1 Alcuni criteri di convergenza per serie a termini non negativi

1 (Criterio del rapporto.) *Considériamo la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1.1}$$

a termini positivi (ossia $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$). Supponiamo che esista il seguente limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \tag{1.2}$$

che indichiamo con λ ($0 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$).

1. *Se $0 \leqslant \lambda < 1$, la serie (1.1) converge.*

2. *Se $\lambda > 1$ la serie (1.1) diverge positivamente.*

DIM. **1.** Per ipotesi, dato comunque un $\varepsilon > 0$, esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \lambda + \varepsilon \tag{1.3}$$

per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$. Essendo $\lambda < 1$, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ in modo tale che $\lambda + \varepsilon < 1$. Fissiamo un ε siffatto e poniamo $\sigma = \lambda + \varepsilon$. Avremo

$$a_{k+1} < \sigma\, a_k \tag{1.4}$$

per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$.

Supponiamo per un momento che sia $k_\varepsilon = 1$. Questo significa che la (1.4) vale per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi possiamo scrivere

$$a_k < \sigma\, a_{k-1} < \sigma^2 a_{k-2} < \ldots < \sigma^{k-1} a_1.$$

Essendo $\sigma < 1$, la serie geometrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{k-1}$$

converge e un'applicazione del criterio del confronto dimostra che la (1.1) converge.

Se $k_\varepsilon > 1$, consideriamo la serie resto

$$\sum_{k=k_\varepsilon}^{\infty} a_k \tag{1.5}$$

Per questa serie la (1.4) sussiste per ogni k e quindi, per quello che abbiamo appena dimostrato, converge. D'altra parte è noto che le serie (1.5) e (1.1) hanno lo stesso carattere (non la stessa somma, in genere !) e quindi anche la (1.1) converge.

2. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che la (1.3) sussiste per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$. Essendo $\lambda > 1$, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ in modo tale che $\lambda - \varepsilon > 1$. Fissiamo un ε siffatto e poniamo $\sigma = \lambda - \varepsilon$. Avremo

$$a_{k+1} > \sigma\, a_k$$

per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$.

Se $k_\varepsilon = 1$, possiamo scrivere

$$a_k > \sigma\, a_{k-1} > \sigma^2 a_{k-2} > \ldots > \sigma^{k-1} a_1$$

ed essendo $\sigma > 1$, risulta

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^{k-1} = +\infty$$

e dunque

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty. \tag{1.6}$$

Poiché la successione $\{a_k\}$ non è infinitesima, la serie (1.1) non può convergere e quindi, essendo la serie a termini positivi, diverge positivamente.

Se $k_\varepsilon > 1$, basta considerare la serie (1.5). $\square$

Osservazione 1 Se esiste il limite (1.2) ed è uguale a 1, in generale non si può dire niente. Consideriamo, per esempio, le due serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\,.$$

Essendo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{\frac{1}{k(k+1)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+2} = 1,$$

per entrambe le serie si ha $\lambda = 1$, pur avendo le due serie un diverso carattere: la prima diverge, mentre la seconda converge (ha somma uguale a 1) [(1)].

2 (Criterio della radice.) *Sia (1.1) una serie a termini non negativi:* $a_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$. *Supponiamo che esista il seguente limite*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \tag{1.7}$$

che indichiamo con λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant +\infty)$.

1. *Se* $0 \leqslant \lambda < 1$, *la serie (1.1) converge.*
2. *Se* $\lambda > 1$ *la serie (1.1) diverge positivamente.*

DIM. **1.** Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\lambda - \varepsilon < \sqrt[k]{a_k} < \lambda + \varepsilon \tag{1.8}$$

per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$. Scegliamo un $\varepsilon > 0$ in modo tale che $\sigma = \lambda + \varepsilon < 1$.

Dalla (1.8) segue che

$$a_k < \sigma^k$$

per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$. Essendo $0 < \sigma < 1$, la serie geometrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k$$

converge, e quindi, per il criterio del confronto, converge anche la (1.1).

2. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che la (1.8) sussiste per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$. Scegliamo un $\varepsilon > 0$ in modo tale che $\sigma = \lambda - \varepsilon > 1$.

[(1)] La prima serie è la *serie armonica* ed è noto che essa diverge. La convergenza della seconda si ottiene osservando che, essendo

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \;\to\; 1.$$

Abbiamo

$$a_k > \sigma^k$$

per ogni $k \geqslant k_\varepsilon$. Essendo $\sigma > 1$, deve aversi la (1.6) e la (1.1) diverge. $\square$

Osservazione 2 Gli stessi esempi riportati nell'Osservazione 1 mostrano che, anche per il criterio della radice, non si può dire nulla in generale nel caso in cui il limite (1.7) esiste ed è uguale a 1 [(2)].

3 *Siano*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1.9}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{1.10}$$

due serie a termini non negativi: $a_k \geqslant 0$, $b_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Supponiamo che esista* $0 < l < +\infty$ *tale che*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l\,. \tag{1.11}$$

Allora le serie (1.9) e (1.10) presentano lo stesso carattere, ossia la serie (1.9) converge (diverge) se e solo se la serie (1.10) converge (diverge).

Dim. Sia ε tale che $0 < \varepsilon < l$. Per la (1.11) esiste un k_ε tale che

$$l - \varepsilon \leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant l + \varepsilon, \qquad \forall\ k > k_\varepsilon,$$

ossia

$$(l-\varepsilon)\, b_k \leqslant a_k \leqslant (l+\varepsilon)\, b_k, \qquad \forall\ k > k_\varepsilon.$$

Un'applicazione del criterio del confronto completa la dimostrazione. $\square$

[(2)]Si ricordi che

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1.$$

Osservazione 3 Ricordiamo che se le due successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono entrambe infinitesime e sussiste la (1.11), si dice che le due successioni sono *infinitesimi dello stesso ordine.*

Osservazione 4 Si noti che la dimostrazione del Teorema 3 mostra che la tesi è ancora vera se esistono due costanti positive $H, K > 0$ tali che

$$H\, b_k \leqslant a_k \leqslant K\, b_k$$

definitivamente.

Ricordiamo che una successione di numeri reali $\{\alpha_k\}$ è un infinitesimo di ordine α (essendo $\alpha > 0$) se accade che

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{1/k^\alpha} \right| = l$$

con $0 < l < +\infty$.

4 (Criterio dell'ordine di infinitesimo.) *Sia (1.9) una serie a termini non negativi: $a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Supponiamo che $\{a_k\}$ sia una successione infinitesima di ordine α. Allora*

1. *se $\alpha > 1$ la serie (1.9) converge.*
2. *Se $0 < \alpha \leqslant 1$ la serie (1.9) diverge positivamente.*

DIM. In virtù del Teorema 3, la serie (1.9) e la serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

presentano lo stesso carattere (cfr. anche Osservazione 3). La tesi si ottiene ricordando che la serie armonica generalizzata converge se e solo se $\alpha > 1$. $\square$

2 Un criterio di convergenza semplice

5 (Criterio di Leibniz.) *Sia* $\{a_k\}$ *una successione di numeri reali non crescente e infinitesima, ossia tale che*

$$a_{k+1} \leqslant a_k, \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

La serie a termini di segno alterno

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

converge semplicemente.

DIM. *Omessa.* □

Osservazione 5 Si noti che, sotto le ipotesi del Criterio di Leibniz, nulla si può dire sulla convergenza assoluta. Si considerino, ad esempio, le due seguenti serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Entrambe convergono semplicemente per il Criterio di Leibniz, dato che $\frac{1}{k} \searrow 0$, $\frac{1}{k^2} \searrow 0$.

D'altra parte la prima diverge assolutamente, mentre la seconda converge assolutamente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty\,; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty\,.$$

3 Alcuni criteri di convergenza assoluta

Sia

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{3.1}$$

una serie a termini di segno qualsiasi. Ricordiamo che la (3.1) converge assolutamente se converge la serie seguente

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,. \tag{3.2}$$

Applicando alla serie (3.2) i criteri dimostrati nel precedente paragrafo, si ottengono immediatamente i seguenti criteri di convergenza assoluta.

6 (Criterio del rapporto.) *Sia (3.1) una serie a termini non nulli (ossia* $a_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$*). Supponiamo che esista il seguente limite*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

che indichiamo con λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant +\infty)$.

1. *Se* $0 \leqslant \lambda < 1$, *la serie (3.1) converge assolutamente.*

2. *Se* $\lambda > 1$ *la serie (3.1) diverge assolutamente.*

7 (Criterio della radice.) *Sia (3.1) una serie a termini di segno qualsiasi. Supponiamo che esista il seguente limite*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

che indichiamo con λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant +\infty)$.

1. *Se* $0 \leqslant \lambda < 1$, *la serie (3.1) converge assolutamente.*

2. *Se* $\lambda > 1$ *la serie (3.1) diverge assolutamente.*

8 (Criterio dell'ordine di infinitesimo.) *Sia (3.1) una serie a termini di segno qualsiasi. Supponiamo che* $\{a_k\}$ *sia una successione infinitesima di ordine* α. *Allora*

1. *se* $\alpha > 1$ *la serie (1.9) converge assolutamente.*

2. *Se* $0 < \alpha \leqslant 1$ *la serie (1.9) diverge assolutamente.*

Osservazione 6 Si noti che mentre la convergenza assoluta di una serie implica la sua convergenza semplice, la divergenza assoluta non impedisce alla serie di convergere semplicemente (cfr. l'Osservazione 5).