Il teorema di esistenza degli zeri

1 *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se*

$$f(a)f(b) < 0 \tag{1}$$

allora esiste almeno uno zero della funzione f in (a, b), ossia esiste un $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dim. La condizione (1) significa che la funzione f assume agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ valori di segno opposto, ossia o

$$f(a) > 0, \qquad f(b) < 0 \tag{2}$$

oppure

$$f(a) < 0, \qquad f(b) > 0. \tag{3}$$

Per fissare le idee, supponiamo che sussista la (2). Consideriamo l'insieme numerico E definito in questo modo:

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) > 0\}.$$

Ovviamente l'insieme E è non vuoto (almeno il punto a appartiene ad E). Inoltre è contenuto nell'intervallo $[a, b]$ ed è perciò un insieme limitato. Sia

$$x_0 = \sup E.$$

Avremo $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Inoltre x_0 soddisferà le due proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, ossia

$$x \leqslant x_0, \quad \forall\, x \in E \tag{4}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x_\varepsilon \in E \mid x_0 - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant x_0 \tag{5}$$

Dimostreremo che $f(x_0) = 0$ facendo vedere che non può essere né $f(x_0) > 0$, né $f(x_0) < 0$.

Supponiamo $f(x_0) > 0$. Essendo $f(b) < 0$, avremo $x_0 < b$. Il teorema della permanenza del segno ci assicura che esiste un intorno destro di x_0 in cui la f continua ad essere strettamente maggiore di 0, ossia esiste un $k > 0$ tale che

$$f(x) > 0, \qquad \forall\, x \in (x_0, x_0 + k).$$

Ricordando la definizione di E, questo vuol dire che esistono degli $x \in E$ maggiori di x_0. E questo contraddice la (4). Non può quindi essere $f(x_0) > 0$.

Supponiamo che sia $f(x_0) < 0$. Essendo $f(a) > 0$, il punto x_0 risulterà maggiore di a. Il teorema della permanenza del segno assicura l'esistenza di un intorno sinistro di x_0 nel quale la f risulta strettamente minore di 0, ossia esiste un $h > 0$ tale che

$$f(x) < 0, \quad \forall\, x \in (x_0 - h, x_0).$$

Ma questo contraddice la (5), perchè in base a questa dovrebbe esistere un punto x_h di E nell'intervallo $(x_0 - h, x_0)$, ossia un punto $x_h \in (x_0 - h, x_0)$ nel quale $f(x_h) > 0$. Non può quindi essere nemmeno $f(x_0) < 0$ e il teorema è dimostrato supponendo la (2).

Per ottenere la tesi nel caso sussista la (3), si ragiona in modo analogo o - più semplicemente - si applica quanto appena dimostrato alla funzione $-f$.

$\square$