neq T_1 * (\delta' * H), \tag{32}$$

dove T_1 è la distribuzione regolare associata alla funzione costante uguale ad 1 ed H è quella associata alla funzione di Heaviside.

Ricordando la (31) e che δ agisce come elemento neutro, abbiamo

$$T_1 * \delta' = (T_1 * \delta)' = (T_1)' = 0$$

dato che la funzione costante è regolare e quindi la derivata di T_1 coincide con la distribuzione regolare associata alla sua derivata, che è la funzione identicamente nulla. Il primo membro di (32) coincide quindi con la distribuzione nulla. A secondo membro, invece, abbiamo

$$\delta' * H = (\delta * H)' = H' = \delta$$

da cui

$$T_1 * (\delta' * H) = T_1 * \delta = T_1\,.$$