Sulla differenziabilità di una funzione di una variabile reale

Sia f una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$. Sia x_0 un punto interno di questo intervallo, ossia $x_0 \in (a, b)$. Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste una costante m tale che, in un intorno di x_0, si ha

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) \tag{1}$$

dove

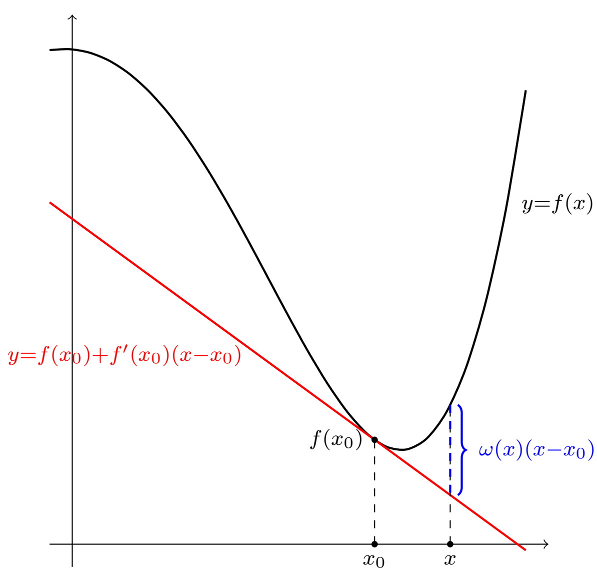
$$\lim_{x \to x_o} \omega(x) = 0. \tag{2}$$

Essendo

$$y = f(x_0) + m(x - x_0) \tag{3}$$

l'equazione di una retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ del grafico di f, le condizioni (1)-(2) significano che la differenza tra il valore $f(x)$ e il valore assunto in x dalla funzione lineare (3) tende a 0 - quando $x \to x_0$ - più rapidamente della differenza $x - x_0$. In linguaggio più tecnico, possiamo esprimere la cosa dicendo che questa differenza risulta essere un infinitesimo di ordine superiore al primo.

Come vedremo, una retta con questa proprietà non può che essere la retta tangente al grafico e anzi, si ha che esiste una retta soddisfacente (1)-(2) se e solo se il grafico ammette la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$.



Infatti si ha il seguente teorema:

Teorema 1 *La funzione f, definita e continua in $[a,b]$, risulta differenziabile nel punto $x_0 \in (a,b)$ se, e solo se, f è derivabile in x_0.*

Dim. Supponiamo che la f sia derivabile in x_0. Questo significa che esiste finito il

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0). \tag{4}$$

Poniamo

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

Con questa definizione di ω sussiste evidentemente la (1), mentre la (2) segue subito dalla (4). Abbiamo quindi dimostrato che la f è differenziabile e che, come costante m nella (1), possiamo prendere $f'(x_0)$. In termini geometrici, abbiamo fatto vedere che se esiste la retta tangente al grafico, questa retta soddisfa (1)-(2).

Viceversa, supponiamo che la f sia differenziabile, ossia che esista una costante m tale che valgono (1)-(2). Possiamo allora scrivere

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m = \omega(x)$$

per $x \neq x_0$. La (2) mostra che esiste il seguente limite e si ha

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m\right] = 0,$$

ossia

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m.$$

Questo significa che la f è derivabile in x_0. In termini geometrici, abbiamo fatto vedere che dalla differenziabilità di f segue l'esistenza della retta tangente e che questa è proprio la retta che appare nella (1). □

La quantità $f'(x_0)(x-x_0)$ prende il nome di *differenziale* della funzione $y = f(x)$ e si indica con il simbolo df. Se poniamo $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$, possiamo riscrivere la (1) nel modo seguente

$$\Delta f = df + \omega \Delta x$$

dove il differenziale è dato da

$$df = f'(x_0)\Delta x.$$

Applicando quest'ultima formula alla funzione $f(x) = x$, otteniamo

$$dx = \Delta x$$

e quindi, in generale, possiamo scrivere

$$df = f'(x)dx.$$

Questo giustifica la *notazione differenziale* della derivata, ossia la notazione nella quale la derivata viene vista come rapporto di differenziali:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}\,.$$

Osserviamo, infine, che il fatto che la differenza $\Delta f - df$ sia un infinitesimo di ordine superiore al primo, significa - detto in modo poco rigoroso - che questa differenza è "molto piccola" se l'incremento Δx è "piccolo". Quindi, per Δx "piccolo", possiamo sostituire all'incremento della funzione f il suo differenziale, ossia l'incremento della tangente al grafico della funzione, corrispondente allo stesso incremento Δx, commettendo così un errore trascurabile. In altri termini, nelle vicinanze del punto x possiamo sostituire alla funzione f la sua tangente (cfr. la figura a p.1).