Alcuni complementi di teoria dell'integrazione.

In ciò che segue si suppone di avere uno spazio di misura $(X, \mathscr{B}, \mu)$

1 *Sia f una funzione misurabile su un insieme E di misura positiva tale che $f \geqslant 0$. Se*

$$\int_E f d\mu = 0$$

allora $f = 0$ q.o..

Prima di dimostrare questo risultato, osserviamo la seguente disuguaglianza, nota come *disuguaglianza di Chebishev*: sia f una funzione sommabile in E e, dato un numero reale positivo c, sia $A_c = \{x \in E \mid |f(x)| > c\}$. Allora:

$$\mu A_c \leqslant \frac{1}{c} \int_E |f| \, d\mu \ .$$

Tale disuguaglianza segue immediatamente dalle seguenti:

$$c \, \mu A_c \leqslant \int_{A_c} |f| \, d\mu \leqslant \int_E |f| \, d\mu \ .$$

Sia ora f la funzione indicata nel testo; per la disuguaglianza di Chebishev, tenendo presente che f è nonnegativa, risulta:

$$\mu A_{\frac{1}{n}} \leqslant n \int_E f \, d\mu = 0 \ .$$

Essendo $\{x \in E \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$, f può essere diversa da zero solo su un insieme di misura nulla.

2 (Assoluta continuità dell'integrale.) *Sia f una funzione sommabile in X. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni insieme $E \in \mathscr{B}$ con $\mu E < \delta_\varepsilon$ risulta*

$$\int_E |f| \, d\mu < \varepsilon \, .$$

Essendo, per definizione,

$$\int_X |f| \, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant |f| \\ \varphi \text{ semplice}}} \int_X \varphi \, d\mu \, ,$$

fissato un $\varepsilon > 0$, esiste una funzione semplice φ tale che $0 \leqslant \varphi \leqslant |f|$ e

$$\int_X \varphi \, d\mu > \int_X |f| \, d\mu - \frac{\varepsilon}{2} .$$

Preso un qualsiasi $E \in \mathscr{B}$ abbiamo (si noti che $|f| - \varphi \geqslant 0$)

$$\int_E (|f| - \varphi) \, d\mu \leqslant \int_X (|f| - \varphi) \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{1}$$

D'altra parte la φ assume solo un numero finito di valori e quindi esiste un $M > 0$ tale che $\varphi(x) \leqslant M$ per ogni $x \in X$. Dalla (1) si trae

$$\int_E |f| \, d\mu < \int_E \varphi \, d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant M \, \mu E + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Assumendo $\delta_\varepsilon = \varepsilon/(2M)$, si ha quindi

$$\int_E |f| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

per ogni $E \in \mathscr{B}$ tale che $\mu E < \delta_\varepsilon$.

3 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni non negative sommabili definite in X e tali che $f_n \to f$ quasi ovunque, con f sommabile; supponiamo inoltre che*

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f \, d\mu \ .$$

Allora per ogni insieme misurabile E si ha

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f \, d\mu \ .$$

Per il lemma di Fatou si ha:

$$\int_E f \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \ .$$

Inoltre, per le ipotesi fatte, risulta

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \limsup_{n\to\infty} \left(\int_X f_n d\mu - \int_{X-E} f_n d\mu \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu + \limsup_{n\to\infty} \left(- \int_{X-E} f_n d\mu \right) = \int_X f \, d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int_{X-E} f_n d\mu \ .$$

e riapplicando il lemma di Fatou:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu - \int_{X-E} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu$$

da cui segue subito la tesi (N.B. dove abbiamo sfruttato l'ipotesi che f è sommabile?).

Si noti che se le f_n non sono di segno costante, il precedente risultato è falso. Consideriamo, ad esempio, $X = \mathbb{R}$ munito della misura di Lebesgue e la successione di funzioni sommabili $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}\chi_{[0,2n\pi]}(x)$. La successione $\{f_n\}$ risulta uniformemente convergente a 0 su tutto $\mathbb{R}$ ed inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} \sin x\,dx = 0 \;\to\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0\ .$$

D'altra parte, se consideriamo $E = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}[2k\pi,(2k+1)\pi]$, si ha

$$\int_E f_n\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x\,dx = 2$$

che, ovviamente, non converge a 0.

4 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni sommabili definite in X tale che $f_n \to f$ quasi ovunque, con f sommabile. Si ha che f_n tende a f in norma se e solo se la norma di f_n tende alla norma di f, ossia*

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu \;\to\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \int_X |f_n|\,d\mu \;\to\; \int_X |f|\,d\mu$$

Poiché

$$\left|\int_X |f_n|\,d\mu - \int_X |f|\,d\mu\right| = \left|\int_X (|f_n| - |f|)\,d\mu\right| \leqslant$$
$$\int_X \big|\,|f_n| - |f|\,\big|\,d\mu \leqslant \int_X |f_n - f|\,d\mu$$

se l'ultimo membro tende a zero, si ha subito la tesi.

Viceversa: per il teorema precedente, qualunque sia l'insieme misurabile E, risulta

$$\int_E |f_n|\,d\mu \to \int_E |f|\,d\mu\ . \tag{2}$$

Inoltre per l'assoluta continuità dell'integrale di f:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta_\varepsilon > 0\ :\ \forall\ B \in \mathscr{B},\ \mu B < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \int_B |f|\, d\mu < \varepsilon\ . \tag{3}$$

Sia ora K un qualsiasi insieme misurabile di misura finita. Per il teorema di Severini-Egoroff [1], esiste un insieme $B \subset K$ tale che $\mu B < \delta_\varepsilon$ e la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente ad f su $K - B$. Essendo:

$$\int_K |f_n - f|\, d\mu \leqslant \int_{K-B} |f_n - f|\, d\mu + \int_B |f_n|\, d\mu + \int_B |f|\, d\mu$$

in base alla convergenza uniforme ed utilizzando (1) e (2) si ha:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_K |f_n - f|\, d\mu \leqslant 2 \int_B |f|\, d\mu < 2\,\varepsilon\ .$$

Ciò dimostra che

$$\forall\ K \in \mathscr{B},\ \mu K < \infty \implies \int_K |f_n - f|\, d\mu \to 0\,. \tag{4}$$

Sia K un insieme misurabile tale che $\mu K < \infty$ e $\displaystyle\int_{\widetilde{K}} |f|\, d\mu < \varepsilon$.[2]

Risulta:

$$\int_X |f_n - f|\, d\mu \leqslant \int_K |f_n - f|\, d\mu + \int_{\widetilde{K}} |f_n|\, d\mu + \int_{\widetilde{K}} |f|\, d\mu$$

da cui (per la (2) e la (4)):

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu \leqslant 2 \int_{\widetilde{K}} |f|\, d\mu < 2\varepsilon$$

ossia la tesi.

---

[1] Il teorema di Severini-Eogoroff si trova dimostrato nel libro di testo nel caso della misura di Lebesgue, ma tale dimostrazione si ripete parola per parola per una misura qualsiasi

[2] Essendo $\int_X |f|\, d\mu = \sup \int_X h\, d\mu < \infty$, dove il sup è considerato al variare delle funzioni semplici $0 \leqslant h \leqslant |f|$, dato $\varepsilon > 0$, esiste una siffatta funzione h tale che $\int_X h\, d\mu > \int_X |f|\, d\mu - \varepsilon$, ossia tale che $\int_X (|f| - h)\, d\mu < \varepsilon$. Se indichiamo con K l'insieme dove h è diversa da zero, K risulta di misura finita (perché h è semplice e $\int_X h\, d\mu < \infty$) e inoltre :

$$\int_{\widetilde{K}} |f|\, d\mu = \int_{\widetilde{K}} (|f| - h)\, d\mu \leqslant \int_X (|f| - h)\, d\mu < \varepsilon\ .$$

5 *Sia $\mu X < \infty$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni sommabili definite in X tale che $f_n \to f$ quasi ovunque, essendo f sommabile. Risulta*

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0 \tag{5}$$

se e solo se la successione $\{f_n\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui.

Ricordiamo che la successione $\{f_n\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui se

$$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta_\varepsilon > 0 \;\; : \;\; \forall \, B \in \mathscr{B}, \; \mu B < \delta_\varepsilon \implies \int_B |f_n| \, d\mu < \varepsilon \, , \; \forall \, n \tag{6}$$

(N.B. il δ_ε è indipendente dalla funzione f_n considerata).

Supponiamo valga la (5); per la sommabilità di f, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall \, B \in \mathscr{B}, \; \mu B < \delta_\varepsilon \implies \int_B |f| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \; ;$$

inoltre la (5) implica che esiste un n_ε tale che:

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \, , \; \forall \, n > n_\varepsilon.$$

Essendo poi ogni f_n sommabile, per ogni n, esiste un $\delta_{\varepsilon,n} > 0$ tale che

$$\forall \, B \in \mathscr{B}, \; \mu B < \delta_{\varepsilon,n} \implies \int_B |f_n| \, d\mu < \varepsilon \; .$$

Posto $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{\varepsilon,0}, ..., \delta_{\varepsilon,n_\varepsilon}\}$, risulta, per ogni B misurabile con $\mu B < \delta_\varepsilon$:

$$\int_B |f_n| \, d\mu \leqslant \int_B |f_n - f| \, d\mu + \int_B |f| \, d\mu \leqslant \int_X |f_n - f| \, d\mu + \int_B |f| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

se $n > n_\varepsilon$ e

$$\int_B |f_n| \, d\mu < \varepsilon$$

per $n = 1, ..., n_\varepsilon$.

Ciò dimostra che la successione $\{f_n\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui (N.B. in questa parte del teorema non abbiamo usato il fatto che lo spazio X ha misura finita).

Viceversa, per il teorema di Severini-Egoroff, possiamo trovare un insieme misurabile B tale che la $\mu B < \delta_\varepsilon$ (dove il δ_ε è dato dalla (6)) e la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente verso la funzione f in $X - B$. Esisterà quindi un n_ε tale che:

$$\int_{X-B} |f_n - f| \, d\mu < \varepsilon \quad \forall \; n > n_\varepsilon.$$

Essendo la $\mu B < \delta_\varepsilon$, la (6) implica

$$\int_B |f_n| \, d\mu < \varepsilon \quad \forall \; n$$

e, per il lemma di Fatou:

$$\int_B |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon \, .$$

Allora si ha

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \leqslant \int_{X-B} |f_n - f| \, d\mu + \int_B |f_n| \, d\mu + \int_B |f| \, d\mu < \int_{X-B} |f_n - f| \, d\mu + 2\varepsilon$$

da cui

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \leqslant 2\varepsilon$$

ossia la tesi.

Notiamo che se viene meno l'ipotesi $\mu X < \infty$ il risultato appena dimostrato è falso. Sia $X = \mathbb{R}$ munito della misura di Lebesgue. Sia $f_n(x) = \chi_{(n,2n)}(x)/n$. La successione $\{f_n\}$ è una successione di funzioni sommabili, che tende a zero uniformemente su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre ha gli integrali uniformemente assolutamente continui, dato che

$$\int_E |f_n| \, dx \leqslant m(E)$$

per ogni n. Però la (5) è falsa, dato che

$$\int_{\mathbb{R}} f_n dx = \frac{1}{n} \int_n^{2n} dx = 1 \not\to 0.$$

6 (Teorema di Vitali.) *Sia $\mu X < \infty$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni sommabili definite in X tale che $f_n \to f$ quasi ovunque, essendo f sommabile. Se la successione $\{f_n\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui, allora per ogni insieme $U \in \mathscr{B}$ risulta:*

$$\int_U f_n \, d\mu \ \to \ \int_U f \, d\mu \ .$$

È una conseguenza immediata del precedente risultato, non appena si osservi che

$$\left| \int_U f_n \, d\mu - \int_U f \, d\mu \right| \leqslant \int_U |f_n - f| \, d\mu \leqslant \int_X |f_n - f| \, d\mu \ .$$

Proponiamo al Lettore di dimostrare il teorema della convergenza dominata (nel caso di spazi di misura finita) come corollario del Teorema di Vitali.

Uno dei motivi di interesse del teorema di Vitali è che esso si può invertire; infatti sussiste il seguente teorema, che ci limitiamo ad enunciare (per una dim. cfr. G. Fichera, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, p. 350-353, dove si considera anche l'estensione dei teoremi 6 e 7 al caso di spazi di misura infinita);

7 *Sia $\mu X < \infty$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni sommabili definite in X tale che $f_n \to f$ quasi ovunque, essendo f sommabile. Se per ogni insieme $U \in \mathscr{B}$ risulta:*

$$\int_U f_n \, d\mu \ \to \ \int_U f \, d\mu \, ,$$

allora la successione $\{f_n\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui.

Concludiamo questa parte mostrando come il teorema di Vitali sia in effetti più generale del teorema della convergenza dominata (nel caso degli spazi di misura finita) producendo un esempio in cui non si può applicare quest'ultimo teorema.

Consideriamo

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \, \chi_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)}(x)$$

nell'intervallo $[0, 1]$ munito della misura di Lebesgue.

Sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di Vitali:

1. $[0,1]$ ha misura finita;
2. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad$ q. o. $x \in [0,1]$;
3. le funzioni f_n e la funzione limite $f = 0$ risultano sommabili;
4. la successione $\{f_n\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui.

Le condizioni 1-3 sono ovvie. Verifichiamo la 4. Dato $\varepsilon > 0$, sia n_ε un intero tale che

$$\log\left(1 + \frac{1}{n_\varepsilon}\right) < \varepsilon \tag{7}$$

e poniamo

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{n_\varepsilon + 1}. \tag{8}$$

Sia ora E un qualsiasi insieme misurabile contenuto in $[0,1]$ tale che

$$m(E) < \delta_\varepsilon. \tag{9}$$

Se $n \geqslant n_\varepsilon$, tenendo presente la (7), si ha

$$\int_E f_n(x)\,dx = \int_{E\cap\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)} \frac{dx}{x} \leqslant \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{x} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \log\left(1+\frac{1}{n_\varepsilon}\right) < \varepsilon.$$

Se, invece, $n < n_\varepsilon$ abbiamo

$$\int_E f_n(x)\,dx = \int_{E\cap\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)} \frac{dx}{x} \leqslant (n+1)\,m(E) \leqslant (n_\varepsilon+1)\,m(E) < \varepsilon$$

in virtù delle (8) e (9). Abbiamo quindi dimostrato che la successione $\{f_n\}$ ha gli integrali uniformemente assolutamente continui. Possiamo quindi applicare il teorema di Vitali per concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

In questo caso non possiamo applicare il teorema della convergenza dominata, in quanto se

$$|f_n(x)| \leqslant g(x)$$

q.o. in $[0,1]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dobbiamo avere anche

$$\frac{1}{x} \leqslant g(x)$$

q.o. in $[0,1]$ e quindi la g non può essere sommabile.