Un lemma sulle algebre

Lemma. *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra e siano $E_i \in \mathcal{A}$. Esistono $F_i \in \mathcal{A}$, tali che $F_i \cap F_j = \emptyset,\ (i \neq j)$ e*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i. \tag{1}$$

Dim. Poniamo

$$\begin{aligned} &F_1 = E_1 \\ &F_2 = E_2 \setminus E_1 \\ &F_3 = E_3 \setminus (E_1 \cup E_2) \\ &\dots \\ &F_n = E_n \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}) \\ &\dots \end{aligned} \tag{2}$$

E' ovvio che $F_j \in \mathcal{A}$. Verifichiamo che gli insiemi F_j sono disgiunti a due a due.

Consideriamo $h \neq k$ e, per fissare le idee, supponiamo $h < k$. Risulta

$$\begin{gathered} F_h \cap F_k = [E_h \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{h-1})] \cap [E_k \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{k-1})] = \\ = E_h \cap \widetilde{E}_1 \cap \dots \widetilde{E}_{h-1} \cap E_k \cap \widetilde{E}_1 \cap \dots \widetilde{E}_{k-1} \subset (E_h \cap \widetilde{E}_h) = \emptyset \end{gathered}$$

(si noti che esendo $h < k$, h è un intero compreso tra 1 e $k-1$).

Per dimostrare la (1), cominciamo con l'osservare che

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \ \subset \ \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

dato che risulta $F_i \subset E_i$. Per dimostrare l'inclusione inversa, supponiamo che

$$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \,.$$

Esiste allora un intero j tale che $x \in E_j$. Poniamo

$$p = \min\{i \in \mathbb{N} \mid x \in E_i\}.$$

Si noti che, essendo $\{i \in \mathbb{N} \mid x \in E_i\}$ non vuoto (almeno j appartiene a questo insieme), si ha che questo insieme ammette minimo (principio del buon ordinamento). Dire che p è il minimo di questo insieme significa che

$$x \in E_p,\ x \notin E_1, \dots, x \notin E_{p-1}.$$

Ma questo equivale a dire che $x \in F_p$ e dunque

$$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Si è così provato che

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

e la (1) è dimostrata. $\square$

Osserviamo che si ha anche

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Basta prendere, infatti, $E_j = \emptyset$ per $j \geq n+1$ (che implica $F_j = \emptyset$ per $j \geq n+1$) nella (1).

Una conseguenza di questo lemma è la subadditività della probabilità, ossia la proprietà seguente: sia $(X, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia $\{E_k\}$ una successione di eventi di $\mathscr{A}$. Risulta

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_k)\,. \tag{3}$$

Infatti, in base al lemma precedente, gli eventi $F_i \in \mathscr{A}$ definiti dalle (2) sono tali che $F_i \cap F_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ e sussiste la (1). Osservando che $F_i \subset E_i$, e quindi $\mathbb{P}(F_i) \leq \mathbb{P}(E_i)$, abbiamo

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_k)$$

(nella seconda uguaglianza abbiamo usato la σ-additività di $\mathbb{P}$).