Il Teorema di Kakutani

Abbiamo visto, precedentemente, il seguente risultato:

1 *Sia X uno spazio di Banach. Se X^* è separabile, la palla*

$$B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$$

è debolmente compatta.

Il Teorema di Kakutani è un risultato più preciso di questo, perché fornisce le condizioni necessarie e sufficienti per la debole compattezza della palla unitaria e senza nessuna ipotesi di separabilità. La dimostrazione si basa sul seguente Teorema di Banach-Alaoglu

2 (Banach-Alaoglu) *Sia X uno spazio di Banach. La palla*

$$B_{X^*} = \{f \in X^* \mid \|f\| \leqslant 1\}$$

è $*$-debolmente compatta.

Si tratta di un risultato non banale, del quale omettiamo la dimostrazione. Ci limitiamo ad osservare che, se si suppone X separabile, si può dimostrare utilizzando la stessa tecnica che abbiamo usato per dimostrare il teorema 1, ossia il procedimento diagonale. Proponiamo al Lettore di scrivere tutti i dettagli.

Riportiamo senza dimostrazione anche il seguente risultato, noto come Lemma di Goldstine

3 (Goldstine) *Sia X uno spazio di Banach. L'insieme $J(B_X)$ è denso in $B_{X^{**}}$ rispetto alla topologia $*$-debole di X^{**}.*

Dimostriamo il seguente lemma

4 *Siano X e Y due spazi di Banach, e sia $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, ossia una trasformazione lineare e continua (rispetto alle topologie forti) da X in Y. Allora T è continuo anche rispetto alle topologie deboli.*

Dim. Osserviamo che, se $x_n \rightharpoonup x$ in X, allora $Tx_n \rightharpoonup Ty$ in Y. Infatti, dato che

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \quad \forall\, f \in X^*,$$

abbiamo

$$\langle T^* g, x_n \rangle \to \langle T^* g, x \rangle, \quad \forall\, g \in Y^*,$$

ossia

$$\langle g, Tx_n \rangle \to \langle g, Tx \rangle, \quad \forall\, g \in Y^*.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $Tx_n \rightharpoonup Tx$ in Y.

Se gli spazi X e Y muniti della topologia debole soddisfano il primo assioma di numerabilità, il Lemma è dimostrato. Ma in generale uno spazio di Banach munito della topologia debole non soddisfa questo assioma, e quindi quanto detto non è soddisfacente.

La dimostrazione nel caso generale si ottiene o ragionando direttamente con gli intorni della topologia debole (proponiamo al lettore di scrivere esplicitamente i dettagli) oppure sostituendo nel ragionamento precedente le successioni con le cosiddette *successioni generalizzate* (cfr. l'appendice). $\square$

5 (Kakutani) *Sia X uno spazio di Banach. La palla*

$$B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$$

è debolmente compatta se e solo se X^* è riflessivo.

Dim. Supponiamo X^* riflessivo. Indichiamo con $J : X \to X^{**}$ l'applicazione canonica, ossia l'applicazione che a $x \in X$ associa il funzionale Jx del biduale X^{**}:

$$\langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

Ricordiamo che la riflessività di X significa che $J(X) = X^{**}$. Essendo $\|Jx\| = \|x\|$, questo implica $J(B_X) = B_{X^{**}}$, ossia

$$B_X = J^{-1}(B_{X^{**}}). \tag{1}$$

Per il Teorema di Banach-Alaoglu, $B_{X^{**}}$ è compatto nella topologia $*$-debole di X^{**}. Se dimostriamo che $J^{-1} : X^{**} \to X$ è continuo quando X è munito della topologia debole e X^{**} di quella $*$-debole, la debole compattezza di B_X segue dalla (1).

Essendo $J : X \to X^{**}$ un'isometria, J^{-1} risulta continuo rispetto alle topologie forti. Per il lemma 4, $J^{-1} : X^{**} \to X$ risulta continuo anche quando X e X^{**} sono muniti delle rispettive topologie deboli. D'altra parte, essendo X riflessivo, lo sarà anche X^*. Su X^{**} la topologia debole e quella $*$-debole quindi coincidono e la debole compattezza di B_X è dimostrata.

Viceversa, supponiamo B_X debolmente compatta. Osserviamo che dalla continuità di $J : X \to Y$ (muniti delle topologie forti) segue la continuità di J anche quando X e Y sono muniti delle topologia deboli (Lemma 4). A fortiori J sarà continuo quando X è munito della topologia debole e X^{**} di quella $*$-debole, essendo quest'ultima più debole di quella debole.

$J(B_X)$ risulta dunque compatto e quindi chiuso nella topologia $*$-debole di X^{**}. La tesi segue dalla densità di $J(B_X)$ in $B_{X^{**}}$ (Lemma 3). $\square$

Appendice. Topologie e successioni generalizzate.

Sia X uno spazio metrico. I seguenti enunciati sono ben noti:

(i) sia $E \subset X$; il punto x appartiene alla chiusura di E se e solo se esiste una successione di punti $\{x_n\} \subset E$ tale che $x_n \to x$;

(ii) la funzione $f : X \to \mathbb{R}$; è continua nel punto x_0 se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subset X$ tale che $x_n \to x$ risulta $f(x_n) \to f(x_0)$.

Queste affermazioni sono ancora vere in uno spazio che soddisfi al primo assioma di numerabilità (ossia tale che per ogni punto esiste un sistema fondamentale di intorni numerabile). In spazi topologici più generali, però, queste affermazioni sono false. Per la (i) è vero in generale che se esiste una successione $\{x_n\} \subset E$, con $x_n \to x$, allora $x \in \overline{E}$, ma il viceversa è, in generale, falso.

Analogo discorso si può fare per la (ii).

Come controesempio, si consideri l'intervallo $[0, 1]$, munito della topologia per la quale gli aperti sono tutti e soli gli insiemi del tipo $[0, 1] \setminus N$, dove N è al più numerabile.

Facciamo vedere che l'affermazione (i) è falsa.

Premettiamo un'osservazione. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente in questo spazio topologico ad un punto $x_0 \in [0, 1]$. Essa risulta definitivamente costante, ossia deve esistere un n_0 tale che $x_n = x_0$ per ogni $n \geqslant n_0$. Infatti, dire che $x_n \to x_0$ significa che, per ogni intorno U di x_0 risulta $x_n \in U$ definitivamente. D'altra parte, $([0, 1] \setminus \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \cup \{x_0\}$ è un intorno di x_0 e deve perciò contenere i punti x_n definitivamente. E questo è possibile se e solo se $x_n = x_0$ da un certo n_0 in poi.

Consideriamo ora l'insieme $S = (0, 1]$. Il punto $\{0\}$ appartiene alla chiusura di S. Infatti, un qualsiasi suo intorno è del tipo $[0, 1] \setminus N$, dove $N \subset (0, 1]$ è al più numerabile. Supponiamo che (i) sia vera, ossia che esista una successione $\{x_n\} \subset (0, 1]$ tale che $x_n \to 0$. Consideriamo l'intorno $([0, 1] \setminus \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \cup \{x_0\}$. Essendo $x_n \neq 0$ (dato che $\{x_n\} \subset (0, 1]$) abbiamo che $x_n \notin U$ per ogni n, e questo contraddice il fatto che $x_n \to 0$.

Esempi analoghi mostrano che la (ii) è in generale falsa.

Se, però, invece di considerare successioni consideriamo le successioni generalizzate, (i) e (ii) valgono in uno spazio topologico qualsiasi.

Cosa sono le successioni generalizzate ? Sappiamo che è possibile introdurre un concetto di limite su un qualsiasi insieme quasi ordinato (o insieme diretto). Ricordiamo che un insieme Λ si dice quasi-ordinato se esiste una legge che a ogni elemento $u \in \Lambda$ associa un sottoinseme di Λ, detto degli elementi seguenti u e che indichiamo con $[u]$, in modo tale che

(a) se $u \in [v]$ allora $[u] \subset [v]$;

(b) $[u] \cap [v] \neq \emptyset$ per ogni $u, v \in \Lambda$.

Se φ è una funzione definita su Λ a valori in uno spazio topologico X, diremo che

$$\lim_{\Lambda} \varphi(u) = x \tag{2}$$

se per ogni intorno U di x esiste un $v \in \Lambda$ tale che $\varphi(u) \in U$ per ogni $u \in [v]$.

Se non c'è ambiguità, invece di (2) scriveremo $\varphi(u) \to x$.

Le usuali proprietà dei limiti continuano a valere in questo ambito più generale. Notiamo solo che per avere l'unicità del limite occorre supporre che X sia di Hausdorff.

Una successione di punti in uno spazio X non è altro che una funzione $\varphi : \mathbb{N} \to X$, dove $\mathbb{N}$ è ordinato nel modo usuale. Una *successione generalizzata* (o *net*) è una funzione $\varphi : \Lambda \to X$, dove Λ è un qualsiasi insieme quasi ordinato.

Se sostituiamo la parola successione con successione generalizzata in (i) e (ii) otteniamo delle affermazioni vere in un qualsiasi spazio topologico:

(i) sia $E \subset X$; il punto x appartiene alla chiusura di E se e solo se esiste una successione generalizzata di punti $\{x_\alpha\} \subset X$ ($\alpha \in \Lambda$, essendo Λ un insieme quasi ordinato) tale $x_\alpha \to x$;

(ii) la funzione $f : X \to Y$ (dove Y è un altro spazio topologico) è continua nel punto x_0 se e solo se per ogni successione generalizzata di punti $\{x_\alpha\} \subset X$ tale che $x_\alpha \to x_0$ risulta $f(x_\alpha) \to f(x_0)$.

Dimostriamo la (i). Se $x \in \overline{E}$ vuol dire che $U \cap E \neq \emptyset$ per ogni intorno U di x. Prendiamo allora, come spazio Λ, lo spazio $\{U_\alpha\}$ degli intorni di x (basterebbe considerare un sistema fondamentale di tali intorni) ordinato secondo l'inclusione, ossia diciamo che V segue U ($V \in [U]$ secondo la notazione precedente) se $V \subset U$. Scegliamo un punto $x_\alpha \in U_\alpha \cap E$ in ognuno degli intorni di $\{U_\alpha\}$. Otteniamo in questo modo una successione generalizzata $\{x_\alpha\} \subset E$ tale che $x_\alpha \to x$.

Viceversa, supponiamo che esista una successione generalizzata $\{x_\alpha\} \subset E$ tale che $x_\alpha \to x$. Questo vuol dire che, per ogni intorno U di x esiste un α_0 tale che $x_\alpha \in U$ per ogni $\alpha \in [\alpha_0]$. In particolare, per ogni intorno U, abbiamo $U \cap E \neq \emptyset$ e questo significa che $x \in \overline{E}$.

Dimostriamo la (ii). Osserviamo che dire che $f : X \to Y$ è continua in x_0 significa che per ogni intorno $V \subset Y$ di $f(x_0)$ esiste un intorno $U \subset X$ di x_0 tale che $f(U) \subset V$. Supponiamo f continua e sia $x_\alpha \to x_0$. Fissiamo un intorno V di $f(x_0)$; $f^{-1}(V)$ è un intorno di x_0 e dunque esiste un α_0 tale che per ogni $\alpha \in [\alpha_0]$ si ha $x_\alpha \in f^{-1}(V)$. Ma questo vuol dire che $f(x_\alpha) \in V$ per ogni $\alpha \in [\alpha_0]$. L'arbitrarietà di V mostra che $f(x_\alpha) \to f(x_0)$.

Viceversa, supponiamo che f non sia continua in x_0. Deve esistere, allora, un intorno $V \subset Y$ di $f(x_0)$ tale che $f(U) \not\subset V$, per ogni intorno $U \subset X$ di x_0. Per ogni intorno U_α di x_0 scegliamo un punto x_α tale che $f(x_\alpha) \notin V$. Ordinando gli U_α mediante l'inclusione, abbiamo che $x_\alpha \to x_0$. Ma, essendo $f(x_\alpha) \notin V$ per ogni α, $f(x_\alpha)$ non può tendere a $f(x_0)$.

Per approfondimenti su questo argomento, rimandiamo al Capitolo 4 del libro: S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley.

Da quanto detto dovrebbe essere evidente come modificare la dimostrazione del Lemma 4 della sezione precedente. Basta sostituire alla successione $\{x_n\}$ una successione generalizzata $\{x_\alpha\}$ e far vedere che se $x_\alpha \rightharpoonup x$ [1] allora $Tx_\alpha \rightharpoonup Tx$.

[1] Ovviamente $x_\alpha \rightharpoonup x$ significa che

$$\lim_{\Lambda} x_\alpha = x$$

nella topologia debole di X.