La teoria dei limiti sugli insiemi quasi ordinati

1 Definizioni e prime proprietà

L'insieme U è detto un *insieme quasi-ordinato* se è data una legge la quale associa ad ogni elemento $u \in U$ un sottoinsieme $[u]$ di U (che sarà detto insieme degli elementi seguenti u) che soddisfa le due seguenti proprietà:

I) se u segue v e v segue w, allora u segue w. In simboli:

$$v \in [w] \Rightarrow [v] \subset [w] \ ;$$

II) dati comunque due elementi u e v, esiste un w che segue sia u che v. In simboli:

$$[u] \cap [v] \neq \emptyset, \qquad \forall \ u, v \in U \ .$$

Ecco alcuni esempi di insiemi quasi ordinati

1. $U = \mathbb{N}$ dove diciamo che $m \in [n]$ (ossia che m segue n) se $m > n$;
2. $U = \mathbb{R}$ dove diciamo che $x \in [y]$ (ossia che x segue y) se $x > y$;
3. $U = \mathbb{R}$ dove diciamo che $x \in [y]$ (ossia che x segue y) se $x < y$;
4. $U = (x_0 - R, x_0 + R)$, dove x_0 è un fissato numero reale e $R > 0$. Diciamo che $x \in [y]$ (ossia che x segue y) se $|x - x_0| < |y - x_0|$;
5. $U = \mathbb{P}(X)$, dove X è un qualsiasi insieme e $\mathbb{P}(X)$ denota l'insieme delle parti di X. Diciamo che l'insieme B segue l'insieme A se $A \subset B$.

Osserviamo che lo stesso insieme può avere ordinamenti distinti (cfr. esempi 2 e 3). Inoltre, dati due elementi distinti u e v può capitare che non si possa dire né che $u \in [v]$, né che $v \in [u]$ (cfr. esempio 5). Vedremo più avanti esempi più complessi.

Se una certa proprietà vale per ogni u seguente un dato u_0 noi diciamo che quella proprietà vale definitivamente.

Per una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ è possibile dare il concetto di limite; infatti si dice che $f(u)$ converge ad l $(-\infty < l < +\infty)$ e si scrive

$$\lim_{U} f(u) = l$$

se, dato comunque un $\varepsilon > 0$, esiste un elemento $u_\varepsilon \in U$ tale che $|f(u)-l| < \varepsilon$ per ogni u che segue u_e; in simboli:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ u_\varepsilon \in U\ \ : \forall\ u \in [u_\varepsilon] \Rightarrow |f(u) - l| < \varepsilon \tag{1}$$

Diremo che

$$\lim_U f(u) = +\infty\ (-\infty)$$

se

$$\forall\ K > 0\ \ \exists\ v_K \in U\ \ : \forall\ u \in [v_K] \Rightarrow f(u) > K\ (f(u) < -K)\,. \tag{2}$$

Il lettore riconoscerà senza fatica che, applicando questa definizione agli insiemi quasi ordinati 1–4, si ritrovano, rispettivamente, i concetti di

$$\lim_{n\to\infty} a_n\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,, \quad \lim_{x\to x_0} f(x)\,.$$

Mostriamo che le proprietà basilari che sono state viste per le successioni, per vari concetti di limiti per le funzioni ecc. continuano a sussistere per i limiti sugli insiemi quasi ordinati.

Teorema 1 *Sia U un insieme quasi ordinato e $f : U \to \mathbb{R}$. Se esiste il limite di f su U esso è unico.*

Dim. Supponiamo che esista finito il

$$\lim_U f(u) = l$$

e che si abbia anche

$$\lim_U f(u) = m\,,$$

con $m \in \overline{\mathbb{R}}$. Mostriamo intanto che non può essere $m = \pm\infty$. Infatti, se $m = +\infty$, dovrebbe valere anche la (2), oltre alla (1). Scegliamo $\varepsilon = 1$ e prendiamo un $K > l + 1$. Per ogni $u \in [u_1] \cap [v_K]$ abbiamo $K < f(u) < l + 1$ e questo è assurdo. In modo analogo si vede che non può essere $m = -\infty$.

Supponiamo quindi $m \in \mathbb{R}$. Oltre alla (1) avremo, analogamente,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ v_\varepsilon \in U\ \ : \forall\ u \in [v_\varepsilon] \Rightarrow |f(u) - m| < \varepsilon\,.$$

Preso un $w \in [u_\varepsilon] \cap [v_\varepsilon]$ (intersezione che risulta non vuota in virtù della condizione ii) nella definizione di insieme quasi ordinati), abbiamo

$$|l - m| \leqslant |l - f(w)| + |f(w) - m| < 2\,\varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε segue $l = m$.

Lasciamo il compito al lettore di estendere la dimostrazione al caso di $l = \pm\infty$. $\square$

Le operazioni sui limiti continuano a sussistere. Dimostriamo solo quella relativa alla combinazione lineare, lasciando al lettore il compito di verificare le altre.

Teorema 2 *Siano f e g due funzioni definite sull'insieme quasi ordinato U e supponiamo che esistano finiti i due limiti seguenti*

$$\lim_U f(u) = l\,, \quad \lim_U g(u) = m\,.$$

Date comunque due costanti $a, b \in \mathbb{R}$, risulta

$$\lim_U \left(a\, f(u) + b\, g(u)\right) = al + bm\,. \tag{3}$$

Dim. Oltre alla (1) avremo anche

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ v_\varepsilon \in U\ \ : \forall\ u \in [v_\varepsilon] \Rightarrow |g(u) - m| < \varepsilon\,. \tag{4}$$

Fissiamo un $w_\varepsilon \in [u_\varepsilon] \cap [v_\varepsilon]$. Per ogni $u \in [w_\varepsilon]$ risulta

$$|\, a\, f(u) + b\, g(u) - (al + bm)\,| \leqslant |a|\,|f(u) - l| + |b|\,|g(u) - m| < (|a| + |b|)\,\varepsilon$$

e quindi la tesi. $\square$

Con le solite tecniche si prova che la (3) sussiste anche per i limiti infiniti, purché $al + bm$ non dia luogo a una forma indeterminata.

Sussiste il seguente risultato, che spesso viene chiamato il teorema dei carabinieri

Teorema 3 *Siano f, g, h tre funzioni definite sull'insieme quasi ordinato U per le quali si abbia definitivamente*

$$f(u) \leqslant g(u) \leqslant h(u)\,. \tag{5}$$

Supponiamo inoltre che esistano finiti i due limiti seguenti e siano uguali

$$\lim_U f(u) = \lim_U h(u) = l\,.$$

Allora esiste anche il limite di g e risulta

$$\lim_U g(u) = l\,.$$

Dim. Dire che la (5) vale definitivamente significa che esiste un $u_0 \in U$ tale che la (5) è vera per ogni $u \in [u_0]$. Essendo il $\lim f = l$ sussiste la (1) e, analogamente, avremo anche

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, v_\varepsilon \in U \;\; : \forall\, u \in [v_\varepsilon] \Rightarrow |h(u) - l| < \varepsilon\,.$$

Preso un $w_\varepsilon \in [u_0] \cap [u_\varepsilon] \cap [v_\varepsilon]^{(1)}$, si ha

$$l - \varepsilon < f(u) \leqslant g(u) \leqslant h(u) < l + \varepsilon\,, \qquad \forall\, u \in [w_\varepsilon]$$

e questo dimostra che $\lim g = l$. $\square$

Teorema 4 *Siano f, g due funzioni definite sull'insieme quasi ordinato U per le quali si abbia definitivamente*

$$f(u) \leqslant g(u)\,.$$

Supponiamo inoltre che

$$\lim_U f(u) = +\infty \qquad (\lim_U g(u) = -\infty).$$

Allora esiste anche il limite di g (di f) e risulta

$$\lim_U g(u) = +\infty \qquad (\lim_U f(u) = -\infty).$$

Dim. La dimostrazione viene lasciata al lettore. $\square$

Abbiamo anche il seguente risultato che possiamo chiamare il teorema del confronto.

Teorema 5 *Siano f, g due funzioni definite sull'insieme quasi ordinato U per le quali si abbia definitivamente*

$$f(u) \leqslant g(u)\,. \tag{6}$$

---

(1) Si noti che, presi comunque $u_1, \ldots, u_n \in U$ risulta $[u_1] \cap \ldots \cap [u_n] \neq \emptyset$ $(n \geqslant 2)$. Dimostriamolo per induzione su n. La tesi è vera per $n = 2$; supponiamo che sia vera per $n - 1$, ossia che $[u_1] \cap \ldots \cap [u_{n-1}] \neq \emptyset$ e prendiamo un w che appartiene a questa intersezione. Risulta $[w] \cap [u_n] \neq \emptyset$ e, d'altra parte, essendo $w \in [u_1] \cap \ldots \cap [u_{n-1}]$ abbiamo anche $[w] \subset [u_1] \cap \ldots \cap [u_{n-1}]$. Da ciò segue $([w] \cap [u_n]) \subset ([u_1] \cap \ldots \cap [u_n])$. Essendo $[w] \cap [u_n] \neq \emptyset$ anche $[u_1] \cap \ldots \cap [u_n]$ risulterà non vuoto.

Supponiamo che esistano i due limiti seguenti

$$\lim_U f(u) = l, \qquad \lim_U g(u) = m.$$

Risulta $l \leqslant m$.

Dim. Sia u_0 un elemento di U tale che la (6) è vera per ogni $u \in [u_o]$. Supponiamo l ed m finiti. Sussistono, quindi, la (1) e la (4). Preso un $u \in [u_0] \cap [u_\varepsilon] \cap [v_\varepsilon]$, possiamo scrivere

$$l - \varepsilon < f(u) \leqslant g(u) < m + \varepsilon\,,$$

da cui segue $l < m + 2\,\varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi. In modo analogo si procede in presenza di limiti infiniti. $\square$

2 Funzioni monotone e teorema di regolarità

Una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ si dice monotona crescente (decrescente) se $u \in [v]$ implica $f(v) \leqslant f(u)$ ($f(v) \geqslant f(u)$).

Sussiste il teorema di regolarità per le funzioni monotone.

Teorema 6 *Sia* $f : U \to \mathbb{R}$ *una funzione monotona crescente (decrescente). Esiste il limite di* f *su* U *e risulta*

$$\lim_U f(u) = \sup_{u\in U} f(u) \qquad \left(\lim_U f(u) = \inf_{u\in U} f(u)\right). \tag{7}$$

Dim. Sia f monotona crescente e supponiamola limitata superiormente in U. Indichiamo con l il suo estremo superiore. Per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, abbiamo che, fissato un $\varepsilon > 0$, esiste un $u_\varepsilon \in U$ tale che

$$f(u_\varepsilon) > l - \varepsilon.$$

Allora, per ogni $u \in [u_\varepsilon]$, tenendo presente la monotonia della f, si ha

$$l - \varepsilon < f(u_\varepsilon) \leqslant f(u) < l + \varepsilon\,.$$

Abbiamo quindi che la sussiste la (1) e questo significa che la (7) è vera.

Se la f risulta illimitata superiormente (ossia $\sup f = +\infty$), vuol dire che per ogni $K > 0$ esiste un u_K tale che

$$f(u_K) > K\,.$$

Per la monotonia della f, per ogni $u \in [u_K]$, risulta

$$K < f(u_K) \leqslant f(u)$$

e quindi, sussistendo la (2), la (7) è dimostrata anche in questo caso. In modo analogo si ottiene il risultato per le funzioni decrescenti (basta applicare quanto appena dimostrato alla funzione $-f$) $\square$

3 I limiti inferiore e superiore

Definiamo il *limite inferiore* (o *minimo limite*) e il *limite superiore* (o *massimo limite*) di una funzione f definita su un insieme quasi ordinato U. Poniamo, rispettivamente:

$$\liminf_U f(u) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in [u]} f(v)\,; \qquad \limsup_U f(u) = \inf_{u \in U} \sup_{v \in [u]} f(v)\ .$$

Teorema 7 *Risulta*

$$\liminf_U f(u) = \lim_U \Big(\inf_{v \in [u]} f(v) \Big), \quad \limsup_U f(u) = \lim_U \Big(\sup_{v \in [u]} f(v) \Big). \tag{8}$$

Dim. Osserviamo che la funzione

$$\psi(u) = \inf_{v \in [u]} f(v)$$

risulta monotona crescente. Infatti, se $w \in [u]$ risulta $[w] \subset [u]$ e quindi

$$\inf_{v \in [u]} f(v) \leqslant \inf_{v \in [w]} f(v)$$

ossia $\psi(u) \leqslant \psi(w)$. Per il teorema di regolarità delle funzioni monotone possiamo dunque scrivere

$$\liminf_U f(u) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in [u]} f(v) = \lim_U \Big(\inf_{v \in [u]} f(v) \Big).$$

Analogamente si dimostra la formula per il limite superiore. $\square$

Teorema 8 *Risulta*

$$\liminf_U f(u) \leqslant \limsup_U f(u) \ . \tag{9}$$

Dim. Ovviamente abbiamo

$$\inf_{v\in[u]} f(v) \leqslant \sup_{v\in[u]} f(v)$$

per ogni $u \in U$. In base al teorema del confronto 4, abbiamo

$$\lim_U \inf_{v\in[u]} f(v) \leqslant \lim_U \sup_{v\in[u]} f(v) \, ,$$

ossia la tesi, grazie alla (8). □

La proprietà del confronto che abbiamo visto per i limiti continua a sussistere per i limiti inferiore e superiore:

Teorema 9 *Se f e g sono due funzioni tali che*

$$f(u) \leqslant g(u) \tag{10}$$

definitivamente, si ha

$$\liminf_U f(u) \leqslant \liminf_U g(u) \, , \quad \limsup_U f(u) \leqslant \limsup_U g(u) \, .$$

Dim. Sia u_0 tale che la (10) sussiste per ogni $u \in [u_o]$. Abbiamo

$$\inf_{v\in[u]} f(v) \leqslant \inf_{v\in[u]} g(v) \qquad \forall \ u \in [u_0]$$

e quindi, per il teorema del confronto 4,

$$\lim_U \inf_{v\in[u]} f(v) \leqslant \lim_U \inf_{v\in[u]} g(v) \ ,$$

ossia, in virtù della (8),

$$\liminf_U f(u) \leqslant \liminf_U g(u) \, .$$

Analogamente si dimostra

$$\limsup_U f(u) \leqslant \limsup_U g(u) \, .$$

□

Teorema 10 *La funzione $f : U \to \mathbb{R}$ tende al limite l ($-\infty \leqslant l \leqslant +\infty$) se e solo se*

$$\liminf_U f(u) = \limsup_U f(u); \tag{11}$$

in tal caso questo comune valore coincide con il limite l.

Dim. Dimostriamo il teorema nel caso del limite finito, lasciando al lettore il compito di esaminare in dettaglio il caso $l = \pm\infty$. Supponiamo $f(u) \to l \in \mathbb{R}$; dato un $\varepsilon > 0$, esiste un u_ε tale che

$$l - \varepsilon < f(u) < l + \varepsilon \qquad \forall\ u \in [u_\varepsilon]\ .$$

Tenendo presente il teorema 9 e la (9), deduciamo

$$l - \varepsilon \leqslant \liminf_U f(u) \leqslant \limsup_U f(u) \leqslant l + \varepsilon$$

da cui, facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$,

$$l \leqslant \liminf_U f(u) \leqslant \limsup_U f(u) \leqslant l \tag{12}$$

ossia la (11). La (12) mostra anche che $l = \liminf_U f(u) = \limsup_U f(u)$.

Se, viceversa,

$$l = \sup_{u \in U} \inf_{v \in [u]} f(v) = \inf_{u \in U} \sup_{v \in [u]} f(v),$$

per definizione di estremo inferiore, dato un $\varepsilon > 0$, esiste un u'_ε tale che

$$\sup_{v \in [u'_\varepsilon]} f(v) < l + \varepsilon$$

e quindi

$$f(v) < l + \varepsilon \qquad \forall\ v \in [u'_\varepsilon]\ .$$

Analogamente, esiste un u''_ε tale che

$$f(v) > l - \varepsilon \qquad \forall\ v \in [u''_\varepsilon]\ .$$

Preso allora un $u_\varepsilon \in [u'_\varepsilon] \cap [u''_\varepsilon]$ si ha che se $v \in [u_\varepsilon]$

$$l - \varepsilon < f(v) < l + \varepsilon \qquad \forall\ v \in [u_\varepsilon]$$

ossia $f(u) \to l$. $\square$

Teorema 11 (Criterio di convergenza di Cauchy) *La funzione $f : U \to \mathbb{R}$ è convergente se e solo se è soddisfatta la seguente condizione:*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ u_\varepsilon \in U\ :\ \forall\ u', u'' \in [u_\varepsilon] \Rightarrow |f(u') - f(u'')| < \varepsilon\ . \tag{13}$$

Dim. Se $f(u) \to l \in \mathbb{R}$, allora, dato $\varepsilon > 0$ esiste un u_ε tale che per ogni $u \in [u_\varepsilon]$ risulta $|f(u) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi

$$|f(u') - f(u'')| \leqslant |f(u') - l| + |l - f(u'')| < \varepsilon$$

per ogni $u', u'' \in [u_\varepsilon]$, ossia la (13).

Viceversa, se è soddisfatta la condizione di Cauchy (13), fissato ε, abbiamo che

$$f(u'') - \varepsilon < f(u') < f(u'') + \varepsilon$$

per ogni $u', u'' \in [u_\varepsilon]$. Fissiamo u'' e facciamo variare u'. Dal teorema 9 e dalla (9), segue

$$f(u'') - \varepsilon \leqslant \liminf_U f(u) \leqslant \limsup_U f(u) \leqslant f(u'') + \varepsilon$$

da cui segue la finitezza di $\liminf_U f(u)$ e di $\limsup_U f(u)$ ed inoltre

$$0 \leqslant \limsup_U f(u) - \liminf_U f(u) \leqslant f(u'') + \varepsilon - (f(u'') - \varepsilon) = 2\varepsilon\,,$$

che, per l'arbitrarietà di ε, implica la tesi. □

4 Esempi

In questa sezione vediamo tre esempi interessanti.

4.1 Funzioni a variazione limitata

Ricordiamo che una funzione f definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e a valori in $\mathbb{R}$ si dice a variazione limitata se, presa comunque una decomposizione δ dell'intervallo $[a, b]$ (ossia, fissati comunque i punti $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$) e definita

$$t_\delta = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|\,,$$

risulta

$$\sup_{\{\delta\}} t_\delta < +\infty.$$

In tal caso questo estremo superiore si chiama variazione totale della f, che indicheremo con T_a^b. Analogamente si definiscono la variazione positiva P_a^b e negativa N_a^b come

$$P_a^b = \sup_{\{\delta\}} p_\delta\,, \qquad N_a^b = \sup_{\{\delta\}} n_\delta$$

dove

$$p_\delta = \sum_{j=1}^{n} [f(x_j) - f(x_{j-1})]^+\,, \qquad n_\delta = \sum_{j=1}^{n} [f(x_j) - f(x_{j-1})]^-\,.$$

Abbiamo dimostrato il seguente risultato: se $f \in BV([a,b])$, risulta

$$\begin{cases} P_a^b + N_a^b = T_a^b\,, \\ P_a^b - N_a^b = f(b) - f(a)\,. \end{cases} \tag{14}$$

La dimostrazione si basa sull'osservazione ovvia che

$$\begin{cases} p_\delta + n_\delta = t_\delta\,, \\ p_\delta - n_\delta = f(b) - f(a)\,. \end{cases} \tag{15}$$

qualunque sia la decomposizione δ di $[a,b]$. Per ottenere la (14) dalla (15) abbiamo seguito una dimostrazione che permetteva di passare in qualche modo all'estremo superiore. Se utilizziamo la teoria dei limiti sugli insiemi quasi ordinati questi ragionamenti sono superflui, essendo la (14) conseguenza immediata della (15).

Consideriamo infatti l'insieme di tutte le decomposizione $\{\delta\}$ di $[a,b]$, dove diciamo che δ' segue δ se δ' è ottenuto da δ per infittimento. Questo significa che tutti i punti che compongono δ sono contenuti tra quelli della decomposizione δ'. E' facile verificare che con questa definizione, $\{\delta\}$ risulta un insieme quasi ordinato, ossia sono soddisfatte le due condizioni della definizione di insieme quasi ordinato (cfr. pag.1). Questo quasi ordinamento prende il nome di *ordinamento per infittimento*.

Le quantità t_δ, p_δ ed n_δ possono essere considerate delle funzioni definite sull'insieme quasi ordinato $\{\delta\}$. Non è difficile verificare che queste funzioni sono monotone non decrescenti, ossia che se δ' segue δ risulta

$$t_\delta \leqslant t_{\delta'}\,, \quad p_\delta \leqslant p_{\delta'}\,, \quad n_\delta \leqslant n_{\delta'}\,.$$

In virtù del teorema di regolarità delle funzioni monotone (Th. 6) abbiamo che esistono i seguenti limiti e si ha

$$\lim_{\{\delta\}} p_\delta = \sup_{\{\delta\}} p_\delta \,, \quad \lim_{\{\delta\}} t_\delta = \sup_{\{\delta\}} t_\delta \,, \quad \lim_{\{\delta\}} n_\delta = \sup_{\{\delta\}} n_\delta \,,$$

ossia

$$T_a^b = \lim_{\{\delta\}} t_\delta \,, \quad P_a^b = \lim_{\{\delta\}} p_\delta \,, \quad N_a^b = \lim_{\{\delta\}} n_\delta \,.$$

Potendo quindi vedere queste quantità come dei limiti, basta passare al limite (nel senso della teoria sviluppata nei paragrafi precedenti) nella (15), ottenendo subito la (14) per linearità.

4.2 L'integrale di Riemann

Sia f una funzione limitata definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. La f si dice integrabile secondo Riemann se

$$\sup_{\{\delta\}} s(\delta) = \inf_{\{\delta\}} S(\delta)$$

dove $\{\delta\}$ indica - come nel paragrafo precedente - l'insieme di tutte le decomposizioni di $[a, b]$,

$$s(\delta) = \sum_{j=1}^{n} m_j\,(x_j - x_{j-1})\,, \quad S(\delta) = \sum_{j=1}^{n} M_j\,(x_j - x_{j-1})$$

essendo

$$m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \quad M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)\,.$$

Questo comune valore fornisce l'integrale di Riemann della f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{\{\delta\}} s(\delta) = \inf_{\{\delta\}} S(\delta)\,.$$

Non è difficile verificare che, considerato l'ordinamento per infittimento su $\{\delta\}$, la funzione $s(\delta)$ risulta monotona non decrescente e $S(\delta)$ monotona non crescente. Il teorema di regolarità delle funzioni monotone ci permette di dire che esistono i seguenti limiti e si ha

$$\lim_{\{\delta\}} s(\delta) = \sup_{\{\delta\}} s(\delta)\,, \quad \lim_{\{\delta\}} S(\delta) = \inf_{\{\delta\}} S(\delta)\,.$$

Si noti che queste relazioni sussistono qualunque sia la funzione limitata f definita in $[a,b]$. Possiamo quindi dire che la funzione limitata f risulta integrabile secondo Riemann se e solo se

$$\lim_{\{\delta\}} s(\delta) = \lim_{\{\delta\}} S(\delta) \tag{16}$$

e l'integrale è dato da questo valore.

Consideriamo ora delle somme integrali più generali. Fissata una decomposizione δ scegliamo dei punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tali che $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ e definiamo la somma integrale

$$\sigma(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1})\,.$$

Consideriamo l'insieme il cui elemento generico $(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ è dato da una decomposizione δ di $[a,b]$ e da n punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ scelti nel modo predetto. Indichiamo questo insieme con $\{(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)\}$ e ordiniamolo per infittimento. Questo significa che $(\delta'; \eta_1, \ldots, \eta_m)$ segue $(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ se δ' è ottenuta per infittimento da δ. E' evidente che non abbiamo - in generale - nessun tipo di monotonia della funzione $\sigma(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Tuttavia risulta $m_j \leqslant f(\xi_j) \leqslant M_j$ e quindi

$$s(\delta) \leqslant \sigma(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant S(\delta)\,. \tag{17}$$

Supponiamo la f integrabile secondo Riemann. Potendosi pensare $s(\delta)$ ed $S(\delta)$ come funzioni definite anche sull'insieme quasi ordinato $\{(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)\}$ e risultando ovviamente

$$\lim_{\{\delta\}} s(\delta) = \lim_{\{(\delta;\xi_1,\ldots,\xi_n)\}} s(\delta)\,, \quad \lim_{\{\delta\}} S(\delta) = \lim_{\{(\delta;\xi_1,\ldots,\xi_n)\}} S(\delta)\,,$$

la (16) e la (17) implicano - grazie al "teorema dei carabinieri" (Th. 3) - che esiste il seguente limite e risulta

$$\lim_{\{(\delta;\xi_1,\ldots,\xi_n)\}} \sigma(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \lim_{\{(\delta;\xi_1,\ldots,\xi_n)\}} s(\delta) = \lim_{\{(\delta;\xi_1,\ldots,\xi_n)\}} S(\delta)\,.$$

In altri termini abbiamo che per una f limitata, integrabile secondo Riemann su $[a,b]$, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\{(\delta;\xi_1,\ldots,\xi_n)\}} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1})\,, \tag{18}$$

e quindi l'integrale di Riemann può essere visto come limite in un senso ben preciso delle somme integrali di questo tipo.

4.3 L'integrale di Henstock

Consideriamo ancora una $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e supponiamola integrabile secondo Riemann. Sull'insieme $\{(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)\}$ possiamo definire un nuovo ordinamento. Chiamiamo norma della decomposizione δ la massima ampiezza degli intervalli della decomposizione, ossia il seguente numero:

$$\|\delta\| = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j - x_{j-1}| \,.$$

Diciamo che $(\delta'; \eta_1, \ldots, \eta_m)$ segue $(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ se $\|\delta'\| < \|\delta\|$. Per distinguerlo dall'ordinamento per infittimento, chiameremo questo *ordinamento per* $\|\delta\| \to 0$. Si può dimostrare che, se f è integrabile secondo Riemann, sussiste la (18) anche considerando il limite per $\|\delta\| \to 0$. Questo significa che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\varrho_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ tale che $\|\delta\| < \varrho_\varepsilon$, risulta

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon \,. \tag{19}$$

Questo risultato suggerisce la seguente definizione. Sia ϱ una funzione definita in $[a,b]$ tale che risulti $\varrho(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Si noti che non richiediamo nessun tipo di regolarità o misurabilità. Chiameremo una funzione di questo tipo *calibro*. Dato un calibro ϱ, diremo che $(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ è una partizione ϱ-fine se la decomposizione δ e i punti $\xi, \ldots, \xi_n$ sono tali che

$$x_j - x_{j-1} < \varrho(\xi_j)\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,. \tag{20}$$

Se la ϱ è costante, questa condizione significa semplicemente che $\|\delta\| < \varrho$. La funzione f viene detta integrabile secondo Henstock se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un calibro $\varrho_\varepsilon(x)$ tale che, per ogni $(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ che sia ϱ_ε-fine, sussiste la (19). Le funzioni integrabili secondo Riemann sono quelle per le quali possiamo scegliere, per ogni $\varepsilon > 0$, un calibro ϱ_ε costante.

L'integrale di Henstock, che risulta più generale di quello di Lebesgue, può essere quindi definito come un limite di somme integrali. Si prenda, infatti, come insieme quello i cui elementi sono le terne $P = (\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n; \varrho(x))$, dove ϱ è un calibro e $(\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ è ϱ-fine, ossia risulta soddisfatta la (20). Diremo che l'elemento $P' = (\delta'; \eta_1, \ldots, \eta_m; \varrho'(x))$ segue $P = (\delta; \xi_1, \ldots, \xi_n; \varrho(x))$ se $\varrho'(x) < \varrho(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Non è difficile verificare che affermare che la funzione

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1})$$

definita su questo insieme quasi ordinato ammette limite significa che la funzione f è integrabile secondo Henstock e tale limite è l'integrale.

In questo modo riusciamo anche a vedere l'integrale di Lebesgue come limite di somme integrali in un senso ben preciso. Infatti le funzioni integrabili secondo Lebesgue sono integrabili secondo Henstock e anzi si possono caratterizzare come tutte e sole le funzioni assolutamente integrabili secondo Henstock. Da notare che in questo modo si ottiene l'integrale di Lebesgue sulla retta senza utilizzare alcuna nozione di teoria della misura.