La funzione generatrice dei momenti

Data una v.a. X si chiama *funzione generatrice dei momenti* la funzione reale di variabile reale $M_X(t)$ definita come

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{tx} p(x) & \text{se } X \text{ è discreta,} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx\,, & \text{se } X \text{ è assolutamente continua.} \end{cases}$$

Ovviamente la X dovrà essere tale che e^{tX} abbia speranza matematica finita. Dicendo che la v.a. X ammette una funzione generatrice dei momenti intenderemo che la $M_X(t)$ esiste in un intorno dello 0, è di classe C^∞ ed è sempre possibile derivare per serie o sotto il segno di integrale. Si possono dare delle condizioni su $p(x)$ o $f(x)$ che assicurino che ciò accada, ma qui non lo faremo. Negli esempi concreti sarà facile verificare che $M_X(t)$ esiste e soddisfa le condizioni predette.

Il nome di funzione generatrice dei momenti deriva dal fatto che il momento di X di ordine k si può ottenere come $M^{(k)}(0)$. Per esempio, per $k = 1$ abbiamo

$$M^{'}(t) = \frac{d}{dt} E\left[e^{tX}\right] = E\left[\frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right)\right] = E\left[Xe^{tX}\right]$$

e quindi

$$M^{'}(0) = E[X]\,.$$

Analogamente, per $k = 2$,

$$M^{''}(t) = \frac{d}{dt} M^{'}(t) = \frac{d}{dt} E\left[Xe^{tX}\right] = E\left[\frac{d}{dt}\left(Xe^{tX}\right)\right] = E\left[X^2 e^{tX}\right]$$

da cui

$$M^{''}(0) = E\left[X^2\right]\,.$$

Procedendo per induzione, troviamo che, in generale,

$$M^{(k)}(t) = E\left[X^k e^{tX}\right]$$

e dunque

(1) $$M^{(k)}(0) = E[X^k] \quad (\forall\, k \geqslant 1).$$

Questo mostra che una condizione necessaria affinché esista la funzione generatrice dei momenti è che X abbia momenti finiti di qualsiasi ordine. Tuttavia questa condizione non è sufficiente, perché può accadere che X abbia momenti finiti di qualsiasi ordine, ma la sua funzione generatrice dei momenti non esista (un esempio è dato a p. 5).

La funzione generatrice dei momenti determina univocamente la legge della variabile X. Sussiste, infatti, il seguente teorema, del quale omettiamo la dimostrazione.

1. *Siano X e Y due v.a. tali che $M_X(t)$ e $M_Y(t)$ esistono e coincidono per ogni $t \in (-h, h)$ per un $h > 0$. Allora X e Y hanno la stessa legge.*

Questo enunciato è del tutto analogo a quello che abbiamo visto per la funzione generatrice della probabilità nel caso di v.a. discrete, ma la sua dimostrazione richiede tecniche analitiche che al momento non abbiamo.

I prossimi lemmi mostrano alcune proprietà della $M_X(t)$.

2. *Siano X e Y due v.a. indipendenti che ammettano funzioni generatrici dei momenti. Allora la funzione generatrice dei momenti di $X+Y$ è uguale al prodotto delle funzioni generatrici dei momenti di X e Y. In formule:*

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)\,. \tag{2}$$

Dim. Per le proprietà dell'esponenziale e per il fatto che se X e Y sono indipendenti lo sono anche e^{tX} e e^{tY}, si ha

$$M_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX}e^{tY}\right] = E\left[e^{tX}\right]E\left[e^{tY}\right] = M_X(t)M_Y(t)\,.$$

□

3. *Siano X una v.a. che ammette la funzione generatrice dei momenti. Allora la funzione generatrice dei momenti di $aX+b$ è data dalla formula*

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(a\,t)\,. \tag{3}$$

Dim. Abbiamo

$$M_{aX+b}(t) = E\left[e^{t(aX+b)}\right] = M\left[e^{bt}e^{taX}\right] = e^{bt}M_X(a\,t)\,.$$

□

4. *Sia X una v.a. che ammette la funzione generatrice dei momenti. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sussiste, in un intorno di 0, lo sviluppo*

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\,E[X^k] + o(t^n)\,. \tag{4}$$

In particolare

$$M_X(t) = 1 + t\,E[X] + \frac{t^2}{2}E[X^2] + o(t^2)\,. \tag{5}$$

Dimostrazione. Basta osservare che, grazie alla (1), lo sviluppo (4) non è altro che la formula di McLaurin di ordine n della funzione $M_X(t)$. □

Concludiamo questa parte con un teorema del quale omettiamo la dimostrazione.

5. *Sia $X_1, \ldots, X_n$ una successione di v.a. dotate di funzioni generatrici dei momenti $M_{X_n}(t)$ e sia X una v.a. dotata di funzione generatrice dei momenti $M_X(t)$. Se $M_{X_n}(t) \to M_X(t)$ per ogni $t \in (-h,h)$ per un $h > 0$, allora $X_n \to X$ in legge.*

Come esercizio, vediamo qualche esempio di funzione generatrice dei momenti e di come, tramite questa, sia possibile determinare media e varianza.

$X \sim B(n,p)$ *(binomiale di parametri* n *e* p*).*

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(pe^t\right)^k (1-p)^{n-k} = \left(pe^t + 1 - p\right)^n$$

Derivando abbiamo

$$M_X^{'}(t) = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t$$

e quindi ritroviamo

$$E[X] = M_X^{'}(0) = np\,.$$

Derivando ulteriormente

$$M_X^{''}(t) = n(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2}\left(pe^t\right)^2 + n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t$$

da cui

$$E\left[X^2\right] = M_X^{''}(0) = n(n-1)p^2 + np\,,$$

e ritroviamo quindi la varianza di X

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)\,.$$

□

$X \sim$ *Poisson di parametro* λ.

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{tn} e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^t\right)^n}{n!}$$
$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = \exp\left\{\lambda\left(e^t - 1\right)\right\}\,.$$

Derivando

$$M_X^{'}(t) = \lambda e^t \exp\left\{\lambda\left(e^t - 1\right)\right\}$$
$$M_X^{''}(t) = \lambda e^t \exp\left\{\lambda\left(e^t - 1\right)\right\} + \left(\lambda e^t\right)^2 \exp\left\{\lambda\left(e^t - 1\right)\right\}$$

da cui

$$E[X] = M_X^{'}(0) = \lambda$$
$$E\left[X^2\right] = M_X^{''}(0) = \lambda + \lambda^2$$
$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda\,.$$

□

Esponenziale di parametro λ.

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - t)x} dx$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{per}\, t < \lambda$$

Si noti che in questo caso $M(t)$ risulta definita solo per $t < \lambda$. Si ha

$$M_X'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, \quad M_X''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

da cui

$$E[X] = M_X'(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad E\left[X^2\right] = M_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2},$$
$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

□

X uniforme in $[a, b]$.
Essendo

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

troviamo

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}.$$

se $t \neq 0$, e

$$M_X(0) = E[1] = 1.$$

In definitiva

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} & \text{se } t \neq 0, \\ 1 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Il Lettore verifichi che

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad E[X^2] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

□

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (distribuzione normale).
Consideriamo dapprima il caso della normale standard $Z \sim N(0, 1)$.

$$M_Z(t) = E\left[e^{tZ}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x^2 - 2tx)}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right) dx = e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/2} dx = e^{t^2/2}$$

(nell'ultimo integrale abbiamo posto la sostituzione $u = x - t$). Abbiamo quindi che la funzione generatrice dei momenti di una variabile normale standard è

(6) $$M_Z(t) = e^{t^2/2}.$$

Consideriamo ora una normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Sappiamo che possiamo scrivere $X = \sigma Z + \mu$, dove $Z \sim N(0, 1)$. Avremo, grazie alla (6) e al Lemma 3,

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = E\left[e^{t(\mu + \sigma Z)}\right] = e^{t\mu} M_Z(t\sigma) = e^{t\mu} e^{(t\sigma)^2/2}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$M_X(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}. \tag{7}$$

Derivando, otteniamo

$$M_X'(t) = \left(\mu + t\sigma^2\right) \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\},$$
$$M_X''(t) = \sigma^2 \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} + \left(\mu + t\sigma^2\right)^2 \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$$

e dunque

$$E[X] = M_X'(0) = \mu\,,$$
$$E\left[X^2\right] = M_X''(0) = \mu^2 + \sigma^2\,,$$
$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - E([X])^2 = (\mu^2 + \sigma^2) - \mu^2 = \sigma^2.$$

□

Un Corollario interessante del lemma 2 è il seguente

6. *Siano X e Y v.a. indipendenti di legge $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ rispettivamente. Allora $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.*

Dim. In virtù della (7) abbiamo

$$M_X(t) = \exp\left\{\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right\}, \quad M_Y(t) = \exp\left\{\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right\}.$$

Dalla (2) segue

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) = \exp\left\{\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right\} \exp\left\{\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right\}$$
$$= \exp\left\{(\mu_1 + \mu_2)t + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}\right\}.$$

Ma questa è la funzione generatrice dei momenti di una v.a. $\sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$. Dato che la funzione generatrice dei momenti determina univocamente la legge (Teorema 1), si ha la tesi. □

Esempio di una v.a. X che ha momenti finiti di tutti gli ordini, ma non ammette una funzione generatrice dei momenti

Sia X una v.a. la cui funzione di ripartizione è data da

$$\mathbb{P}(X \leqslant t) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{t}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Si tratta di una v.a. assolutamente continua la cui densità è

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Qualunque sia $k \in \mathbb{N}$, X ha momento di ordine k finito, dato che

$$E[X^k] = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^k \,\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx < +\infty$$

essendo $x^{k-1/2}e^{-\sqrt{x}}$ sommabile in $(0, +\infty)$. Ma non esiste la funzione generatrice dei momenti in nessun intorno dell'origine, perché

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{tx}\,\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = +\infty$$

per ogni $t > 0$, visto che $e^{tx-\sqrt{x}}/\sqrt{x} \to +\infty$ quando $x \to +\infty$. $\square$

Il teorema centrale del limite

Dimostreremo il tteorema centrale del limite supponendo che esistano le funzioni generatrici dei momenti delle v.a. considerate. Il teorema si potrebbe dimostrare anche senza questa ipotesi, ma in questo corso non disponiamo degli strumenti analitici per farlo.

7 (Teorema centrale del limite)**.** *Sia* $\{X_n\}$ *una successione di v.a. indipendenti aventi la stessa legge, media* μ *e varianza* $\sigma^2 > 0$*. Supponiamo che risulti definita la funzione generatrice dei momenti delle v.a.* X_n*. Allora, posto*

$$S_n^* = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}}\,,$$

S_n^* *converge in legge a una v.a.* $\sim N(0,1)$.

Dim. Ponendo

$$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}\,.$$

possiamo scrivere

$$S_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

La Y_i è detta la standardizzata di X_i, in quanto

$$\begin{gathered} E[Y_i] = 0, \\ \operatorname{Var}(Y_i) = \operatorname{Var}(X_i/\sigma - \mu/\sigma) = \operatorname{Var}(X_i/\sigma) = \operatorname{Var}(X_i)/\sigma^2 = 1\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Abbiamo anche

$$E[S_n^*] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E[Y_i] = 0,$$

$$\operatorname{Var}(S_n^*) = \frac{1}{n} \operatorname{Var}(Y_1 + \cdots Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(Y_i) = 1,$$

e quindi S_n^* è la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_n$. Tenendo presente che le v.a. $Y_i/\sqrt{n}$ sono indipendenti, la funzione generatrice dei momenti di S_n^* è data da

$$\begin{aligned} M_{S_n^*}(t) &= M_{(Y_1+\cdots+Y_n)/\sqrt{n}}(t) = \prod_{i=1}^n M_{Y_i/\sqrt{n}}(t) \\ &= \prod_{i=1}^n M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \end{aligned}$$

(nel penultimo passaggio abbiamo usato la (3)). D'altra parte, tenendo presente le (8) e ricordando lo sviluppo di Taylor (5), troviamo

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

e quindi

$$M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) .$$

Osserviamo che possiamo scrivere

$$\left(M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$$

$$= \left[\left(1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)}}\right]^{n\left(\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)} .$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) = \frac{t^2}{2},$$

e l'espressione tra parentesi quadre tende al numero e, si trae

$$\lim_{n\to\infty} M_{S_n^*}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{\frac{t^2}{2}} .$$

Quest'ultima è la funzione generatrice dei momenti di una $N(0,1)$ (cfr. la (6)) e la tesi segue dai Teoremi 5 e 1. □

Per commenti e osservazioni su questo importante teorema, rimandiamo al libro di testo.