Un Lemma di Analisi Complessa

1 *Sia* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un aperto connesso e sia* f *una funzione olomorfa definita in* Ω*. Se* $|f|$ *è costante in* Ω*, allora anche* f *è costante.*

Dim. Sia $f = u + iv$. La condizione $|f| = c$ può scriversi nel modo seguente:

$$u^2 + v^2 = c^2 \,.$$

Essendo olomorfa, f è certamente derivabile; derivando rispetto a x e rispetto a y l'ultima uguaglianza scritta, otteniamo:

$$\begin{cases} u\,u_x + v\,v_x = 0 \\ u\,u_y + v\,v_y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

in Ω. D'altra parte, essendo f olomorfa, le funzioni u e v soddisfano il sistema di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ u_y + v_x = 0. \end{cases}$$

Possiamo quindi riscrivere il sistema (1) utilizzando solo le derivate della u:

$$\begin{cases} u\,u_x - v\,u_y = 0 \\ u\,u_y + v\,u_x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Possiamo pensare il sistema (2) come un sistema omogeneo di due equazioni nelle due incognite $u(x_0, y_0)$, $v(x_0, y_0)$. Il determinante del sistema è dato da:

$$|\nabla u(x_0, y_0)|^2 = u_x^2(x_0, y_0) + u_y^2(x_0, y_0).$$

Supponiamo $|\nabla u(x_0, y_0)| \neq 0$. Il sistema (2) ammette solo la soluzione banale e quindi dobbiamo avere $u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0) = 0$, ossia $f(z_0) = 0$. Si ha dunque $|f(z_0)| = 0$ e, dovendo essere $|f|$ costante in Ω, avremo $f \equiv 0$ in Ω.

Questo mostra che la tesi è vera se esiste un punto di Ω in cui $|\nabla u(x_0, y_0)| \neq 0$. Se questa condizione non è soddisfatta, vuol dire che $|\nabla u| \equiv 0$ in Ω. Per teoremi noti, essendo Ω connesso, u è una funzione a valori reali costante. Dal sistema di Cauchy-Riemann, vediamo subito che deve essere $\nabla v \equiv 0$ in Ω e dunque anche v è una funzione a valori reali costante, ossia la tesi.

$\square$