Un teorema di esistenza di soluzioni per equazioni lineari.

Sia T una trasformazione lineare e continua da X in Y, essendo X ed Y due spazi normati. Per ogni elemento g del duale Y*, possiamo considerare g(Tx), che indicheremo al modo seguente:

(1) $$\langle g, Tx \rangle .$$

Per ogni fissato g in Y*, la (1) definisce una funzione di x. Tale funzione, che indichiamo con $F_g(x)$, risulta lineare; infatti:

$$F_g(ax+by) = \langle g, T(ax+by) \rangle = \langle g, aTx + bTy \rangle =$$
$$a \langle g, Tx \rangle + b \langle g, Ty \rangle = a\, F_g(x) + b\, F_g(y).$$

Inoltre $F_g(x)$ è continuo, essendo

$$|F_g(x)| = |\langle g, Tx \rangle| \le \|g\|\ \|Tx\| \le \|g\|\ \|T\|\ \|x\|.$$

Ad ogni g in Y* resta quindi associato, tramite la (1), un funzionale su X, ossia un elemento di X* che indicheremo con T*g. La corrispondenza così ottenuta $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ prende il nome di *operatore aggiunto di* T e gode della proprietà (evidente dalla definizione):

(2) $$\langle T^*g, x \rangle = \langle g, Tx \rangle$$

valida per ogni x in X e per ogni g in Y*. Verifichiamo che T* risulta un operatore lineare e continuo. La linearità segue facilmente dalla (2). Inoltre, essendo $|\langle T^*g, x \rangle| = |\langle g, Tx \rangle| \le \|g\|\ \|T\|\ \|x\|$, si ha $\|T^*g\| \le \|g\|\ \|T\|$, ossia T* è limitato con $\|T^*\| \le \|T\|$. Osserviamo, inoltre, che essendo $\|Tx\| = \sup |\langle g, Tx \rangle| = \sup |\langle T^*g, x \rangle| \le \|T^*g\|\ \|x\| \le \|T^*\|\ \|g\|\ \|x\| = \|T^*\|\ \|x\|$ (dove il sup è considerato al variare delle g in Y* con $\|g\|=1$), si ha $\|T\| \le \|T^*\|$ e quindi $\|T^*\| = \|T\|$.

Supponiamo ora di voler studiare l'equazione Tx=y, essendo y un elemento assegnato di Y. Una conseguenza del teorema di Hahn-Banach è il seguente importante teorema di esistenza:

Siano X *ed* Y *due spazi normati e* T *un operatore lineare e continuo da* X *in* Y. *Supponiamo che il codominio di* T, $\mathcal{R}(T)$, *sia chiuso in* Y. *Allora esiste una soluzione dell'equazione* Tx=y *(ossia* $y \in \mathcal{R}(T)$*) sse il dato* y *soddisfa le seguenti condizioni, dette di compatibilità:*

(3) $$\langle g, y \rangle = 0 \qquad \forall\, g \in \mathcal{N}(T^*)$$

($\mathcal{N}(T^*)$ è il nucleo di T*, ossia $\mathcal{N}(T^*) = \{g \in Y^* \mid T^*g=0\}$).

La necessità delle condizioni di compatibilità segue subito dalla (2). Supponiamo, viceversa, che valga la (3) e che, per assurdo, non esista una soluzione dell'equazione Tx=y, ossia che y non appartenga al $\mathcal{R}(T)$. Essendo $\mathcal{R}(T)$ chiuso, la distanza $d(y,\mathcal{R}(T))$ risulterà positiva. Per un corollario del teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale $g \in Y^*$ tale che $\langle g, Tx \rangle = 0$, $\forall\, x \in X$, ma $\langle g, y \rangle = 1$. D'altra parte, essendo $\langle g, Tx \rangle = \langle T^*g, x \rangle$, si dovrà avere $\langle T^*g, x \rangle = 0$, $\forall\, x \in X$, ossia $T^*g=0$. Quindi $g \in \mathcal{N}(T^*)$ e, per la (3), $\langle g, y \rangle = 1$ risulta assurdo.

Osserviamo che, nel caso $X=R^n$ ed $Y=R^m$, il teorema appena dimostrato non è altro che una diversa formulazione del teorema di Rouchè-Capelli (cfr. Picone-Fichera, Corso di Analisi Matematica, Vol.I, Ed. Veschi, Th. 3.XXI, p104-105).