Alcuni esercizi sulle funzioni di variabile complessa.

1. Determinare il campo di olomorfia delle seguenti funzioni:

$$f(z) = \frac{1}{e^{iz} + \cos z}\,; \quad f(z) = \frac{1}{e^z - 1}\,; \quad f(z) = \log(-1 + \sqrt{1 + z^3})$$

2. Sia $\{z_k\}$ una successione di numeri complessi ed esista un numero reale α tale che

$$(*) \qquad |\arg z_k| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2} \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ è convergente se e solo se la stessa serie risulta assolutamente convergente. Tale risultato è ancora vero se la condizione $(*)$ viene sostituita dalla seguente: $|\arg z_k| < \frac{\pi}{2}$, $(k = 1, 2, 3, \dots.)$?

3. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{+C} \frac{\zeta^2}{(5 + \zeta)(\zeta + i)}\, d\zeta\,, \qquad \int_{+C} \frac{\zeta^4}{(5 + \zeta^2)(\zeta - 3i)}\, d\zeta$$

dove $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$;

$$\int_{+\partial Q} \frac{\cos \zeta}{(\zeta - \pi)^k}\, d\zeta$$

al variare di k in $\mathbb{Z}$, essendo $Q = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathbb{R}\mathrm{e}\, z| \leqslant 4;\ |\mathbb{I}\mathrm{m}\, z| \leqslant 4\}$.

4. Sviluppare in serie di Taylor di punto iniziale $z_0 = 0$ le seguenti funzioni:

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)(z - i)}\,; \qquad f(z) = \frac{z^2}{(z - 1)(z - 2)^2}\,.$$

5. Sviluppare in serie di Laurent di punto iniziale $z_0 = 0$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)}$$

nel disco $|z| < 1$, nella corona circolare $1 < |z| < 2$ e nella corona circolare $|z| > 2$.

6. Studiare il tipo di singolarità al finito delle seguenti funzioni e, nel caso di singolarità isolate, calcolarne i residui:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}\,; \quad f(z) = \frac{1}{z^3}\,; \quad f(z) = \frac{1}{z^2-2z+2}\,; \quad f(z) = \frac{z^2}{1-\cos z}\,;$$
$$f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\,; \quad f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}\,; \quad f(z) = \frac{z^2}{\sin^2\frac{1}{z+1}}$$

7. Se $f(z)$ e $g(z)$ hanno entrambe un polo per $z = z_0$, segue, in generale, che $f(z)g(z)$ ha un polo nel punto z_0 ? Cosa si può dire della funzione $f(z)/g(z)$?

Se $f(z)$ e $g(z)$ hanno entrambe una singolarità essenziale per $z = z_0$, segue, in generale che $f(z)g(z)$ ha una singolarità essenziale in z_0 ?

8. Dimostrare che se $z = z_0$ è un polo per la funzione $f(z)$, allora la funzione $e^{f(z)}$ presenta una singolarità essenziale in z_0.

(Suggerimento: far vedere che esiste una semiretta tale che $\lim f(z)$ per z che tende a z_0 su questa semiretta è $+\infty$ e ne esiste un'altra sulla quale il limite è $-\infty$ . . .)

9. La funzione $f(z)$ abbia un polo di ordine m in z_0 ($m \geqslant 1$); detto R il residuo di $f(z)$ nel punto z_0, provare che risulta:

$$R = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]\,.$$

10. Siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni intere tali che $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Cosa implica ciò ?

11. Calcolare il seguente integrale, essendo $a \geqslant 0, b \geqslant 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,dx$$

12. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2}\,dx\ .$$

13. Sia $|a| < 1$; calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$$

(suggerimento: porre $z = e^{i\varphi}$).

14. Calcolare il seguente integrale, essendo $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 4$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}\, dx \ .$$

15. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4}\, dx \ .$$

16. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}\log x}{(1+x)^2}\, dx \ .$$