La disuguaglianza di Markov e la legge forte dei grandi numeri

La disuguaglianza di Chebyshev, che abbiamo visto in precedenza, è un caso particolare di una disuguaglianza più generale, detta di Markov.

1 (Disuguaglianza di Markov)**.** *Sia X una v.a. con momento di ordine k finito. Allora, qualunque sia $\alpha > 0$, si ha*

$$\mathbb{P}[|X| \geqslant \alpha] \leqslant \frac{1}{\alpha^k} E[|X|^k]. \tag{1}$$

Dim. Supponiamo per un momento che la X sia assolutamente continua e non negativa. Risulta

$$\mathbb{P}[X \geqslant \alpha] \leqslant \frac{1}{\alpha}\, E[X]\,. \tag{2}$$

Infatti, indicata con f la densità di X, si ha

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx \geqslant \int_\alpha^{+\infty} x\, f(x)\, dx \geqslant \alpha \int_\alpha^{+\infty} f(x)\, dx = \alpha\, \mathbb{P}[X \geqslant \alpha]\,,$$

ossia la (2). Sia ora X una v.a. (non necessariamente non negativa) assolutamente continua con momento di ordine k finito. Applicando la (2) alla $|X|^k$ con α^k al posto di α, otteniamo

$$\mathbb{P}[|X|^k \geqslant \alpha^k] \leqslant \frac{1}{\alpha^k}\, E[|X|^k]\,.$$

La (1) segue dal fatto (evidente) che

$$\mathbb{P}[|X| \geqslant \alpha] = \mathbb{P}[|X|^k \geqslant \alpha^k]\,.$$

E' chiaro come modificare la dimostrazione nel caso di v.a. discrete. □

Osservazione. Se prendiamo $k = 2$ e consideriamo la v.a. $|X - \mu|$, dove $\mu = E[X]$, alllora la disuguaglianza di Markov (1) diventa

$$\mathbb{P}[|X - \mu| \geqslant \alpha] \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\, \mathrm{Var}(X)\,,$$

ossia la disuguaglianza di Chebyshev.

Alla dimostrazione della legge forte dei grandi numeri, premettiamo un lemma che ha interesse di per sè.

2. *Siano X_n, X delle v.a.. Si ha $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ se, e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$ risulta* [1]

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| \geqslant \varepsilon \text{ i.o. }\right) = 0. \tag{3}$$

Dim. Indichiamo con $(X_n \to X)$ l'insieme $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \to X(\omega)\}$ e con $(X_n \not\to X)$ il suo complementare. Dico che

$$(X_n \to X) = \bigcap_{h=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left[|X_n - X| < \frac{1}{h}\right]. \tag{4}$$

[1] Per il significato di "i.o." si veda la dispensa sul lemma di Borel-Cantelli.

Infatti è chiaro che $\omega \in (X_n \to X)$ se e solo se

$$\forall\, h \in \mathbb{N}, \exists\, n_h \in \mathbb{N} \,:\, |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{h}\,, \forall\, n \geqslant n_h\,. \tag{5}$$

Supponiamo che $\omega \in (X_n \to X)\,:$ dato $h \in \mathbb{N}$, abbiamo che

$$\omega \in \bigcap_{n=n_h}^{\infty} \left[|X_n - X| < \frac{1}{h} \right]$$

da cui segue subito

$$\omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left[|X_n - X| < \frac{1}{h} \right]\,.$$

Dovendo questo valere per ogni $h \in \mathbb{N}$, abbiamo provato l'inclusione

$$(X_n \to X) \subset \bigcap_{h=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left[|X_n - X| < \frac{1}{h} \right]\,.$$

Per provare l'inclusione inversa, supponiamo che ω appartenga all'insieme a secondo membro nella (4). Basta riflettere un attimo per riconoscere che questo significa che in ω è soddisfatta la condizione (5), ossia che $X_n(\omega) \to X(\omega)$. La (4) è quindi dimostrata.

Passando al complementare, otteniamo

$$(X_n \not\to X) = \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left[|X_n - X| \geqslant \frac{1}{h} \right],$$

che possiamo riscrivere nel modo seguente

$$(X_n \not\to X) = \bigcup_{h=1}^{\infty} \left[|X_n - X| \geqslant \frac{1}{h} \text{ i.o.} \right]. \tag{6}$$

Per la subadditività, la (3) implica

$$\mathbb{P}\,(X_n \not\to X) = 0\,, \tag{7}$$

ossia

$$\mathbb{P}\,(X_n \to X) = 1\,.$$

e questo prova che $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$. Viceversa, se $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$, allora deve valere la (7). In virtù della (6), abbiamo per ogni $h \in \mathbb{N}$

$$\left[|X_n - X| \geqslant \frac{1}{h} \text{ i.o.} \right] \subset (X_n \not\to X)$$

da cui segue, per la monotonia,

$$\mathbb{P} \left[|X_n - X| \geqslant \frac{1}{h} \text{ i.o.} \right] = 0\,.$$

Dovendo questo valere per ogni $h \in \mathbb{N}$, sussiste la (3) per ogni $\varepsilon > 0$ [2]. $\square$

Dimostreremo ora la legge forte dei grandi numeri assumendo che le v.a. abbiano momento d'ordine 4 finito. Avvisiamo il lettore che il risultato potrebbe ottenersi anche senza questa ipotesi.

3 (Legge forte dei grandi numeri)**.** *Siano X_j delle v.a. indipendenti e identicamente distribuite. Supponiamo che le v.a. X_i abbiano momento d'ordine 4 finito, ossia che*

$$E\left[X_i^4\right] = K < \infty\,. \tag{8}$$

Allora

$$\mathbb{P}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \mu\right] = 1 \tag{9}$$

dove μ è la media $E[X_i]$.

Dim. Supponiamo in un primo momento che $\mu = 0$. Consideriamo la somma $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ elevata alla quarta potenza. Si ha

$$S_n^4 = (X_1 + \cdots + X_n)^4 = \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_n = 4} \binom{4}{j_1, j_2, \ldots, j_n} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}\,.$$

Nella sommatoria avremo termini del tipo

$$X_i^4, \quad X_i^3 X_j, \quad X_i^2 X_j^2, \quad X_i^2 X_j X_k, \quad X_i X_j X_k X_l$$

dove gli indici i, j, k, l sono tutti diversi tra loro. Avendo tutte le X_i media nulla, ed essendo le v.a. indipendenti, troviamo

$$\begin{aligned} E\left[X_i^3 X_j\right] &= E\left[X_i^3\right] E\left[X_j\right] = 0,\\ E\left[X_i^2 X_j X_k\right] &= E\left[X_i^2\right] E\left[X_j\right] E\left[X_k\right] = 0,\\ E\left[X_i X_j X_k X_l\right] &= E\left[X_i\right] E\left[X_j\right] E\left[X_k\right] E\left[X_l\right] = 0. \end{aligned}$$

Quando andiamo a considerare la media

$$\begin{aligned} E[S_n^4] &= E[(X_1 + \cdots + X_n)^4]\\ &= \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_n = 4} \binom{4}{j_1, j_2, \ldots, j_n} E[X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}]\,, \end{aligned} \tag{10}$$

di tutta la sommatoria rimangono solo i termini del tipo $E[X_j^4]$ e $E[X_i^2 X_j^2]$. Per quanto riguarda gli $E[X_j^4]$, è chiaro che abbiamo esattamente n termini di questo tipo. Per quanto riguarda gli altri, cominciamo considerando il termine in cui $i = 1$

[2]Basta osservare che, dato $\varepsilon > 0$ e scelto un $h \in \mathbb{N}$ tale che $1/h < \varepsilon$, risulta

$$[|X_n - X| \geqslant \varepsilon \ \text{ i.o. }] \subset \left[|X_n - X| \geqslant \frac{1}{h} \ \text{ i.o. }\right].$$

e $j = 2$, ossia $E[X_1^2 X_2^2]$. Nello sviluppo (10), questo fattore compare moltiplicato per

$$\binom{4}{2,2,0,\dots,0} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6.$$

D'altra parte, possiamo scegliere la coppia (i,j) in $\binom{n}{2}$ modi diversi, e quindi, tenendo presente che le v.a. hanno tutte uguale distribuzione e sono indipendenti,

$$\begin{aligned} E\left[S_n^4\right] &= nE\left[X_1^4\right] + 6\binom{n}{2}E\left[X_1^2X_2^2\right] = nE\left[X_1^4\right] + 6\,\frac{n(n-1)}{2}E\left[X_1^2X_2^2\right] \\ &= nE\left[X_1^4\right] + 3n(n-1)E\left[X_1^2\right]E\left[X_2^2\right]\ . \end{aligned}$$

Sappiamo che sussiste la disuguaglianza

$$\left(E\left[X_i^2\right]\right)^2 \leqslant E\left[X_i^4\right]\ ,$$

da cui, ricordando la (8), ricaviamo

$$\left(E\left[X_i^2\right]\right)^2 \leqslant K\,.$$

Abbiamo dunque

$$E\left[S_n^4\right] \leqslant nK + 3n(n-1)K\,.$$

Essendo poi: $n + 3n(n-1) = 3n^2 - 2n \leqslant 3n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, troviamo la stima

$$E\left[S_n^4\right] \leqslant 3n^2K\,.$$

Fissato un $\varepsilon > 0$, per la disuguaglianza di Markov (1) scritta per $k = 4$, otteniamo

$$\mathbb{P}\left[|S_n| \geqslant n\varepsilon\right] \leqslant \frac{1}{n^4\varepsilon^4}\,E\left[S_n^4\right] \leqslant \frac{3K}{n^2\varepsilon^4}\,.$$

Essendo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[|S_n| \geqslant n\varepsilon\right] \leqslant \frac{3K}{\varepsilon^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty\,,$$

il lemma di Borel-Cantelli mostra che

$$\mathbb{P}\left[\left|n^{-1}S_n\right| \geqslant \epsilon\ \text{ i.o.}\right] = 0$$

per ogni $\epsilon > 0$. Il lemma 2 permette di concludere che

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$$

e la (9) è dimostrata.

Se $\mu \neq 0$, possiamo applicare quanto dimostrato alle v.a. $X_i - \mu$ e ottenere

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)}{n} \to 0\right] = 1\,.$$

Ma questo è equivalente alla (9). $\square$