Il numero e.

Cominciamo con due lemmi

1 *Risulta*

$$2^{k-1} \leqslant k!, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Dim. La (1) è vera per $k = 1$, come si verifica immediatamente.

Dimostriamola in generale per induzione: supponiamo la (1) vera e dimostriamo che

$$2^k \leqslant (k+1)!\,. \tag{2}$$

Tenendo presente che $2 \leqslant k+1$ e applicando l'ipotesi induttiva (1), si trova

$$2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \leqslant 2\,k! \leqslant (k+1)\,k! = (k+1)!$$

e la (2) è dimostrata. □

Il prossimo lemma fornisce il valore della somma dei termini di una *progressione geometrica di ragione q*.

2 *Sia $q \in \mathbb{R}$. Risulta*

$$1 + q + \ldots + q^n \begin{cases} = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ = n+1 & \text{se } q = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Dim. Il caso $q = 1$ è ovvio. Supponiamo $q \neq 1$ e poniamo

$$S = 1 + q + \ldots + q^n.$$

Essendo

$$qS = q + \ldots q^n + q^{n+1},$$

risulta

$$(1-q)S = 1 - q^{n+1},$$

ossia la tesi (si noti che $1 - q \neq 0$). □

3 *La successione*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è convergente.

Dim. Dimostriamo dapprima che la successione $\{a_n\}$ è monotona (strettamente) crescente.

Per la formula del binomio di Newton, possiamo scrivere (per $n > 2$)

$$\begin{gathered} a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \\ 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \ldots \frac{n-k+1}{n} = \\ 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Si ha, quindi, anche

$$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right). \tag{5}$$

Essendo

$$1 - \frac{h}{n} < 1 - \frac{h}{n+1}, \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

il termine k-simo nella sommatoria nell'ultimo membro di (4) si maggiora con il termine k-simo della sommatoria (5) (per $k = 2, \ldots, n$) e dunque si ha

$$a_n < a_{n+1}.$$

Per il teorema di regolarità delle successioni monotone, esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

e coincide con

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n. \tag{6}$$

Per dimostrare che il limite è finito, osserviamo che dalla (4) segue

$$a_n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \tag{7}$$

da cui, ricordando la (1) e la (3),

$$a_n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) =$$

$$2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) = 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Ciò dimostra che l'estremo superiore (6) è minore o uguale a 3 e quindi che la successione $\{a_n\}$ è convergente. □

Il limite (l'esistenza del quale abbiamo appena dimostrato)

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

prende il nome di *numero di Nepero* e viene indicato con la lettera e.

Dalla dimostrazione segue anche la seguente stima

$$2 < e \leqslant 3.$$

Si può dimostrare che e è un numero irrazionale. Le sue prime cifre sono date da

$$e = 2.71828182845904523536028747135\ldots \; .$$

Concludiamo questa parte osservando che la disugualianza (7) implica, passando al limite,

$$e \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \, .$$

In effetti in questa relazione sussiste l'ugualianza:

4 *Si ha*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \, .$$

DIM. Si tratta di far vedere che la differenza tra a_n e la ridotta n-sima della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

tende a zero.

Ricordando la (4), risulta

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right]. \tag{8}$$

D'altra parte abbiamo

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant \frac{(k-1)^2}{n}, \qquad k = 2, 3, \dots n. \tag{9}$$

Per provare la (9) procediamo per induzione su k, dopo aver fissato n. Per $k = 2$ è vera, dato che

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Supponiamo che sia vera la (9). Tenendo presente che $0 \leqslant (1 - h/n) < 1$ per $h = 1, \dots, n$, abbiamo

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k}{n}\right) =$$
$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \frac{k}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant$$
$$\frac{(k-1)^2}{n} + \frac{k}{n} \leqslant \frac{k^2}{n}$$

(l'ultima disuguaglianza segue dall'osservare che $(k-1)^2 + k = k^2 - 2k + 1 + k = k^2 - k + 1 \leqslant k^2 \iff k \geqslant 1$), ossia la (9) è vera per $k + 1$.

Dalla (8) si ottiene

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - a_n \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^2}{k!} < \frac{C}{n} \tag{10}$$

dove

$$C = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)^2}{k!}$$

(la convergenza di questa serie può essere provata con il criterio del rapporto).

La (10) implica che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - a_n \right) = 0$$

e quindi la tesi, dato che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - a_n \right) + \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = e.$$

□