Un teorema sulle funzioni di ripartizione assolutamente continue

1. *Sia F una funzione di ripartizione di una v.a. X (ossia F soddisfa le condizioni a)-d) di p.98 del testo). Supponiamo, inolre, che $F \in C^0(\mathbb{R})$, esista $F'(x)$ per ogni $x \neq 0$, sia $F' \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e F' risulti integrabile in $\mathbb{R}$. Allora X è assolutamente continua con densità F', ossia*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dim. Sia $x < 0$. Grazie al teorema fondamentale del calcolo ed essendo la F di classe C^1 in $(-\infty, 0)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere

$$F(x) = \int_{-n}^{x} F'(t)dt + F(-n).$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{-n}^{x} F'(t)dt + F(-n) \right) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt + \cancel{F(-\infty)} = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt,$$

dato che $F(-\infty) = 0$. Essendo la funzione integrale di una funzione integrabile continua, ed essendolo anche la F per ipotesi, si ha

$$F(0) = \lim_{x\to 0^-} F(x) = \int_{-\infty}^{0} F'(t)dt \tag{2}$$

La (1) è quindi dimostrata per $x \leqslant 0$.

Sia ora $x > 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ - sempre per il teorema fondamentale del calcolo - abbiamo

$$F(x) = \int_{\varepsilon}^{x} F'(t)dt + F(\varepsilon).$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$, tenendo sempre conto del fatto che $F \in C^0(\mathbb{R})$,

$$F(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{x} F'(t)dt + F(\varepsilon) \right) = \int_{0}^{x} F'(t)dt + F(0).$$

Dalla (2) si trae

$$F(x) = \int_{0}^{x} F'(t)dt + \int_{-\infty}^{0} F'(t)dt = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt$$

e la (1) è dimostrata anche per $x > 0$. $\square$

Osserviamo che, con dimostrazione analoga, si trova il seguente risultato

2. *Sia F una funzione di ripartizione di una v.a. X. Supponiamo, inolre, che $F \in C^0(\mathbb{R})$, esista $F'(x)$ per ogni $x \neq x_1, \ldots, x_m$, sia $F' \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\})$ e F' risulti integrabile in $\mathbb{R}$. Allora X è assolutamente continua con densità F', ossia sussiste la* (1).