Alcuni esercizi e complementi sulla misura di Lebesgue.

1 *Dato un qualsiasi insieme A tale che $m^*A < \infty$ ed un $\varepsilon > 0$, esiste un aperto O tale che $A \subset O$ e $m^*O < m^*A + \varepsilon$. Inoltre esiste un $G \in \mathscr{G}_\delta$ tale che $A \subset G$ e $m^*A = m^*G$.*

Per definizione di m^*, esiste una successione di intervalli aperti $\{I_n\}$ tale che $A \subset \cup I_n$ e: $\sum l(I_n) < m^*A + \varepsilon$. Posto $O = \cup I_n$, risulta O aperto, $A \subset O$ e $m^*O \leqslant \sum l(I_n)$; ossia O soddisfa tutte le condizioni richieste.

Per ogni n intero, sia O_n un aperto tale che: $A \subset O_n$ e $m^*O_n < m^*A + 1/n$. Poniamo $G = \cap O_n$; risulta $G \in \mathscr{G}_\delta$ e $A \subset G$. Ciò implica $m^*A \leqslant m^*G$; inoltre, essendo $G \subset O_n$, si ha: $m^*G \leqslant m^*O_n < m^*A + 1/n$ per ogni n. Deve quindi essere $m^*G \leqslant m^*A$, ossia la tesi.

2 *Dimostrare che se $m^*A = 0$, allora $m^*(A \cup B) = m^*B$ per ogni insieme B.*

Essendo $B \subset A \cup B$, si ha $m^*B \leqslant m^*(A \cup B)$ e, per la subadditività, $m^*(A \cup B) \leqslant m^*A + m^*B = m^*B$, ossia la tesi.

3 *Sia E un dato insieme. Allora le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti:*

i. E è misurabile;
ii. dato $\varepsilon > 0$, esiste un aperto O tale che $E \subset O$ e $m^*(O - E) < \varepsilon$;
iii. dato $\varepsilon > 0$, esiste un chiuso C tale che $C \subset E$ e $m^*(E - C) < \varepsilon$;
iv. esiste un $G \in \mathscr{G}_\delta$ tale che $E \subset G$ e $m^*(G - E) = 0$;
v. esiste un $F \in \mathscr{F}_\sigma$ tale che $F \subset E$ e $m^*(E - F) = 0$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Dimostriamolo prima nell'ipotesi che $m^*E < \infty$. Per l'esercizio 1, esiste un aperto O tale che $E \subset O$ e $m^*O < m^*E + \varepsilon$. Inoltre, essendo misurabili sia O (è un aperto !) sia E (per ipotesi), lo sarà anche $O - E$. Essendo $O = (O - E) \cup E$, risulta $m^*O = m^*(O - E) + m^*E$ (N.B. m^* è additiva sulla σ-algebra degli insiemi misurabili !) e quindi $m^*(O - E) = m^*O - m^*E < \varepsilon$.

Sia ora E un qualsiasi insieme misurabile. Poniamo $D_n = (-n, n)$, $E_n = E \cap D_n$. E_n risulta misurabile ed inoltre $m^*E_n < \infty$. Allora per quanto appena dimostrato esiste un aperto O_n tale che $E_n \subset O_n$ e $m^*(O_n - E_n) <$

$\varepsilon/2^n$. Posto $O = \cup O_n$, O risulta ovviamente un aperto tale che $E \subset O$. Inoltre: $O - E = (\cup O_n) - E = (\cup O_n) \cap \widetilde{E} = \cup(O_n \cap \widetilde{E}) \subset \cup(O_n \cap \widetilde{E}_n) = \cup(O_n - E_n)$. Ciò implica: $m^*(O - E) \leqslant \sum m^*(O_n - E_n) < \varepsilon$.

$(ii) \Rightarrow (iv)$. Per ipotesi, per ogni n, esiste un aperto O_n tale che $E \subset O_n$ e $m^*(O_n - E) < 1/n$. Posto $G = \cap O_n$, risulta $G \in \mathscr{G}_\delta$ e $E \subset G$. Inoltre $G - E = (\cap O_n) - E = \cap(O_n - E) \subset O_n - E$; ciò implica $m^*(G - E) \leqslant m^*(O_n - E) < 1/n$, per ogni n, e quindi $m^*(G - E) = 0$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Dobbiamo far vedere che qualunque sia l'insieme A, risulta:

$$m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \widetilde{E}). \tag{1}$$

D'altra parte, essendo $G \in \mathscr{G}_\delta$, G risulta misurabile e quindi

$$m^*A = m^*(A \cap G) + m^*(A \cap \widetilde{G}). \tag{2}$$

Inoltre, poiché E è contenuto in G, si ha: $G = (G - E) \cup E$; risulta quindi:

$$m^*(A \cap G) = m^*([A \cap (G - E)] \cup [A \cap E]) = m^*(A \cap E) \tag{3}$$

(N.B. $A \cap (G - E) \subset G - E \Rightarrow m^*[A \cap (G - E)] = 0$; cfr. anche eser. 2). Analogamente, essendo $\widetilde{G}$ contenuto in $\widetilde{E}$, risulta

$$m^*(A \cap \widetilde{E}) = m^*([A \cap (\widetilde{E} - \widetilde{G})] \cup [A \cap \widetilde{G}]) = m^*(A \cap \widetilde{G}) \tag{4}$$

(N.B. $\widetilde{E} - \widetilde{G} = \widetilde{E} \cap G = G - E$). (2), (3), (4) implicano evidentemente (1).

Abbiamo così dimostrato che $(i) \iff (ii) \iff (iv)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Essendo E misurabile, lo sarà anche $\widetilde{E}$. Allora la (ii) (che abbiamo dimostrato essere equivalente a (i)) fornisce un aperto O tale che $\widetilde{E} \subset O$ e $m^*(O - \widetilde{E}) < \varepsilon$. Sia $C = \widetilde{O}$; C è chiuso e contenuto in E; inoltre, essendo $E - C = O - \widetilde{E}$, risulta $m^*(E - C) < \varepsilon$.

$(iii) \Rightarrow (v)$. Poiché C è un chiuso tale che $C \subset E$ e $m^*(E - C) < \varepsilon$, risulta $\widetilde{E} \subset \widetilde{C}$, con $\widetilde{C}$ aperto. Inoltre essendo $m^*(\widetilde{C} - \widetilde{E}) = m^*(E - C) < \varepsilon$, per l'insieme $\widetilde{E}$ risulta soddisfatta la condizione (ii) che implica la (iv). Esiste quindi un $G \in \mathscr{G}_\delta$ tale che $\widetilde{E} \subset G$ e $m^*(G - \widetilde{E}) = 0$; posto $F = \widetilde{G}$, si ha che $F \in \mathscr{F}_\sigma$ e: $m^*(E - F) = m^*(G - \widetilde{E}) = 0$.

$(v) \Rightarrow (i)$. Invertendo il ragionamento precedente, si vede che, se E soddisfa la (v), allora per $\widetilde{E}$ sussiste la (iv). Per quanto già dimostrato dovrà essere $\widetilde{E}$ misurabile e quindi anche E deve essere tale.

La dimostrazione è così completa.

La prima parte del prossimo esercizio mostra che, nel caso di insiemi di misura esterna finita, la definizione di Carathéodory di insieme misurabile coincide con quella originale di Lebesgue.

4 *Sia E un insieme tale che $m^*E < \infty$. Allora E è misurabile se e solo se:*

$$\sup_{C \subset E} m^*C = \inf_{E \subset O} m^*O \tag{5}$$

(gli insiemi C sono chiusi e gli insiemi O sono aperti).

Inoltre, per ogni E limitato, si ha:

$$\mathrm{mis}_i E \leqslant m_*E \leqslant m^*E \leqslant \mathrm{mis}_e E \tag{6}$$

dove $\mathrm{mis}_i E$ e $\mathrm{mis}_e E$ sono rispettivamente la misura interna ed esterna di E secondo Peano-Jordan, e m_*E e m^*E sono rispettivamente la misura interna ed esterna di E secondo Lebesgue (ossia il primo e il secondo membro di (5)).

Sia E misurabile; allora è ovvio che $m^*E = \inf m^*O$ (cfr. Eser. 1). Inoltre, per la (*iii*) del precedente esercizio, per ogni $\varepsilon > 0$, esisterà un chiuso C contenuto in E tale che $m^*(E - C) < \varepsilon$; essendo $E = (E - C) \cup C$, si ha $m^*E = m^*(E - C) + m^*C$, e quindi $m^*E - \varepsilon < m^*C$. Ciò prova che $m^*E = \sup m^*C$.

Viceversa, essendo $m^*E = \inf m^*O$ finita, dalla (5) segue che, dato un $\varepsilon > 0$, esistono un aperto O contenente E ed un chiuso C contenuto in E tali che $m^*O - m^*C < \varepsilon$. Deve quindi essere $m^*(O - C) = m^*O - m^*C$ (si noti che sia O che C sono insiemi misurabili !). D'altra parte, essendo $E - C \subset O - C$, si ha: $m^*(E - C) < \varepsilon$, ossia sussiste la (*iii*) del precedente esercizio, che, come sappiamo, implica la misurabilità di E.

Si noti che se $m^*E = \infty$, la (5) non caratterizza più gli insiemi misurabili. Invitiamo il lettore a fornire un esempio di insieme non misurabile per il quale sussiste la (5).

La prima disuguaglianza di (6) si prova immediatamente osservando che la $\mathrm{mis}_i E$ è l'estremo superiore delle $\mathrm{mis} P$, al variare dei pluriintervalli chiusi P costituiti esclusivamente di punti interni di E e quindi

$$\mathrm{mis}_i E = \sup_{P \subset \mathring{E}} m^*P \leqslant \sup_{C \subset E} m^*C = m_*E\,.$$

La seconda disuguaglianza in (6) è ovvia e la terza si prova nel modo seguente: intanto la $\mathrm{mis}_e E$ è definita come l'estremo inferiore delle $\mathrm{mis} P$, al variare dei pluriintervalli <u>chiusi</u> P costituiti da tutti e soli gli intervalli che hanno intersezione non vuota con E. Non è difficile verificare che ciò implica che E è contenuto nell'interno di P e quindi che $m^*E \leqslant m^*\mathring{P}$, da cui segue

$$m^*E \leqslant \inf_{E \subset \mathring{P}} m^*P = \text{mis}_e E$$

ossia la tesi.

Osserviamo che la (6) implica il fatto seguente: se l'insieme E limitato è misurabile secondo Peano-Jordan, allora E è anche misurabile secondo Lebesgue e le due misure coincidono. È facile dare esempi di insiemi misurabili secondo Lebesgue che non risultano tali secondo Peano-Jordan.

5 *Sia E un insieme tale che $m^*E < \infty$. Allora E è misurabile se e solo se, dato un $\varepsilon > 0$, esiste un'unione finita di intervalli U tale che $m^*(U\Delta E) < \varepsilon$.*

Sia E misurabile; allora per la (ii) dell'esercizio 3, esiste un aperto O tale che $E \subset O$ e $m^*(O - E) < \varepsilon$. Sia $O = \cup I_n$, essendo gli I_n intervalli aperti disgiunti a due a due. Tale unione è finita o numerabile e $m^*O = \sum l(I_n)$. Supponiamo che gli $\{I_n\}$ siano in numero infinito; è ovvio cosa vada modificato se gli $\{I_n\}$ risultano in numero finito. Sia n tale che

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} l(I_j) < \varepsilon$$

e sia $U = \cup_{j=1}^{n} I_j$. Risulta $E - U \subset O - U$ e quindi $m^*(E - U) \leqslant m^*(O - U) < \varepsilon$. Inoltre $U - E \subset O - E$ e quindi anche $m^*(U - E) \leqslant m^*(O - E) < \varepsilon$. Essendo $U\Delta E = (U - E) \cup (E - U)$, segue che $m^*(U\Delta E) < 2\varepsilon$.

Viceversa, sia U tale che

$$m^*(U\Delta E) < \varepsilon. \tag{7}$$

Ciò implica che $m^*(E - U) < \varepsilon$. Esiste allora un aperto W tale che $E - U \subset W$ e $m^*W < m^*(E - U) + \varepsilon < 2\varepsilon$. Posto $O = U \cup W$, risulta $E \subset O$ (come si verifica subito) e inoltre (tenendo presente che per la (7) $m^*(U - E) < \varepsilon$): $m^*(O - E) \leqslant m^*(U - E) + m^*(W - E) < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$, ossia la tesi.

6 *Sia D un insieme misurabile (secondo Lebesgue) tale che $mD > 0$. Dimostrare che esiste un sottoinsieme E di D non misurabile.*

Evidentemente non è restrittivo supporre che D sia limitato, ossia che esiste un L tale che $D \subset (-L, L)$. Introduciamo in $\mathbb{R}$ la seguente relazione: $x \sim y$ se e solo se $x - y$ è razionale. È facile dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza. $\mathbb{R}$ rimane così decomposto in classi di equivalenza determinate da detta relazione. Sia W l'unione di tutte le classi di equivalenza che hanno intersezione non vuota con D. Ad ogni classe di equivalenza C di W associamo un elemento x in $C \cap D$ (ciò può essere fatto utilizzando *l'assioma delle infinite scelte*). Sia E il sottoinsieme di D così ottenuto. Vogliamo far vedere che E non è misurabile. A tal fine introduciamo i traslati di E : $E + r = \{x + r \mid x \in E\}$. Osserviamo che

$$D \subset \bigcup_r (E + r) \tag{8}$$

essendo l'unione considerata al variare di r in $(-2L, 2L) \cap Q$. Infatti, se x è un elemento di D, deve esistere, per definizione di E, un elemento y di E tale che $x \sim y$. Deve quindi essere $r = x - y$ un numero razionale, e, tenendo presente che $E \subset D \subset (-L, L)$, sarà $|r| < 2L$.

Inoltre

$$r, s \in \mathbb{Q},\ r \neq s \Longrightarrow (E + r) \cap (E + s) = \emptyset. \tag{9}$$

Se così non fosse, dovrebbero esistere x, y in E tali che $x + r = y + s$, ossia tali che $x - y = s - r$. Essendo $s - r$ razionale e diverso da zero, avremmo l'assurdo di due elementi di E appartenenti alla stessa classe di equivalenza, e ciò non può essere per la definizione di E.

Supponiamo E misurabile; essendo la misura di Lebesgue invariante per traslazioni, segue che tutti i traslati $E + r$ sono misurabili e $m(E + r) = mE$. Allora risulta misurabile anche l'unione $S = \cup_r (E + r)$ considerata in (8), e, in base alla (9): $mS = \sum m(E + r) = \sum mE$.

Ma essendo, come si constata immediatamente, $S \subset (-3L, 3L)$, deve essere $\sum mE \leqslant 6L$, e quindi $mE = 0$. Ma ciò implica $mS = 0$, e ciò è assurdo, essendo $D \subset S$ in base alla (8) ed essendo $mD > 0$. L'insieme E è quindi non misurabile.

7 *L'insieme di Cantor.*

Consideriamo nell'intervallo $[0, 1]$ l'intervallo aperto $(1/3, 2/3)$ e sia $C_1 = [0, 1] - (1/3, 2/3)$. C_1 risulta chiuso ed uguale all'unione dei due intervalli $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Facciamo una costruzione analoga nei due intervalli che compongono C_1; otteniamo in questo modo un chiuso C_2 che sarà dato dall'unione degli intervalli $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$, $[8/9, 1]$. Iterando il procedimento otteniamo una successione di chiusi $\{C_n\}$; l'insieme di Cantor C è l'intersezione di tutti i chiusi C_n. Alcune proprietà dell'insieme C sono le seguenti:

1) C è chiuso.

Ovvio, essendo C intersezione di chiusi.

2) C è perfetto.

Ricordiamo che un insieme si dice perfetto se coincide con il suo derivato $\mathscr{D}E$. Essendo C chiuso (ossia $\mathscr{D}C$ è contenuto in C), basta verificare che C è contenuto in $\mathscr{D}C$, ossia che C non contiene punti isolati. Infatti, se $x \in C$, x appartiene a C_n per ogni n, ed essendo C_n unione di intervalli di lunghezza uguale a $1/3^n$, x può essere approssimato quanto si vuole dagli estremi degli intervalli rimossi e tali estremi si possono scegliere sempre diversi da x.

3) C non è mai denso.

Ricordiamo che un insieme A non è mai denso se la sua chiusura è priva di punti interni, ossia: $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$. Essendo C chiuso, basta verificare che C è privo di punti interni. Infatti, sia $A = [0, 1] - C$; A risulta un aperto denso in $[0, 1]$, come si verifica subito. Se esistesse un intervallo aperto I contenuto in C, A dovrebbe essere contenuto in $[0, 1] - I$ (che è un chiuso contenuto in $[0, 1]$) e quindi A non sarebbe denso.

4) C ha la potenza del continuo.

Omettiamo la dimostrazione diretta di questa proprietà. Una conseguenza di quanto discusso in un prossimo esercizio sarà comunque che C ha cardinalità superiore a quella del numerabile (cfr. l'ultimo periodo dell'esercizio 9).

5) $mC = 0$.

C è misurabile, in quanto chiuso. D'altra parte la misura di A è data da:

$$\frac{1}{3} + 2\,\frac{1}{3^2} + 4\,\frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1 \;.$$

Sarà quindi: $mC = m([0, 1] - A) = 1 - 1 = 0$.

8 *La funzione di Cantor.*

Sia $f(x) = px + q$ una funzione lineare nell'intervallo $[a, b]$. Consideriamo la funzione $g(x)$ definita nel modo seguente, dove abbiamo posto $a_k = a +$

$k\,\dfrac{b-a}{3}$ $(k=1,2)$:

$$g(x)\begin{cases} =\dfrac{3}{2}\,p(x-a)+pa+q & a\leqslant x\leqslant a_1\\ =p\,\dfrac{a+b}{2}+q & a_1<x<a_2\\ =\dfrac{3}{2}\,p(x-a_2)+p\,\dfrac{a+b}{2}+q & a_2\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

Come si verifica subito, la funzione $g(x)$ è tale che, una volta diviso in tre parti uguali l'intervallo (a,b), nella parte interna è costante e assume il valor medio dei valori $f(a)$ e $f(b)$, e nelle rimanenti parti è lineare, essendo $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$. Nella figura 1 sono tracciati i grafici di $f(x)$ e di $g(x)$.

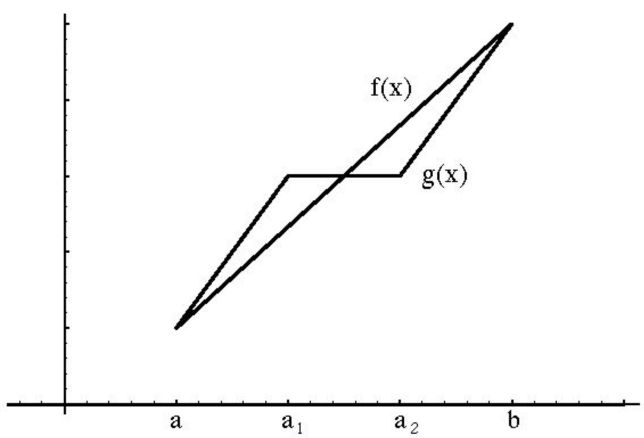

Figura 1.

Osserviamo che i coefficienti angolari della nuova funzione $g(x)$ sono uguali o a 0 (nella parte centrale) oppure a $\frac{3}{2}p$ nei rimanenti intervalli. Inoltre è ovvio che $|f(x)-g(x)|\leqslant|f(a_1)-g(a_1)|$ per ogni x in $[a,b]$, ossia, come si verifica con un semplice calcolo:

$$|f(x)-g(x)|\leqslant\frac{|p|}{6}\,(b-a)\,. \tag{10}$$

Data una funzione $\varphi(x)$ lineare a tratti (cioé tale che l'intervallo $[a,b]$ in cui è definita si può decomporre in numero finito di intervalli chiusi in ciascuno dei quali la funzione è lineare), indichiamo con $S\varphi(x)$ la funzione che si ottiene sostituendo, in ogni intervallo (massimale) in cui la $\varphi(x)$ è lineare, la relativa funzione $g(x)$ costruita ora. Consideriamo la successione di funzioni: $\varphi_0(x) = x$, $\varphi_n(x) = S\varphi_{n-1}(x)$ $(n = 1, 2, ...)$. Nella figura 2 è rappresentata la $\varphi_2(x)$.

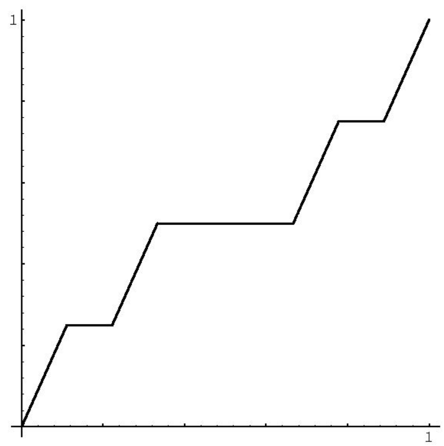

Figura 2.

In base alla (10), risulta:

$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leqslant \dfrac{1}{6}$ e i coefficienti angolari di $\varphi_1(x)$ sono 0 in $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ e $\dfrac{3}{2}$ nei rimanenti intervalli;

$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leqslant \dfrac{1}{6}\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{2}$ e i coefficienti angolari di $\varphi_2(x)$ sono 0 in $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$, $\left(\dfrac{7}{9}, \dfrac{8}{9}\right)$ e $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ nei rimanenti intervalli;

$|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \leqslant \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{2^2}$ ecc.

In generale si ha:

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \frac{1}{6}\frac{1}{2^n} .$$

Ciò implica che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)]$$

converge totalmente e quindi uniformemente in $[0, 1]$. Allora esiste il limite della successione $\{\varphi_n(x)\}$, diciamo $\varphi(x)$, e tale limite è uniforme. Infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1}[\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)]+\varphi_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}[\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)]+\varphi_0(x)$$

La funzione $\varphi(x)$ è la cosiddetta *funzione di Cantor*. Osserviamo che, essendo tutte le funzioni $\varphi_n(x)$ non decrescenti, lo sarà anche la $\varphi(x)$. Inoltre $\varphi(x)$ risulta continua, essendo limite uniforme di funzioni continue. Infine, su ciascun intervallo che non fa parte dell'insieme di Cantor, $\varphi(x)$ risulta costante. Infatti tutte le $\varphi_n(x)$ per $n \geqslant 1$ assumono il valore $1/2$ nell'intervallo $[1/3, 2/3]$, tutte le $\varphi_n(x)$ per $n \geqslant 2$ assumono il valore $1/4$ nell'intervallo $[1/9, 2/9]$ e $3/4$ nell'intervallo $[7/9, 8/9]$ ecc. La funzione $\varphi(x)$ è quindi uguale a $1/2$ nell'intervallo $[1/3, 2/3]$, a $1/4$ nell'intervallo $[1/9, 2/9]$, a $3/4$ nell'intervallo $[7/9, 8/9]$ e così via.

9 *Un insieme misurabile non boreliano.*

Sia $\varphi(x)$ la funzione di Cantor definita in $[0, 1]$ e sia $\psi(x) = x + \varphi(x)$. La funzione $\psi(x)$ risulta continua e strettamente crescente in $[0, 1]$: $\psi(x)$ è quindi un omeomorfismo dell'intervallo $[0, 1]$ su $[0, 2]$. Sia $A = [0, 1] - C$; A risulta unione di intervalli disgiunti, in ciascuno dei quali la funzione $\psi(x)$ coincide con la funzione $x + \text{cost.}$ (essendo la cost. dipendente dall'intervallo considerato). $\psi(x)$ trasforma quindi ogni intervallo di A in un intervallo di $[0, 2]$ avente la stessa lunghezza; ciò implica che $m[\psi(A)] = mA$, la quale è uguale, come è noto, a 1. Deve quindi essere: $m[\psi(C)] = m[0, 2] - \psi(A) = 2 - m[\psi(A)] = 1$. È interessante osservare che l'omeomorfismo $\psi(x)$ ha trasformato un insieme di misura nulla in un insieme di misura positiva. Per l'esercizio precedente, esiste un insieme E contenuto in $\psi(C)$ non misurabile. Consideriamo $\psi^{-1}(E)$; essendo tale insieme contenuto nell'insieme di misura nulla C, sarà misurabile. Però $\psi^{-1}(E)$ non può essere boreliano, perché, se così fosse, lo sarebbe anche $\psi[\psi^{-1}(E)] = E$ (ψ è un omeomorfismo !), mentre E non è nemmeno misurabile.

Notiamo due fatti interessanti: il primo è che un omeorfismo non conserva la misurabilità, ossia può trasformare insieme misurabili in insiemi non misurabili. In particolare, la controimmagine di un insieme misurabile tramite un omeomorfismo (e a fortiori una funzione continua) non è necessariamente un insieme misurabile. Il secondo fatto, è che se f è una funzione misurabile e g una funzione continua, la loro composizione $f \circ g$ non è detto che sia misurabile. Prendiamo infatti $f(x) = \chi_D$, dove $D = \psi^{-1}(E)$, e $g(x) = \psi^{-1}(x)$. La funzione $f \circ g(x) = \chi_E(x)$ non è una funzione misurabile, essendo l'insieme E non misurabile. Si noti che componendo in ordine inverso, ossia considerando $g \circ f$, con f misurabile e g continua, si ottiene invece sempre una funzione misurabile (dimostrarlo!).

Incidentalmente abbiamo ottenuto anche che C ha cardinalità superiore a quella del numerabile: infatti, se C fosse un insieme numerabile, tale dovrebbe essere anche $\psi(C)$; ma ciò implicherebbe $m[\psi(C)] = 0$ e così non è.

10 *Sia $g(x)$ una funzione semplice definita in $[a, b]$; dato un $\varepsilon > 0$, esiste una funzione costante a tratti $k(x)$ tale che $k(x) = g(x)$ tranne che su un insieme di misura minore di ε.*

Sia $g(x) = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} c_h \chi_{A_h}(x)$. Non è restrittivo supporre che $A_h \cap A_k = \emptyset$ $(h \neq k)$. Per ogni h, esiste un pluriintervallo (aperto) I_h, tale che

$$m(A_h \Delta I_h) < \frac{\varepsilon}{n}\ . \tag{11}$$

Definiamo $B_r = I_r - \displaystyle\bigcup_{m=1}^{r-1} I_m$. Ciascun B_r risulta un pluriintervallo e inoltre $B_h \cap B_k = \emptyset$ $(h \neq k)$. Sia $k(x) = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} c_h \chi_{B_h}(x)$. Per ogni $x \in \cup A_h \cap B_h$ si ha: $g(x) = k(x)$. D'altra parte, se $x \notin \cup A_h \cap B_h$, per un fissato h si ha: $x \in A_h - B_h$ ed essendo:

$$A_h - B_h = A_h - \left(I_h - \bigcup_{m=1}^{h-1} I_m\right) = A_h \cap \left[I_h \cap \left(\bigcup_{m=1}^{h-1} I_m\right)^{\sim}\right]^{\sim} =$$

$$A_h \cap \left[\widetilde{I}_h \cup \left(\bigcup_{m=1}^{h-1} I_m\right)\right] = (A_h - I_h) \cup \bigcup_{m=1}^{h-1} (A_h \cap I_m) \subset$$

$$(A_h - I_h) \cup \bigcup_{m=1}^{h-1} (I_m - A_m) \subset \bigcup_{m=1}^{n} (A_m \Delta I_m)$$

si ha (tenendo presente la (11)):

$$m\left[\left(\bigcup_{h=1}^{n} A_h \cap B_h\right)^{\sim}\right] < \varepsilon$$

ossia la tesi.

11 *Sia $k(x)$ una funzione costante a tratti in $[a,b]$; dato un $\varepsilon > 0$, esiste una funzione $h(x)$ continua in $[a,b]$ tale che $h(x) = k(x)$ tranne che su un insieme di misura minore di ε.*

Sia $k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_j(x)$, essendo gli I_j intervalli aperti disgiunti. Indichiamo con (α, β) il generico intervallo I_j e con c il valore c_j. Definiamo la $h(x)$ in (α, β) nel seguente modo, dopo aver fissato un $0 < \sigma < \min\{l(I_j)/2,\ j = 1, ..., n\}$:

$$h(x) \begin{cases} = \dfrac{c}{\sigma}(x-\alpha) & \alpha < x < \alpha + \sigma \\ = c & \alpha + \sigma \leqslant x \leqslant \beta - \sigma \\ = \dfrac{c}{\sigma}(\beta - x) & \beta - \sigma < x < \beta \end{cases}$$

Nella figura 3 è tracciato il grafico della $h(x)$ nell'intervallo (α, β).

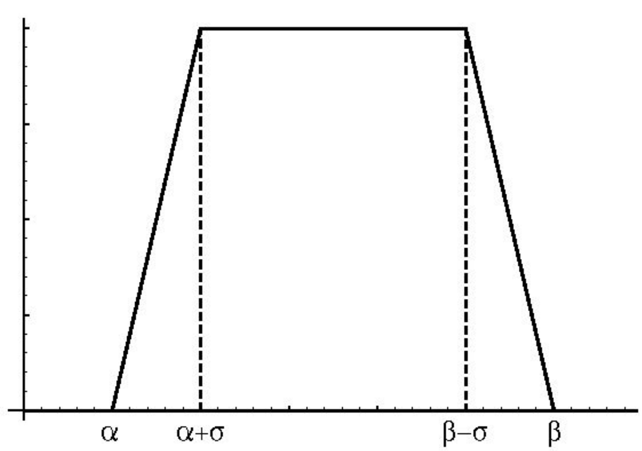

Figura 3.

In questo modo la funzione $h(x)$ risulta definita in ogni intervallo I_j. Ponendo $h(x) = 0$ fuori di questi intervalli, si ottiene una funzione continua in $[a, b]$ la quale coincide con $k(x)$ in tutti i punti di

$$[a, b] - \bigcup_{j=1}^{n} [(a_j, a_j + \sigma) \cup (b_j - \sigma, b_j)].$$

Basta scegliere σ tale che (oltre a verificare le condizioni richieste prima) $2n\sigma < \varepsilon$ per ottenere la funzione richiesta.

12 *Sia $f(x)$ una funzione misurabile definita su un intervallo $[a, b]$ e tale che la $m\{x \,:\, f(x) = \pm\infty\} = 0$. Allora, dato un $\varepsilon > 0$, esiste una funzione continua $h(x)$ tale che $m\{x \,:\, |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\} < \varepsilon$.*

Dapprima osserviamo che, essendo

$$\{x \,:\, f(x) = \pm\infty\} = \bigcap_{M=1}^{\infty} \{x \,:\, |f(x)| > M\},$$
$$\{x \,:\, |f(x)| > M + 1\} \subset \{x \,:\, |f(x)| > M\}$$

risulta

$$\lim_{M\to\infty} m\{x \,:\, |f(x)| > M\} = m\{x \,:\, f(x) = \pm\infty\} = 0\,,$$

e quindi esiste un intero M tale che $m\{x \,:\, |f(x)| > M\} < \varepsilon/3$; abbiamo dunque trovato una costante M tale che $|f(x)| \leqslant M$ tranne che su un insieme di misura minore di $\varepsilon/3$.

Scelto un intero n tale che $n > M/\varepsilon$, consideriamo gli insiemi (misurabili!):

$$A_h = f^{-1}\left(\left[\frac{hM}{n}, \frac{(h+1)M}{n}\right)\right) \qquad\qquad (h = -n, \dots, n)$$

e la seguente funzione semplice:

$$g(x) = \sum_{h=-n}^{n} \frac{hM}{n}\, \chi_{A_h}(x)\,.$$

Risulta: $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ tranne che sull'insieme dove $|f(x)| > M$. Quindi abbiamo costruito una funzione semplice $g(x)$ tale che $m\{x \,:\, |f(x)-$

$g(x)| \geqslant \varepsilon\} < \varepsilon/3$. Per l'esercizio 10, possiamo trovare una funzione costante a tratti $k(x)$ tale che $k(x) = g(x)$ tranne che su un insieme di misura minore di $\varepsilon/3$. Risulterà quindi $m\{x \ : \ |f(x) - k(x)| \geqslant \varepsilon\} < 2\varepsilon/3$. Analogamente, per l'esercizio 11, possiamo trovare una funzione continua $h(x)$, la quale coincide con $k(x)$ tranne che su un insieme di misura minore di $\varepsilon/3$. Sarà allora $m\{x \ : \ |f(x) - h(x)| \geqslant \varepsilon\} < \varepsilon$.

13 *(Teorema di Egoroff) Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni misurabili definite in un insieme misurabile E di misura finita. Se la successione $\{f_n(x)\}$ converge q.o. in E alla funzione a valori reali $f(x)$, allora dato un $\eta > 0$, esiste un sottoinsieme misurabile A di E tale che $mA < \eta$ e f_n converge ad f uniformemente in $E - A$.*

Per la proposizione 24 del testo, per ogni intero n, esiste un sottoinsieme A_n di E con $mA_n < 2^{-n}\eta$ ed un intero N_n tale che, per ogni $m > N_n$, si ha:

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \tag{12}$$

Sia $A = \cup A_n$; risulta $mA < \eta$. Inoltre, essendo $E - A = E - \cup A_n = E \cap (\cup A_n)^{\sim} = E \cap (\cap \widetilde{A}_n) = \cap(E \cap \widetilde{A}_n) = \cap(E - A_n)$, preso comunque un $x \in E - A$, x apparterrà a tutti gli $(E - A_n)$; dato quindi un $\varepsilon > 0$, scelto $n > 1/\varepsilon$, sarà (per la (12)) per ogni $m > N_n : |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall \ x \in E - A_n$, e quindi, in particolare, $\forall \ x \in E - A$.

14 *(Teorema di Lusin) Sia $f(x)$ una funzione a valori reali definita in $[a, b]$. La funzione $f(x)$ risulta misurabile se e solo se dato $\eta > 0$, esiste una funzione $\varphi(x)$ continua in $[a, b]$ tale che $m\{x \ : \ f(x) \neq \varphi(x)\} < \eta$.*

Poniamo $E = [a, b]$ e supponiamo $f(x)$ misurabile. In base all'esercizio 12, per ogni n esiste una funzione continua $h_n(x)$ tale che, detto $A_n = \{x \ : \ |f(x) - h_n(x)| \geqslant \frac{\delta}{2^n 3}\}$, risulta $mA_n < \frac{\delta}{2^n 3}$; quindi si ha:

$$|f(x) - h_n(x)| < \frac{\delta}{2^n 3} \qquad \forall \ x \in E - A_n.$$

Sia $A = \cup A_n$; risulta $mA < \delta/3$ e per ogni $x \in E - A = \cap(E - A_n)$ si ha:

$$|f(x) - h_n(x)| < \frac{\delta}{2^n 3} \qquad \forall \ n.$$

Ciò dimostra che $h_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ in $E - A$. Per il teorema di Egoroff possiamo trovare un sottoinsieme B di $E - A$ tale che $h_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ in $(E - A) - B = E - (A \cup B)$ e $mB < \delta/3$. Per la *(iii)* dell'esercizio 3 esiste un chiuso $C \subset E - (A \cup B)$ tale che $m\{[E - (A \cup B)] - C\} < \delta/3$. Osserviamo che $m(E - C) < \delta$ (infatti $E - C = (A \cup B) \cup [E - (A \cup B)] - C)$. Inoltre, poiché $h_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ in C, la funzione $f(x)$ risulta continua su C. Esiste allora una funzione $\varphi(x)$ definita su tutto l'asse reale che coincide con $f(x)$ su C [1]. La restrizione di $\varphi(x)$ all'intervallo $[a, b]$ fornisce la funzione richiesta.

Per quanto riguarda il viceversa, osserviamo che dalla ipotesi fatta, segue che per ogni n esiste una funzione continua $\varphi_n(x)$ tale che, posto $A_n = \{x : \varphi_n(x) \neq f(x)\}$, risulta $mA_n < 1/n$. Allora la funzione $f(x)$, coincidendo in $E - A_n$ con una funzione continua, risulta misurabile in $E - A_n$. Sia $A = \cap A_n$; essendo $E - A = \cup(E - A_n)$, la $f(x)$ risulterà misurabile in $E - A$ e poiché l'insieme A ha misura nulla, segue che $f(x)$ è misurabile in E.

[1] Per determinare una funzione siffatta si può procedere nel seguente modo. Il complementare di C, essendo un aperto, si scrive come unione numerabile di intervalli aperti. Si definisca $\varphi(x)$ uguale, su ciascuno di questi intervalli, alla funzione lineare che sugli estremi dell'intervallo considerato coincide con la $f(x)$ e si ponga uguale ad $f(x)$ su tutti i punti di C. La funzione così ottenuta risulta continua su tutto l'asse reale.