A. Cialdea

Misura m-dimensionale di una varietà V^m di $\mathbb{R}^n$.

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi della Basilicata

1. Varietà delle spazio $\mathbb{R}^n$.

Un sottoinsieme V^m dello spazio cartesiano $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq m < n)$ si dice una *varietà regolare semplice a* m *dimensioni* (o m- *dimensionale*) dello spazio $\mathbb{R}^n$ se esiste una funzione vettoriale $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ del punto $t = (t_1, \dots, t_m)$ definita in un dominio regolare D dello spazio $\mathbb{R}^m$ soddisfacente le seguenti condizioni:

1) quando il punto t descrive tutto D, il punto $f(t)$ descrive tutto V^m e se $t^1 \neq t^2$ riesce $f(t^1) \neq f(t^2)$;

2) $f(t)$ è continua in D ed è ivi dotata di tutte le derivate prime continue;

3) la matrice jacobiana:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(t_1, \dots, t_m)}$$

ha rango massimo in tutti i punti di D:

$$\text{rango}\, \frac{\partial f}{\partial t} = m \qquad t \in D. \tag{1.1}$$

La funzione $x = f(t)$ si chiama *rappresentazione parametrica* della varietà V^m; il dominio D si dice *dominio base.*

Si può dimostrare che

I. *Se* $x = f(t),\ t \in D,\ x = \varphi(\tau),\ \tau \in B$, *sono due rappresentazioni parametriche della stessa varietà regolare semplice* V^m *esiste un omeomorfismo di classe uno* $t = \psi(\tau)$ *di* B *su* D *tale che abbia luogo l'identità:* $\varphi(\tau) = f[\psi(\tau)],\ \tau \in B.$

2. Definizione alla Minkowski della misura m-dimensionale di V^m.

Sia V^m una varietà regolare semplice m-dimensionale di ϱ^n. Vogliamo dare una definizione di misura m-dimensionale di V^m. Poiché richiediamo senz'altro l'additività di detta misura, basterà definire la misura m-dimensionale di $f(H)$, che indicheremo con $\text{mis}_m\, f(H)$, essendo H un qualsiasi dominio misurabile (secondo Peano–Jordan) contenuto in D di diametro piccolo quanto si vuole.

Sia H un dominio misurabile contenuto in D; consideriamo i seguenti vettori:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial t_1}\right)\\
\tau_2 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial t_2}\right)\\
&\ \ \vdots\\
\tau_m &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t_m}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial t_m}\right).
\end{aligned}$$

Il vettore $\tau_1(t)$ è un vettore tangente, nel punto $f(t)$, alla linea coordinata che si ottiene facendo variare t_1 e tenendo costante $(t_2, \dots, t_m)$; analogamente $t_2, \dots, t_m$ sono vettori tangenti alle linee coordinate che si ottengono rispettivamente facendo variare solo t_2, ..., facendo variare solo t_m. Le funzioni $\tau_1(t), \dots, \tau_m(t)$ risultano continue in D. Inoltre, per la (1.1), sono linearmente indipendenti in ogni punto e quindi generano un sottospazio di dimensione m che chiamiamo *spazio tangente* alla varietà nel punto $f(t)$.

Supponiamo, per ora, che sia $f(t)$ di classe 2 in D; $\tau_1(t), \dots, \tau_m(t)$ risultano così di classe 1 in D. È possibile allora determinare $n - m$ funzioni (vettoriali) di classe 1: $\nu_1(t), \dots, \nu_{n-m}(t)$ tali che, indicato con $\times$ il prodotto scalare in $I\!R^n$, si abbia

$$(2.1) \qquad \tau_l(t) \times \nu_h(t) = 0 \qquad t \in H$$

$$(2.2) \qquad \nu_h(t) \times \nu_k(t) = \delta_{hk} \qquad t \in H$$

$l = 1, \dots, m; \; h, k = 1, \dots, n - m.$

Infatti un vettore $v = (v^1, \dots, v^n)$ è ortogonale allo spazio tangente se e solo se: $\tau_l(t) \times v(t) = 0, \; l = 1, \dots, m$; ossia in componenti:

$$(2.3) \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial t_l}(t) \; v^j(t) = 0 \qquad l = 1, \dots, m.$$

Supponendo per semplicità che sia

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial t_m} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial t_m} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad t \in H$$

si ottengono subito $n-m$ funzioni (vettoriali) di classe 1: $\widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_{n-m}$ tali che, per ogni t in H, i vettori $\widetilde{v}_1(t), \dots, \widetilde{v}_{n-m}(t)$ sono linearmente indipendenti, non nulli e verificano il sistema (2.3). Ortonormalizzato questo sistema, si ottengono $\nu_1(t), \dots, \nu_{n-m}(t)$ (di classe 1 in H) che verificano (2.1), (2.2).

Consideriamo la trasformazione:

$$(2.4) \qquad x = f(t) + \sum_{j=1}^{n-m} \varrho_j \nu_j(t) \qquad t \in H, \; 0 \leq \varrho_j \leq \varrho_0$$

essendo ϱ_0 un numero positivo da determinare.

La trasformazione (2.4) è una trasformazione da $H \times [0, \varrho_0]^{n-m}$ su un certo insieme che indichiamo con W_{ϱ_0}. Intuitivamente, W_{ϱ_0} può essere pensato come uno "spessore' n-dimensionale "poggiato" sulla varietà $f(H)$, tale che la sezione di W_{ϱ_0} con lo spazio ortogonale allo spazio tangente risulta essere un intervallo quadrato $(n-m)$-dimensionale.

Consideriamo lo jacobiano della trasformazione (2.4):

$$J(t;\varrho) = \det \frac{\partial(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_m, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-m})}$$

ossia

$$J(t;\varrho) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t_1} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-m} \varrho_j \frac{\partial \nu_j^1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial t_1} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-m} \varrho_j \frac{\partial \nu_j^n}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial t_m} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-m} \varrho_j \frac{\partial \nu_j^1}{\partial t_m} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial t_m} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-m} \varrho_j \frac{\partial \nu_j^n}{\partial t_m} \\ \nu_1^1 & \cdots & \nu_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{n-m}^1 & \cdots & \nu_{n-m}^n \end{pmatrix}.$$

Vogliamo calcolare $J(t;0)$; osserviamo che si ha, per il teorema di Binet:

$$|J(t;0)|^2 = \det \left[\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial t_m} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial t_m} \\ \nu_1^1 & \cdots & \nu_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{n-m}^1 & \cdots & \nu_{n-m}^n \end{pmatrix}^2 \right]$$

dove il quadrato della matrice indica il prodotto **righe per righe** della matrice per sé stessa. D'altra parte, per le (2.1), (2.2), si ha:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial t_m} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial t_m} \\ \nu_1^1 & \cdots & \nu_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{n-m}^1 & \cdots & \nu_{n-m}^n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)^2 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$|J(t;0)|^2 = \det \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \right].$$

Per il teorema di Binet, quest'ultimo determinante è uguale alla somma dei quadrati di tutti i minori di ordine m della matrice jacobiana, ossia:

$$\det\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right] = \sum_{i_1<\cdots<i_m}\left|\det\frac{\partial(f_{i_1},\ldots,f_{i_m})}{\partial(t_1,\ldots,t_m)}\right|^2 .$$

Per la (1.1) si ha: $|J(t;0)| > 0$.

Per il teorema delle funzioni implicite, possiamo scegliere H e ϱ_0 tanto piccoli in modo che la trasformazione (2.4) risulti un omeomorfismo differenziabile di classe 1 di $H \times [0, \varrho_0]^{n-m}$ su W_{ϱ_0}. Indicato con W_ϱ il dominio definito da:

$$x = f(t) + \sum_{j=1}^{n-m}\varrho_j\nu_j(t) \qquad\qquad t\in H,\ 0\le\varrho_j\le\varrho \quad (\varrho\le\varrho_o)$$

possiamo calcolare la misura (n-dimensionale) di W_ϱ al modo seguente:

$$\text{(2.5)}\qquad \operatorname{mis} W_\varrho = \int_0^\varrho dr_1\ldots\int_0^\varrho dr_{n-m}\int_H |J(t_1,\ldots,t_m;r_1,\ldots,r_{n-m})|\,dt_1\ldots dt_m\ .$$

Porremo per definizione

$$\operatorname{mis}_m f(H) = \lim_{\varrho\to0^+}\frac{1}{\varrho^{n-m}}\operatorname{mis} W_\varrho\ .$$

D'altra parte, per la (2.5), si ha:

$$\lim_{\varrho\to0^+}\frac{1}{\varrho^{n-m}}\operatorname{mis} W_\varrho = \int_H |J(t;0)|\,dt$$

e quindi
(2.6)

$$\operatorname{mis}_m f(H) = \int_H\sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right]}dt = \int_H\sqrt{\sum_{i_1<\cdots<i_m}\left|\det\frac{\partial(f_{i_1},\ldots,f_{i_m})}{\partial(t_1,\ldots,t_m)}\right|^2}dt_1\ldots dt_m.$$

Osserviamo che nella (2.6) l'ipotesi che $f(t)$ sia di classe 2 è superflua. Poniamo quindi la (2.6) come definizione di misura m-dimensionale anche nel caso che $f(t)$ sia di classe 1.

In particolare, prendendo $H = D$, si ha:

$$\operatorname{mis}_m V^m = \int_D\sqrt{\sum_{i_1<\cdots<i_m}\left|\det\frac{\partial(f_{i_1},\ldots,f_{i_m})}{\partial(t_1,\ldots,t_m)}\right|^2}dt_1\ldots dt_m.$$

Usando il teorema I si dimostra che questa definizione non dipende dalla particolare rappresentazione parametrica di V^m.

3. Definizione assiomatica. Cenni sull'integrale esteso ad una varietà.

Supponiamo che la varietà V^m sia contenuta nello spazio definito da:

$$x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0$$

ossia che $f_h(t) = 0m\ h = m+1, \ldots, n$.

Allora $x_j = f_j(t),\ j = 1, .., m$ risulta essere un omeomorfismo di classe 1 del dominio regolare D sul dominio regolare V^m. Se H è un qualsiasi dominio limitato misurabile contenuto in D, si ha:

$$\operatorname{mis}_m f(H) = \int_H |J(t)|\, dt$$

essendo:

$$J(t) = \det \frac{\partial(x_1, \ldots, x_m)}{\partial(t_1, \ldots, t_m)}.$$

È facile riconoscere, usando il teorema di Binet, che:

$$|J(t)|^2 = \det \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Allora, posto $\sigma(H) = \operatorname{mis}_m f(H)$, considerata $\sigma(H)$ come funzione di dominio definita nella famiglia infinitesimale $\{H\}_D$ dei domini misurabili contenuti in D, si ha che $\sigma(H)$ gode delle seguenti proprietà:

1) $\sigma(H)$ è una funzione additiva di dominio su $\{H\}_D$;

2) $\sigma(H)$ è derivabile ed ha per derivata la funzione continua

$$\sqrt{\det \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \right]}.$$

Tornando al caso generale, è quindi naturale dare la seguente definizione di misura m-dimensionale di V^m: considerata la famiglia infinitesimale $\{H\}_D$ di tutti i domini misurabili contenuti in D, definiamo come misura m-dimensionale della parte di V^m che corrisponde ad H, cioè come $\operatorname{mis}_m f(H)$, il valore $\sigma(H)$ della funzione di dominio caratterizzata dai seguenti assiomi:

1) $\sigma(H)$ è una funzione additiva di dominio su $\{H\}_D$;

2) $\sigma(H)$ è derivabile ed ha per derivata la funzione continua

$$\sqrt{\det \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \right]}.$$

Per la teoria delle funzioni di insieme, 1) e 2) bastano a determinare $\sigma(H)$ e inoltre si ha:

$$\sigma(H) = \int_H \sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right]}\,dt.$$

Si ritrova così la definizione data nel paragrafo precedente.

Data una funzione $\varphi(x)$ definita per $x \in V^m$, ed ivi continua, si definisce

$$\int_{V^m} \varphi(x)\,d\sigma = \int_D \varphi[x(t)]\sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right]}\,dt. \tag{3.1}$$

Si dimostra che questa definizione non dipende dalla particolare rappresentazione parametrica di V^m.

È evidente che si ha la linearità rispetto all'integrando e inoltre:

$$\left|\int_{V^m} \varphi(x)\,d\sigma\right| \leq \max_{x\in V^m} |\varphi(x)|\ \operatorname{mis}_m V^m.$$

Osserviamo che per dare senso alla (3.1) non è necessario supporre la φ continua. In effetti, poiché la funzione

$$\sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right]}$$

è continua e quindi limitata in D, basta che $\varphi[x(t)]$ appartenga a $L^1(D)$. Ciò suggerisce di definire $L^1(V^m)$ come lo spazio delle funzioni $\varphi(x)$ definite su V^m tali che $\varphi[x(t)]$ appartenga a $L^1(D)$; si prende quindi la (3.1) come definizione di integrale esteso a V^m della funzione $\varphi(x)$ di $L^1(V^m)$, con l'ovvia intesa di considerare l'integrale a secondo membro come integrale di Lebesgue.

È infine quasi superfluo osservare che le definizioni date contengono come casi particolari le definizioni di lunghezza di una curva regolare semplice e di integrale curvilineo ($m = 1$), di area di una superficie regolare semplice e di integrale superficiale ($n = 3$, $m = 2$).