Alcuni lemmi sulle misure con segno

In queste pagine dimostreremo alcuni lemmi sulle misure con segno che servono a dimostrare l'unicità della decomposizione di Lebesgue. Supporremo che tutte le misure siano definite su una σ-algebra $\mathcal{A}$ di insiemi dello spazio X.

Lemma 1 *Siano λ e μ due misure con segno. Se $\lambda \ll \mu$ e $\lambda \perp \mu$, allora $\lambda = 0$.*

Dim. Dire che $\lambda \perp \mu$ significa che esistono due insieme $A, B \in \mathcal{A}$ tali che $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ e inoltre λ è concetrata su A e μ è concentrata su B. Questo significa che $|\lambda|(B) = |\mu|(A) = 0$. D'altra parte, dalla assoluta continuità di λ rispetto a μ, segue anche $|\lambda|(A) = 0$. Deve quindi essere $|\lambda|(X) = |\lambda|(A) + |\lambda|(B) = 0$, ossia $\lambda = 0$. $\square$

Lemma 2 *Siano λ e μ due misure con segno finite. Risulta*

$$|\lambda + \mu| \leqslant |\lambda| + |\mu| \tag{1}$$

nel senso delle misure (ossia $|\lambda + \mu|(E) \leqslant |\lambda|(E) + |\mu|(E)$ per ogni insieme misurabile $E \in \mathcal{A}$).

Dim. Sia $X = A \cup B$ una decomposizione di Hahn dello spazio X relativa alla misura con segno $\lambda + \mu$, con A insieme positivo e B insieme negativo. Dato un qualsiasi insieme $E \in \mathcal{A}$, risulta

$$\begin{aligned}
|\lambda + \mu|(E) &= (\lambda + \mu)_+(E) + (\lambda + \mu)_-(E) \\
&= (\lambda + \mu)(E \cap A) - (\lambda + \mu)(E \cap B) \\
&= \lambda(E \cap A) + \mu(E \cap A) - \lambda(E \cap B) - \mu(E \cap B) \\
&\leqslant |\lambda(E \cap A)| + |\mu(E \cap A)| + |\lambda(E \cap B)| + |\mu(E \cap B)| \\
&\leqslant |\lambda|(E \cap A) + |\mu|(E \cap A) + |\lambda|(E \cap B) + |\mu|(E \cap B) \\
&= [|\lambda|(E \cap A) + |\lambda|(E \cap B)] + [|\mu|(E \cap A) + |\mu|(E \cap B)] \\
&= |\lambda|(E) + |\mu|(E)
\end{aligned}$$

e quindi la tesi. Si noti che abbiamo usato il fatto che, data una misura con segno ν, si ha

$$|\nu(G)| = |\nu_+(G) - \nu_-(G)| \leqslant \nu_+(G) + \nu_-(G) = |\nu|(G)\,, \quad \forall\, G \in \mathcal{A}.$$

$\square$

Lemma 3 *Siano λ_1, λ_2 e μ misure con segno. Supponiamo λ_1, λ_2 finite e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_2 \ll \mu$, allora $(a\lambda_1 + b\lambda_2) \ll \mu$.*

Dim. Dobbiamo far vedere che, se $|\mu|(E) = 0$, allora $|a\lambda_1 + b\lambda_2|(E) = 0$. Sia dunque $E \in A$ tale che $|\mu|(E) = 0$. Essendo λ_1 e λ_2 assolutamente continue rispetto a μ, avremo $|\lambda_1|(E) = |\lambda_2|(E) = 0$. Ricordando la (1), troviamo

$$|a\lambda_1 + b\lambda_2|(E) \leqslant |a|\,|\lambda_1|(E) + |b|\,|\lambda_2|(E) = 0$$

e il lemma è dimostrato. $\square$

Lemma 4 *Siano λ_1, λ_2 e μ misure con segno. Supponiamo λ_1, λ_2 finite e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se $\lambda_1 \perp \mu$ e $\lambda_2 \perp \mu$, allora $(a\lambda_1 + b\lambda_2) \perp \mu$.*

Dim. Essendo $\lambda_1 \perp \mu$ esistono due insiemi $A_1, B_1 \in \mathcal{A}$ tali che $X = A_1 \cup B_1$, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $|\lambda_1|(B_1) = |\mu|(A_1) = 0$. Analogamente avremo $X = A_2 \cup B_2$, $A_2 \cap B_2 = \emptyset$, $|\lambda_2|(B_2) = |\mu|(A_2) = 0$.

Poniamo $A = A_1 \cup A_2$, $B = (A_1 \cup A_2)^{\sim} = \widetilde{A}_1 \cap \widetilde{A}_2 = B_1 \cap B_2$. Facciamo vedere che $(a\lambda_1 + b\lambda_2)$ è concentrata su A e che μ lo è su B. Infatti abbiamo $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ e inoltre, ricordando la (1),

$$|a\lambda_1 + b\lambda_2|(B) \leqslant |a|\,|\lambda_1|(B) + |b|\,|\lambda_2|(B) \leqslant |a|\,|\lambda_1|(B_1) + |b|\,|\lambda_2|(B_2) = 0\,,$$
$$|\mu|(A) = |\mu|(A_1 \cup A_2) \leqslant |\mu|(A_1) + |\mu|(A_2) = 0\,.$$

$\square$