Una disuguaglianza

Lemma. *Dati due numeri* a, b *non negativi e un intero* $k \geqslant 1$, *sussiste la disuguaglianza*

$$(a+b)^k \leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k)\,. \tag{1}$$

La costante 2^{k-1} *è ottimale.*

Dim. Se $a=b=0$ la (1) è ovvia. Supponiamo che a o b sia maggiore di zero. Per fissare le idee, supponiamo $b>0$ e fissiamolo. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{(x+b)^k}{x^k+b^k}$$

per $x \geqslant 0$. Calcoliamone la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{k(x+b)^{k-1}\left(x^k+b^k\right) - kx^{k-1}(x+b)^k}{\left(x^k+b^k\right)^2}\,.$$

Il numeratore si può scrivere come

$$\begin{aligned} &k(x+b)^{k-1}\left[x^k+b^k-x^{k-1}(x+b)\right] \\ &= k(x+b)^{k-1}\left[\cancel{x^k}+b^k-\cancel{x^k}-x^{k-1}b\right] = k(x+b)^{k-1}b\left[b^{k-1}-x^{k-1}\right]. \end{aligned}$$

Si ha $f'(x) \geqslant 0$ per $0 \leqslant x \leqslant b$ e $f'(x) < 0$ per $x > b$. La funzione f ha quindi un massimo nel punto $x=b$ e dunque

$$f(x) \leqslant f(b) = \frac{(2b)^k}{2b^k} = 2^{k-1}$$

ossia la (1).

Essendo 2^{k-1} il massimo di f in $[0,+\infty)$, la costante 2^{k-1} è ottimale, cosa del resto evidente dal fatto che per $a=b=1$ sussiste l'uguaglianza nella (1). $\square$