A. Cialdea

Una Introduzione alla Teoria delle Equazioni alle Derivate Parziali

Corso di Analisi Superiore

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi della Basilicata

2002

Indice

Capitolo I
Le equazioni alle derivate parziali quasi-lineari del primo ordine.

1 Un teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy.

Consideriamo un'equazione differenziale alle derivate parziali *quasi-lineare del primo ordine*, ossia un'equazione del tipo

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)\ . \tag{I.1.1}$$

Supporremo le funzioni a, b, c di classe $C^1(I\!R^3)$. Il problema di Cauchy per l'equazione (I.1.1) è il seguente; assegnata una curva regolare del piano di equazione

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s) \qquad s \in [\alpha, \beta]$$

ed una funzione $u_0 \in C^1([\alpha, \beta])$, si cerca una soluzione $u(x,y)$ di detta equazione tale che

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s) \qquad s \in [\alpha, \beta] \tag{I.1.2}$$

ossia si cerca una superficie $z = u(x,y)$ la quale passi per la curva dello spazio assegnata:

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = u_0(s) \qquad s \in [\alpha, \beta]\ .$$

La curva del piano $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$ ($s \in [a, b]$) è detta *curva portante i dati.*

Le soluzioni $\{x(t),\, y(t),\, z(t)\}$ del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x,y,z) \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x,y,z) \\ \dfrac{dz}{dt} = c(x,y,z) \end{cases} \tag{I.1.3}$$

sono dette *curve caratteristiche* dell'equazione quasi-lineare (I.1.1). Osserviamo che, in base al teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni del problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie, fissato un punto dello spazio $(x_0,\, y_0,\, z_0)$, esiste ed è unica la curva caratteristica passante per tale punto. Una proprietà meno ovvia è che se una superficie integrale contiene il punto $(x_0,\, y_0,\, z_0)$, allora contiene tutta la curva caratteristica passante per tale punto. Infatti si ha il seguente risultato:

I.1 *Sia $z = u(x, y)$ una superficie Σ soluzione di (I.1.1). Sia (x_0, y_0, z_0) un punto di Σ e γ la curva caratteristica passante per tale punto. Allora $\gamma \subset \Sigma$.*

Consideriamo la soluzione $\{x(t), y(t)\}$ del sistema

$$x' = a(x, y, u(x, y)), \quad y' = b(x, y, u(x, y))$$

con la condizione iniziale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. La corrispondente curva γ':

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = u(x(t), y(t)) \tag{I.1.4}$$

è tale che

$$\frac{dz}{dt} = u_x x' + u_y y' = a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) = c(x, y, z) \; .$$

γ' risulta quindi una curva caratteristica passante per il punto (x_0, y_0, z_0). Essendoci una sola di tali curve, si ha $\gamma' = \gamma$. È ovvio, inoltre, da (I.1.4) che γ' è contenuta in Σ e quindi $\gamma \subset \Sigma$.

I.2 *Consideriamo il problema di Cauchy (I.1.1), (I.1.2). Supponiamo inoltre che il problema sia non-caratteristico, ossia che*

$$y_0'(s)\, a(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) - x_0'(s)\, b(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) \neq 0$$

in $[\alpha, \beta]$. Allora esiste ed è unica in un intorno della curva portante i dati la soluzione $z = u(x, y)$ del problema di Cauchy.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie (I.1.3). Per ogni fissato $s \in [\alpha, \beta]$, indichiamo con $\{x(s, t), y(s, t), z(s, t)\}$ la soluzione di tale sistema (esistente per t appartenente ad un intorno di 0) verificante la condizione iniziale

$$x(s, 0) = x_0(s), \quad y(s, 0) = y_0(s), \quad z(s, 0) = u_0(s)$$

Essendo per ipotesi

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\Big|_{t=0} = (x_s y_t - x_t y_s)|_{t=0} = b\, x_0' - a\, y_0' \neq 0 \; ,$$

possiamo invertire il sistema $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ in un intorno J della curva portante i dati, ottenendo così le funzioni $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$. Sia ora

$$u(x, y) = z(s(x, y), t(x, y)) \; . \tag{I.1.5}$$

Tale funzione è la soluzione cercata. Infatti:

$$u(x_0(s),\, y_0(s)) = u(x(s,0), y(s,0)) = z(s,0) = u_0(s)\ .$$

Inoltre

$$au_x + bu_y = a(z_s s_x + z_t t_x) + b(z_s s_y + z_t t_y) = z_s(as_x + bs_y) + z_t(at_x + bt_y) =$$
$$z_s(s_x x_t + s_y y_t) + z_t(t_x x_t + t_y y_t) = z_s \frac{\partial s}{\partial t} + z_t \frac{\partial t}{\partial t} = z_t = c\ .$$

Dimostriamo ora l'unicità; sia $\tilde{u}(x,y)$ un'altra soluzione dello stesso problema definita nell'intorno $\tilde{J}$ della curva portante i dati; indichiamo con $\tilde{\Sigma}$ la superficie $z = \tilde{u}(x,y)$ e consideriamo un punto (x', y') appartenente a $J \cap \tilde{J}$; sia γ' la curva caratteristica:

$$x = x(s', t), \quad y = y(s', t), \quad z = z(s', t),$$

dove $s' = s(x', y')$. La curva γ' passa per il punto

$$x(s', 0) = x_0(s'), \quad y(s', 0) = y_0(s'), \quad z(s', 0) = u_0(s')$$

il quale, risolvendo $\tilde{u}$ il problema di Cauchy in esame, appartiene a $\tilde{\Sigma}$. Per il lemma precedente $\gamma' \subset \tilde{\Sigma}$. In particolare, posto $t' = t(x', y')$, il punto di γ':

$$(x(s', t'),\, y(s', t'),\, z(s', t'))$$

appartiene a $\tilde{\Sigma}$ e quindi:

$$\tilde{u}(x', y') = \tilde{u}(x(s', t'),\, y(s', t')) = z(s', t')$$

ed essendo $z(s', t') = z(s(x', y'),\, t(x', y')) = u(x', y')$ (per la (I.1.5)), risulta provato che

$$\tilde{u}(x', y') = u(x', y')$$

ossia l'unicità.

Osservazione 1. Durante la dimostrazione del teorema abbiamo usato il fatto che le funzioni $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$ risultano derivabili non solo rispetto alla variabile t, ma anche rispetto alla variabile s. Ciò è lecito in base al seguente teorema, che enunciamo e dimostriamo - per semplicità - nel caso di un'equazione scalare, ma che sussiste inalterato nel caso dei sistemi.

I.3 *Sia $f(t,y)$ tale che esiste la $f_y(t,y)$ e risulta $f,\, f_y \in C^0(A \times B)$, dove A, B sono intervalli aperti; indichiamo con $y(s,t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(s,0) = y_0(s) \end{cases} \tag{I.1.6}$$

dove $y_0(s)$ è una funzione assegnata di $C^1[\alpha,\beta]$ il cui codominio è contenuto in B. Allora esiste ed è continua la $\dfrac{\partial}{\partial s} y(s,t)$.

Sia $I \times J$ un intervallo compatto con $I = [-a, a] \subset A$ e $J \subset B$; supponiamo inoltre che l'insieme $\{y_0(s) \mid s \in [\alpha, \beta]\}$ sia contenuto all'interno di B e che $I \times J$ sia tale che, per ogni s, la soluzione del relativo problema di Cauchy (I.1.6) esiste in tutto I ed ha il grafico contenuto in $I \times J$ [1].

Come è noto $y(s, t)$ è caratterizzata dall'equazione integrale

$$y(s, t) = y_0(s) + \int_0^t f(u, y(s, u))\, du \, . \tag{I.1.7}$$

Se la funzione $y(s, t)$ fosse derivabile rispetto alla s, avremmo necessariamente

$$\frac{\partial}{\partial s} y(s, t) = y_0'(s) + \int_0^t f_y(u, y(s, u))\, \frac{\partial}{\partial s} y(s, u)\, du \ ;$$

quindi, fissato s ed indicata con $g(t)$ la derivata parziale della $y(s, t)$ rispetto alla s, la funzione $g(t)$ sarebbe la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} g'(t) = f_y(t, y(s, t))\, g(t) \\ g(0) = y_0'(s) \end{cases} \qquad . \tag{I.1.8}$$

Per dimostrare che la derivata in questione esiste, faremo vedere che il limite del relativo rapporto incrementale coincide con la soluzione del problema (I.1.8), l'esistenza e l'unicità della quale è ben nota.

Posto $L = \max_{I\times J} |f_y|$, dalla (I.1.7) risulta

$$\left| \frac{y(s + \Delta s, t) - y(s, t)}{\Delta s} \right| =$$

$$\left| \frac{y_0(s + \Delta s) - y_0(s)}{\Delta s} + \int_0^t \left[\frac{f(u, y(s + \Delta s, u)) - f(u, y(s, u))}{\Delta s} \right] du \right| \leq$$

$$\left| \frac{y_0(s + \Delta s) - y_0(s)}{\Delta s} \right| + L \left| \int_0^t \left| \frac{y(s + \Delta s, u) - y(s, u)}{\Delta s} \right| du \right| \ .$$

[1] Che esista un tale intervallo $I \times J$ segue dalla dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie. Basta infatti procedere al modo seguente: siano a e b tali che il compatto

$$|t| \leq a, \quad \min_{s\in[\alpha,\beta]} y_0(s) - b \leq y \leq \max_{s\in[\alpha,\beta]} y_0(s) + b \ ,$$

che indicheremo con $I' \times J$, sia contenuto in $A \times B$. Sia inoltre

$$a = \min\left(a', \frac{b}{M}\right)$$

dove $M = \max_{I'\times J} |f|$. L'intervallo cercato sarà dato da $[-a, a] \times J$. Posto S uguale all'insieme delle funzioni continue definite in $[-a, a]$ a valori in J, si dimostra l'esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy in S; basta ripetere, ad esempio, parola per parola la dimostrazione contenuta nel Picone-Fichera, Corso di Analisi Matematica, Vol. II, p.303–306.

Per il lemma di Peano-Gronwall, si ha

$$\left|\frac{y(s+\Delta s,t)-y(s,t)}{\Delta s}\right| \le \left|\frac{y_0(s+\Delta s)-y_0(s)}{\Delta s}\right| \ e^{L|t|}$$

da cui, essendo la y_0 derivabile e indicato con ϑ un opportuno numero in $(0,1)$, segue:

$$\left|\frac{y(s+\Delta s,t)-y(s,t)}{\Delta s}\right| \le |y_0'(s+\vartheta\Delta s)| \ e^{L|t|} \le C \ e^{L|t|} \tag{I.1.9}$$

(essendo $C = \max_{[\alpha,\beta]} |y_0'|$). Ciò dimostra la limitatezza dei rapporti incrementali a primo membro.

Si ha

$$\frac{y(s+\Delta s,t)-y(s,t)}{\Delta s} - g(t) = \frac{y_0(s+\Delta s)-y_0(s)}{\Delta s} - y_0'(s) +$$
$$\int_0^t \left\{\frac{f(u,y(s+\Delta s,u))-f(u,y(s,u))}{\Delta s} - f_y(u,y(s,u))\,g(u)\right\} du =$$
$$\frac{\Delta y_0}{\Delta s} - y_0'(s) +$$
$$\int_0^t \left\{\frac{f(u,y(s+\Delta s,u))-f(u,y(s,u))}{\Delta s} - f_y(u,y(s,u))\,\frac{y(s+\Delta s,u)-y(s)}{\Delta s}\right\} du +$$
$$\int_0^t f_y(u,y(s,u))\left\{\frac{y(s+\Delta s,u)-y(s)}{\Delta s} - g(u)\right\} du =$$
$$\frac{\Delta y_0}{\Delta s} - y_0'(s) + \int_0^t \{f_y(u,y^*) - f_y(u,y(s,u))\}\,\frac{y(s+\Delta s,u)-y(s)}{\Delta s}\,du +$$
$$\int_0^t f_y(u,y(s,u))\left\{\frac{y(s+\Delta s,u)-y(s)}{\Delta s} - g(u)\right\} du$$

dove $y^* = y(s,u) + \vartheta[y(s+\Delta s,u) - y(s,u)]$, $(\vartheta \in (0,1))$.

Tenendo presente la (I.1.9), possiamo scrivere

$$\left|\frac{y(s+\Delta s,t)-y(s,t)}{\Delta s} - g(t)\right| \le$$
$$\left|\frac{\Delta y_0}{\Delta s} - y_0'(s)\right| + \max_{u\in[a,t]} |f_y(u,y^*) - f_y(u,y(s,u))|\,|t|\ Ce^{L|t|} +$$
$$L\left|\int_0^t \left|\frac{y(s+\Delta s,u)-y(s,u)}{\Delta s} - g(u)\right| du\right| \ .$$

Il lemma di Peano-Gronwall implica

$$\left|\frac{y(s+\Delta s,t)-y(s,t)}{\Delta s}-g(t)\right|\leq$$
$$\left\{\left|\frac{\Delta y_0}{\Delta s}-y_0'(s)\right|+\max_{|u|\leq|t|}|f_y(u,y^*)-f_y(u,y(s,u))|\,|t|\,Ce^{L|t|}\right\}e^{L|t|}$$

e quindi la tesi, dato che

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta y_0}{\Delta s}-y_0'(s)\right|=0\ ,$$
$$\lim_{\Delta s\to 0}\max_{|u|\leq|t|}|f_y(u,y^*)-f_y(u,y(s,u))|=0$$

(si tenga conto del fatto che $y^*\to y(s,u)$ e della uniforme continuità di f_y in $I\times J$).

Osservazione 2. La dimostrazione del Teorema I.2 fornisce un metodo per cercare la soluzione del problema di Cauchy. Come esempio consideriamo l'equazione quasi-lineare

$$x^2u_x+y^2u_y=u^2$$

con la condizione

$$u(s,-s)=s^2\qquad s\in[1,2]\ .$$

Si tratta di un problema di Cauchy non caratteristico, dato che, essendo $x_0(s)=s,\ y_0(s)=-s$, risulta

$$ay_0'-bx_0'=-x^2-y^2=-2s^2\neq 0,\qquad\forall\ s\in[1,2]\ .$$

La soluzione del problema di Cauchy per il sistema di equazioni differenziali seguente:

$$\begin{cases}x'=x^2,\ y'=y^2,\ z'=z^2\\ x(s,0)=s,\ y(s,0)=-s,\ z(s,0)=s^2\end{cases}$$

è, come si trova facilmente,

$$x(s,t)=-\frac{1}{t-\frac{1}{s}},\quad y(s,t)=-\frac{1}{t+\frac{1}{s}},\quad z(s,t)=-\frac{1}{t-\frac{1}{s^2}}\ .$$

Essendo quindi

$$t-\frac{1}{s}=-\frac{1}{x},\quad t+\frac{1}{s}=-\frac{1}{y}$$

si ricava

$$2t=-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{x+y}{xy},\quad \frac{2}{s}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}$$

ossia

$$t(x,y) = -\frac{x+y}{2xy}, \quad s(x,y) = \frac{2xy}{y-x} \ .$$

La soluzione cercata è dunque

$$u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y)) = \frac{1}{\frac{x+y}{2xy} + \frac{(y-x)^2}{4x^2y^2}} = \frac{4x^2y^2}{2xy(x+y) + (y-x)^2} \ .$$

Come altro esempio si consideri l'equazione

$$uu_x + u_y = 1$$

con la condizione

$$u(s,s) = \frac{s}{2} \qquad s \in [0,1] \ .$$

Procedendo in modo analogo a prima si trova

$$u(x,y) = \frac{4y - 2x - y^2}{2(2-y)}$$

(per i dettagli, vedi F. John, Partial Differential Equations, Springer-Verlag, p.14-15).

Osservazione 3. Il teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy per un'equazione differenziale alle derivate parziali sussiste anche per equazioni più generali della forma

$$f(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

(ovviamente sotto opportune ipotesi); la teoria, pur basandosi sempre su quella dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, diventa notevolmente più complicata. L'enunciato preciso del teorema di esistenza ed unicità e la relativa dimostrazione può essere trovata sul già citato libro di F. John alle p.15–47 (in particolare il teorema di p.29).

Osservazione 4. Un teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy relativo ad equazioni differenziali alle derivate parziali di ordine superiore, in generale, **non** può sussistere, anche per equazioni lineari. Consideriamo, infatti, il seguente problema di Cauchy per l'equazione di Laplace: sia $\gamma = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$ la curva portante i dati; cerchiamo in un intorno di γ una soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0$$

soddisfacente su γ la condizione di Cauchy:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) & -1 \leq x \leq 1 \\ u_y(x,0) = 0 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dove

$$f(x) \begin{cases} = e^{-\frac{1}{x^2}} & x \in [-1,0) \cup (0,+1] \\ = 0 & x = 0 \end{cases} .$$

Essendo, come vedremo, le funzioni armoniche analitiche (cfr. Cap. IV, § 3), se esistesse una soluzione di questo problema in un intorno di γ, la $u(x,0)$ dovrebbe necessariamente essere una funzione analitica della x; ma il dato $f(x)$, pur essendo C^∞, non lo è, e quindi non esiste alcuna soluzione. Si badi che qui non è un problema di curve caratteristiche, perché l'equazione di Laplace non ammette caratteristiche (reali) e, comunque, esempi analoghi si possono fare su curve analitiche qualsiasi.

Lo stesso fenomeno si presenta per i sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali, anche del primo ordine. Si prenda, ad esempio, il sistema di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, e si consideri un problema di Cauchy analogo a quello appena visto per l'equazione di Laplace.

Se tuttavia "è tutto analitico" (equazione, curva e dati), allora il celebre teorema di Cauchy-Kowalewsky, del quale ci occuperemo tra poco, assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione per il problema di Cauchy non caratteristico.

Capitolo II
Serie multiple e funzioni analitiche di più variabili reali.

1 Serie multiple numeriche.

Indicato con k un multi-indice, cioè a dire una n-pla ordinata di numeri interi non negativi $k_1, \ldots, k_n$, e denotata con $|k|$ la sua *lunghezza*

$$|k| = k_1 + \ldots + k_n ,$$

supponiamo che ad ogni multi-indice k corrisponda un numero reale a_k. Il simbolo

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k = \sum_{k_1,\ldots,k_n}^{0,\infty} a_{k_1 \ldots k_n} \tag{II.1.1}$$

si chiama *serie multipla* o *serie n-pla* e i numeri a_k *termini* della serie. Ma qual'è il significato di questo simbolo ? Per rispondere a questa domanda, ricordiamo alcune nozioni relative agli insiemi quasi-ordinati.

L'insieme U è detto un *insieme quasi-ordinato* se è data una legge la quale associa ad ogni elemento $u \in U$ un sottoinsieme $[u]$ di U (che sarà detta insieme degli elementi seguenti u) che soddisfa le due proprietà:

i) se u segue v e v segue w, allora u segue w. In simboli:

$$v \in [w] \Rightarrow [v] \subset [w] ;$$

ii) dati comunque due elementi u e v, esiste un w che segue sia u che v. In simboli:

$$[u] \cap [v] \neq \emptyset, \qquad \forall\, u, v \in U .$$

Per una funzione $f : U \to I\!R$ è possibile dare il concetto di limite; infatti si dice che $f(u)$ converge ad l $(-\infty < l < +\infty)$ e si scrive

$$\lim_U f(u) = l$$

se accade che, dato comunque un $\varepsilon > 0$, esiste un elemento $u_\varepsilon \in U$ tale che $|f(u) - l| < \varepsilon$ per ogni u che segue u_ε; in simboli:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, u_\varepsilon \in U \;\; : \forall\, u \in [u_\varepsilon] \Rightarrow |f(u) - l| < \varepsilon .$$

È ovvio come si definisca il concetto di funzione divergente. È possibile verificare che i principali teoremi sui limiti (come l'unicità del limite, le operazioni sui limiti, ecc.) continuano a sussistere su un insieme quasi-ordinato qualunque. Ricordiamo anche che sussiste il teorema di regolarità per le funzioni monotòne. È possibile, poi, definire il *minimo* e il *massimo limite*; si pone, infatti, rispettivamente:

$$\liminf_U f(u) = \sup_{u\in U} \inf_{v\in[u]} f(v); \qquad \limsup_U f(u) = \inf_{u\in U} \sup_{v\in[u]} f(v)\ .$$

È ovvio che

$$\liminf_U f(u) \leq \limsup_U f(u)\ .$$

II.1 *La funzione $f : U \to I\!R$ tende al limite λ $(-\infty \leq \lambda \leq +\infty)$ se e solo se*

$$\liminf_U f(u) = \limsup_U f(u); \tag{II.1.2}$$

in tal caso questo comune valore coincide con il limite λ.

Dimostriamo il teorema nel caso del limite finito, lasciando al lettore il compito di esaminare in dettaglio il caso $\lambda = \pm\infty$. Supponiamo $f(u) \to \lambda$; dato un $\varepsilon > 0$, esiste un u_ε tale che

$$\lambda - \varepsilon < f(u) < \lambda + \varepsilon \qquad \forall\ u \in [u_\varepsilon]\ ;$$

ciò implica[2]

$$\lambda - \varepsilon \leq \liminf_U f(u) \leq \limsup_U f(u) \leq \lambda + \varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε,

[2]Si osservi che se abbiamo due funzioni tali che $f(u) \leq g(u)$ definitivamente (ossia per ogni $u \in [u_0]$, per un certo u_0), allora $\liminf_U f(u) \leq \liminf_U g(u)$. Infatti si ha

$$\inf_{v\in[u]} f(v) \leq \inf_{v\in[u]} g(v) \qquad \forall\ u \in [u_0]$$

e quindi, come segue subito dalla definizione di limite:

$$\lim_U \inf_{v\in[u]} f(v) \leq \lim_U \inf_{v\in[u]} g(v)\ .$$

D'altra parte, a causa della monotonia,

$$\lim_U \inf_{v\in[u]} f(v) = \sup_{u\in U} \inf_{v\in[u]} f(v); \ \lim_U \inf_{v\in[u]} g(v) = \sup_{u\in U} \inf_{v\in[u]} g(v)$$

e quindi la tesi. Analogamente $\limsup_U f(u) \leq \limsup_U g(u)$.

$$\lambda \leq \liminf_U f(u) \leq \limsup_U f(u) \leq \lambda \tag{II.1.3}$$

ossia la (II.1.2). Inoltre la (II.1.3) mostra che $\lambda = \liminf_U f(u) = \limsup_U f(u)$.

Se, viceversa,

$$\lambda = \sup_{u\in U} \inf_{v\in[u]} f(v) = \inf_{u\in U} \sup_{v\in[u]} f(v),$$

per definizione di estremo inferiore, dato un $\varepsilon > 0$, esiste un u'_ε tale che

$$\sup_{v\in[u'_\varepsilon]} f(v) < \lambda + \varepsilon$$

e quindi

$$f(v) < \lambda + \varepsilon \qquad \forall\ v \in [u'_\varepsilon]\ .$$

Analogamente, esiste un u''_ε tale che

$$f(v) > \lambda - \varepsilon \qquad \forall\ v \in [u''_\varepsilon]\ .$$

Preso allora un $u_\varepsilon \in [u'_\varepsilon] \cap [u''_\varepsilon]$ (si ricordi la ii) !) si ha che se $v \in [u_\varepsilon]$, allora $v \in [u'_\varepsilon] \cap [u''_\varepsilon]$ (per la i)) e quindi

$$\lambda - \varepsilon < f(v) < \lambda + \varepsilon \qquad \forall\ v \in [u_\varepsilon]$$

ossia $f(u) \to \lambda$.

II.2 *(Criterio di convergenza di Cauchy). La funzione $f : U \to I\!R$ è convergente se e solo se è soddisfatta la seguente condizione:*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ u_\varepsilon \in U\ :\ \forall\ u \in [u_\varepsilon] \Rightarrow |f(u) - f(u_\varepsilon)| < \varepsilon\ . \tag{II.1.4}$$

Se $f(u) \to \lambda$, allora, dato $\varepsilon > 0$ esiste un u_ε tale che $|f(u_\varepsilon) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$ e per ogni $u \in [u_\varepsilon]$ risulta $|f(u) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi

$$|f(u) - f(u_\varepsilon)| \leq |f(u) - \lambda| + |\lambda - f(u_\varepsilon)| < \varepsilon$$

per ogni $u \in [u_\varepsilon]$, ossia la (II.1.4).

Viceversa, se è soddisfatta la condizione di Cauchy (II.1.4), fissato ε e il relativo u_ε, abbiamo che

$$-\varepsilon + f(u_\varepsilon) < f(u) < f(u_\varepsilon) + \varepsilon$$

per ogni $u \in [u_\varepsilon]$ e quindi (cfr. nota [2], p.10)

$$-\varepsilon + f(u_\varepsilon) \leq \liminf_U f(u) \leq \limsup_U f(u) \leq f(u_\varepsilon) + \varepsilon$$

da cui segue la finitezza di $\liminf_U f(u)$ e di $\limsup_U f(u)$ ed inoltre

$$0 \leq \limsup_U f(u) - \liminf_U f(u) \leq 2\varepsilon$$

che, per l'arbitrarietà di ε, implica la tesi.

Ricordiamo anche che un insieme quasi-ordinato V si dice *subordinato* a U se accade che

$$\forall\, u \in U \quad \exists\, v \in V \ : \ [v]_V \subset [u]_U \ .$$

Sussiste il seguente teorema:

II.3 *Sia V un insieme quasi-ordinato subordinato ad U e sia f una funzione definita su $U \cup V$. Se esiste il limite di f sull'insieme U, esiste anche sull'insieme V e tali limiti sono uguali.*

Supponiamo che il limite di f su U sia finito ed uguale ad l. Per definizione di limite, dato comunque un $\varepsilon > 0$, esiste un $u_\varepsilon \in U$ tale che, per ogni $u \in [u_\varepsilon]_U$ si ha $|f(u) - l| < \varepsilon$. Essendo V subordinato, esiste un $v_\varepsilon \in V$ tale che $[v_\varepsilon]_V \subset [u_\varepsilon]_U$. Allora per ogni $v \in [v_\varepsilon]_V$ risulta $|f(v) - l| < \varepsilon$, ossia la tesi. È ovvio come modificare la dimostrazione nel caso di funzioni divergenti.

Torniamo ora alle serie multiple. Indichiamo con $\mathcal{M} \subset I\!R^n$ l'insieme dei multi-indici e sia $\{\mathcal{I}\}$ un sottoinsieme di $\mathcal{M}$ tale che

a) ogni $I \in \{\mathcal{I}\}$ è limitato, ossia costituito da un numero finito di multi-indici;

b) dato comunque un sottoinsieme limitato A di $\mathcal{M}$, esiste un $I \in \{\mathcal{I}\}$ con $A \subset I$.

L'insieme $\{\mathcal{I}\}$ definisce un *metodo di sommazione* per la serie (II.1.1) nel modo che andiamo a descrivere. Intanto l'insieme $\{\mathcal{I}\}$, in forza delle condizioni a) e b), risulta un insieme quasi-ordinato rispetto all'inclusione insiemistica (cioè I segue J se $I \supset J$). Infatti la condizione i) è ovviamente soddisfatta, mentre, per quanto riguarda la ii), dati comunque I', $I'' \in \{\mathcal{I}\}$, esiste (per b)) un $I \supset (I' \cup I'')$. Diremo che la serie (II.1.1) è sommabile con il metodo di sommazione $\{\mathcal{I}\}$ ed ha per somma L se la funzione

$$\alpha(I) = \sum_{k \in I} a_k$$

ammette limite finito L in $\{\mathcal{I}\}$; ossia si pone

$$\lim_{\{\mathcal{I}\}} \alpha(I) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \ .$$

Se, ad esempio, si prende come insieme $\{\mathcal{I}\}$ la famiglia dei quadrati, ossia la famiglia i cui elementi sono

$$I_j = \{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{M} \mid k_1 \leq j, \ldots, k_n \leq j\} \qquad j = 1, 2, \ldots \ ,$$

e la serie (II.1.1) converge con il relativo metodo di sommazione, si dice che la serie (II.1.1) converge per quadrati. In questo caso si ha

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k = \lim_{j\to\infty} \sum_{k_1=0}^{j} \dots \sum_{k_n=0}^{j} a_{k_1\dots k_n}$$

Se, invece, si prende come insieme $\{\mathcal{I}\}$ la famiglia i cui elementi sono

$$I_j = \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{M} \mid |k| \le j\} \qquad j = 1, 2, \dots \ ,$$

si dice che la serie converge per diagonali. In questo caso si ha

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k = \lim_{j\to\infty} \sum_{h=0}^{j} \sum_{|k|=h} a_{k_1\dots k_n}$$

Un metodo particolarmente importante è il cosiddetto *metodo di sommazione assoluto* che consiste nel prendere come $\{\mathcal{I}\}$ la famiglia $\{A\}$ costituita da tutti gli insiemi limitati A di $\{\mathcal{M}\}$. È facile costruire altri metodi di sommazione.

È ovvio cosa debba intendersi per serie divergente (positivamente o negativamente) secondo un certo metodo di sommazione. È bene notare esplicitamente che una stessa serie può essere convergente con un metodo di sommazione e non con un altro. Ad esempio, consideriamo la serie doppia

$$\sum_{h,k}^{0,\infty} (-1)^h b_k \tag{II.1.5}$$

dove

$$b_0 = -1,\ b_k = \frac{1}{k(k+1)} \qquad (k = 1, 2, \dots)\ .$$

Se sommiamo la (II.1.4) per quadrati, posto $s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, abbiamo

$$\sum_{h,k}^{0,\infty} (-1)^h b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^h b_k =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{h=0}^{n} (-1)^h \sum_{k=0}^{n} b_k \right) = \lim_{n\to\infty} \left(s_n \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \right) = 0$$

dato che

$$s_n = -1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) = -1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{1}{n+1}$$

e quindi
$$s_n \sum_{h=0}^{n}(-1)^h = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ -\frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} .$$
La (II.1.5) è quindi sommabile per quadrati e la sua somma è zero.

Se invece sommiamo la (II.1.5) per diagonali, dobbiamo determinare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \sum_{h+k=j} (-1)^h b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \sum_{h=0}^{j} (-1)^h b_{j-h} = \lim_{n\to\infty} \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \sum_{j=h}^{n} b_{j-h} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{h=0}^{n} (-1)^h s_{n-h} = \lim_{n\to\infty} \sum_{h=0}^{n} (-1)^{n-h} s_h = \lim_{n\to\infty} \left((-1)^{n+1} \sum_{h=0}^{n} \frac{(-1)^h}{h+1} \right) .$$

Ma tale limite non esiste, dato che
$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h+1} = \log 2 ,$$
e quindi la serie (II.1.5) non è sommabile per diagonali.

Vediamo ora alcuni teoremi che riguardano il metodo di sommazione assoluto.

II.4 *Se la serie (II.1.1) è sommabile (divergente) secondo il metodo di sommazione assoluto, allora essa è sommabile (divergente) con ogni altro metodo di sommazione ed ha la stessa somma.*

È una conseguenza del teorema II.3, non appena si osservi che, fissato un metodo di sommazione $\{\mathcal{I}\}$, si ha che $\{\mathcal{I}\}$ è subordinato ad $\{A\}$ (si ricordi la condizione b) !).

II.5 *La serie (II.1.1) risulta sommabile secondo il metodo di sommazione assoluto se e solo se la funzione*
$$\alpha(A) = \sum_{k\in A} a_k$$
risulta limitata in $\{A\}$, ossia se e solo se esiste una costante L tale che
$$|\alpha(A)| \le L \qquad \forall\ A \in \{A\} .$$

Supponiamo la serie convergente. Per il criterio di Cauchy, esiste un insieme finito di multi-indici A_1 tale che, per ogni altro insieme finito di multi-indici A' con $A_1 \subset A'$ risulta:
$$|\alpha(A') - \alpha(A_1)| < 1$$

ossia

$$|\alpha(A' - A_1)| < 1 \ .$$

Sia ora A un qualsiasi insieme finito di multi-indici; possiamo scrivere

$$|\alpha(A)| = |\alpha(A \cap A_1) + \alpha(A - A_1)| \leq |\alpha(A \cap A_1)| + |\alpha((A \cup A_1) - A_1)| \leq \sum_{k \in A_1} |a_k| + 1$$

(si è usato il fatto che $A - A_1 = (A \cup A_1) - A_1$) e quindi la limitatezza di α.

Viceversa, supponiamo che α sia limitata. Dato un qualsiasi insieme $A \in \{A\}$, definiamo A^+ (A^-) l'insieme dei multi-indici di A per i quali $a_k \geq 0$ ($a_k < 0$). Risultando $\alpha(A^+) \leq L$ ed essendo la $\alpha(A^+)$ monotòna (se $A \subset B$ allora $\alpha(A^+) \leq \alpha(B^+)$), per il teorema di regolarità delle funzioni monotòne, si ha che esiste finito

$$\lim_{\{A\}} \alpha(A^+) \ .$$

Analogamente si dimostra che esiste finito

$$\lim_{\{A\}} \alpha(A^-)$$

ed essendo

$$\alpha(A) = \alpha(A^+) + \alpha(A^-)$$

si ha che esiste finito anche il limite di $\alpha(A)$, ossia la serie converge secondo il metodo di sommazione assoluto.

Una osservazione importante è che se gli a_k sono tutti non negativi (non positivi), allora il carattere della serie **non** dipende dal metodo di sommazione. Infatti, se gli a_k sono tutti non negativi, la funzione $\alpha(A)$ risulta monotòna non decrescente su $\{A\}$ e quindi

$$\lim_{\{A\}} \alpha(A) = \sup_{\{A\}} \alpha(A) \ ;$$

se tale sup è finito, allora la serie converge secondo il metodo di sommazione assoluto e, per il teorema II.4, convergerà secondo un qualsiasi altro metodo di sommazione alla stessa somma. Se invece il sup è infinito, allora la serie diverge secondo il metodo di sommazione assoluto e, per lo stesso teorema, divergerà ancora se sommata con un qualsiasi altro metodo di sommazione.

Quindi, quando abbiamo a che fare con serie a termini di segno costante, non è necessario specificare il metodo di sommazione, giacchè il carattere della serie e la sua somma non dipendono dal metodo considerato.

È lecita, allora, la seguente definizione: diremo che la serie (II.1.1) *converge assolutamente* se la serie (a termini non negativi !)

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k_1,\ldots,k_n}^{0,\infty} |a_{k_1 \ldots k_n}| \tag{II.1.6}$$

è convergente, senza precisare il metodo di sommazione. È naturale chiedersi qual'è il legame tra la convergenza assoluta e la convergenza secondo il metodo di sommazione assoluto. Abbastanza sorprendentemente i due concetti coincidono:

II.6 *La serie (II.1.1) converge secondo il metodo di sommazione assoluto se e solo se (II.1.6) è convergente.*

Poniamo

$$\sigma(A) = \sum_{k \in A} |a_k| \ .$$

Supponiamo la serie (II.1.6) convergente. Per fissare le idee, pensiamola convergente secondo il metodo di convergenza assoluto e indichiamo con S la sua somma. Essendo

$$|\alpha(A)| \leq \sigma(A) \leq S \qquad \forall\ A \in \{A\}$$

si ha la limitatezza di $\alpha(A)$ e quindi, per il teorema precedente, la convergenza di (II.1.1) secondo il metodo di convergenza assoluto.

Viceversa, supponiamo la (II.1.1) convergente secondo il metodo di convergenza assoluto; per il teorema precedente $\alpha(A)$ risulta limitata. Quindi

$$\alpha(A^+) \leq L, \quad |\alpha(A^-)| \leq L$$

per ogni $A \in \{A\}$, avendo A^+ ed A^- lo stesso significato attribuitogli nella dimostrazione del teorema II.5. Ciò implica

$$\sigma(A) = \sigma(A^+) + \sigma(A^-) = \alpha(A^+) + |\alpha(A^-)| \leq 2L$$

ossia la limitatezza di $\sigma(A)$ e quindi la convergenza di (II.1.6).

In base a questo teorema e al teorema II.4, non solo per le serie a termini di segno costante, ma anche per le serie assolutamente convergenti, tutti i metodi di sommazione sono equivalenti.

Un esempio interessante di serie multipla è la serie geometrica n-pla. Dato il vettore $q = (q_1, \ldots, q_n)$ e il multi-indice $k = (k_1, \ldots, k_n)$, poniamo

$$q^k = q_1^{k_1}, \ldots, q_n^{k_n}$$

con la convenzione $q_h^{k_h} = 1$ se $q_h = k_h = 0$. La serie

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} q^k = \sum_{k_1,\ldots,k_n}^{0,\infty} q_1^{k_1}, \ldots, q_n^{k_n} \tag{II.1.7}$$

prende il nome di serie geometrica n-pla. Essendo

$$\sum_{k_1=0}^{j} \dots \sum_{k_n=0}^{j} |q^k| = \sum_{k_1=0}^{j} |q_1|^{k_1} \dots \sum_{k_n=0}^{j} |q_n|^{k_n} = \frac{1-|q_1|^{j+1}}{1-|q_1|} \dots \frac{1-|q_n|^{j+1}}{1-|q_n|} \ ,$$

la serie

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |q^k|$$

converge per quadrati (e quindi con ogni metodo di sommazione !) se e solo se $|q_h| < 1$, $h = 1, \dots, n$; in tal caso la serie geometrica n-pla (II.1.7) converge secondo il metodo di sommazione assoluto e quindi rispetto ad un qualsiasi metodo di sommazione; la sua somma si può calcolare sommando con un qualsiasi metodo e abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q_1} \cdots \frac{1}{1-q_n} \ ,$$

risultato che si ottiene immediatamente sommando per quadrati.

2 Serie multiple di funzioni.

Una *serie multipla di funzioni* è una serie del tipo

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k_1,\dots,k_n}^{0,\infty} f_{k_1 \dots k_n}(x) \qquad \text{(II.2.1)}$$

dove le $f_{k_1 \dots k_n}(x)$ sono funzioni definite in un insieme Ω. Diremo che la serie (II.2.1) *converge puntualmente* in Ω secondo il metodo di sommazione $\{\mathcal{I}\}$ se accade che esiste finito il

$$\lim_{\{\mathcal{I}\}} \alpha(I, x) \qquad \forall\, x \in \Omega \ , \qquad \text{(II.2.2)}$$

dove

$$\alpha(I, x) = \sum_{k \in I} f_k(x) \ .$$

Il limite (II.2.2) sarà la somma della serie. Analogamente si dirà che la serie (II.2.1) *converge uniformemente* in Ω secondo il metodo di sommazione $\{\mathcal{I}\}$ se il limite (II.2.2) è uniforme in Ω. È facile estendere alle serie multiple i teoremi fondamentali che riguardano la convergenza uniforme di serie semplici di funzioni, quali il teorema del limite, della continuità, dell'integrazione termine a termine, ecc..

Un teorema interessante è il seguente:

II.7 *La serie (II.2.1) converge uniformemente in Ω secondo il metodo di sommazione assoluto se e solo se la serie dei moduli*

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |f_k(x)| \tag{II.2.3}$$

converge uniformemente in Ω secondo il metodo di sommazione assoluto.

Poniamo

$$\sigma(A, x) = \sum_{k \in A} |f_k(x)| \ .$$

Essendo la convergenza di (II.2.3) uniforme, dato un $\varepsilon > 0$, esiste un A_ε tale che, per ogni $A \supset A_\varepsilon$ risulta [(3)]

$$\sigma(A, x) - \sigma(A_\varepsilon, x) < \varepsilon \qquad \forall\, x \in \Omega \ .$$

Allora

$$|\alpha(A, x) - \alpha(A_\varepsilon, x)| = |\alpha(A - A_\varepsilon, x)| \leq \sigma(A - A_\varepsilon, x) = \sigma(A, x) - \sigma(A_\varepsilon, x) < \varepsilon \qquad \forall\, x \in \Omega$$

e quindi si ha la convergenza uniforme della (II.2.1) rispetto al metodo di sommazione assoluto.

Viceversa, supponiamo che la serie (II.2.1) converga uniformemente rispetto al metodo di sommazione assoluto. Dato un $\varepsilon > 0$, esiste un A_ε tale che, per ogni insieme finito di multi-indici $A \supset A_\varepsilon$ risulta (cfr. nota [3], p.18):

$$|\alpha(A - A_\varepsilon, x)| = |\alpha(A, x) - \alpha(A_\varepsilon, x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in \Omega \ . \tag{II.2.4}$$

Dobbiamo ora stimare $\sigma(A, x) - \sigma(A_\varepsilon, x) = \sigma(A - A_\varepsilon, x)$. Possiamo scrivere

$$A - A_\varepsilon = (A^+ \cup A^-) - A_\varepsilon = (A^+ - A_\varepsilon) \cup (A^- - A_\varepsilon)$$

(A^+ e A^- hanno il solito significato) e quindi

$$\sigma(A - A_\varepsilon, x) = \sigma(A^+ - A_\varepsilon, x) + \sigma(A^- - A_\varepsilon, x) = \alpha(A^+ - A_\varepsilon, x) + |\alpha(A^- - A_\varepsilon, x)| \ .$$

Inoltre $A^\pm - A_\varepsilon = (A^\pm \cup A_\varepsilon) - A_\varepsilon$ e quindi, per la (II.2.4),

$$|\alpha(A^\pm - A_\varepsilon, x)| = |\alpha((A^\pm \cup A_\varepsilon) - A_\varepsilon, x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in \Omega$$

[(3)]Stiamo usando il fatto che una serie converge uniformemente in Ω secondo un certo metodo di sommazione (qui il metodo è quello assoluto) se e solo se sussiste il relativo criterio di Cauchy "uniforme" in Ω. Lasciamo al lettore il compito di dimostrare ciò.

da cui

$$\sigma(A,x)-\sigma(A_\varepsilon,x)=\sigma(A-A_\varepsilon,x)=\alpha(A^+-A_\varepsilon,x)+|\alpha(A^--A_\varepsilon,x)|<2\varepsilon \qquad \forall\, x\in\Omega$$

ossia la tesi.

Il teorema appena dimostrato fa vedere che la convergenza assoluta uniforme della (II.2.1) (per essere precisi, la convergenza uniforme della (II.2.3) rispetto al metodo di sommazione assoluto) **è equivalente** alla convergenza uniforme rispetto al metodo di **sommazione assoluto** della (II.2.1). Ciò può sorprendere, perché per la sommazione ordinaria delle serie semplici tale equivalenza non sussiste.

Si dice che la serie (II.2.1) *converge totalmente* in Ω se per ogni multi-indice k esiste una costante L_k tale che

$$|f_k(x)|\le L_k \qquad \forall\, x\in\Omega$$

e la serie

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} L_k$$

converge.

II.8 *La convergenza totale della (II.2.1) implica la sua convergenza assoluta uniforme.*

Per il criterio di Cauchy, dato un $\varepsilon>0$, esiste un A_ε tale che, per ogni insieme finito di multi-indici $A\supset A_\varepsilon$, risulta

$$\sum_{k\in A-A_\varepsilon} L_k<\varepsilon\ .$$

Quindi si ha

$$\sigma(A,x)-\sigma(A_\varepsilon,x)=\sigma(A-A_\varepsilon,x)\le\sum_{k\in A-A_\varepsilon} L_k<\varepsilon \qquad \forall\, x\in\Omega$$

ossia la serie (II.2.3) converge uniformemente.

3 Serie multiple di potenze e funzioni analitiche di più variabili reali.

Fissato un punto $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ dello spazio $I\!R^n$, si chiama *serie multipla di potenze* la serie multipla di funzioni

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k(x-x^0)^k=\sum_{k_1,\dots,k_n}^{0,\infty} a_{k_1\dots k_n}(x_1-x_1^0)^{k_1}\dots(x_n-x_n^0)^{k_n} \qquad \text{(II.3.1)}$$

dove le costanti reali a_k sono i coefficienti della serie. Un primo risultato relativo alla convergenza delle serie multiple di potenze è il seguente:

II.9 *Se la serie di potenze (II.3.1) converge assolutamente in un punto x^1 tale che $x^1_h \neq x^0_h$ $(h = 1, \ldots, n)$, allora converge totalmente nell'intervallo chiuso*

$$I = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_h - x^0_h| \leq \varrho_h, \; h = 1, \ldots, n\}$$

dove le costanti ϱ_h sono tali che $0 < \varrho_h < |x^1_h - x^0_h|, \; h = 1, \ldots, n$.

Dire che la (II.3.1) converge assolutamente, significa che la relativa serie dei moduli

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| \, |(x^1 - x^0)^k| = \sum_{k_1,\ldots,k_n}^{0,\infty} |a_{k_1 \ldots k_n}| \, |x^1_1 - x^0_1|^{k_1} \ldots |x^1_n - x^0_n|^{k_n}$$

converge. Essendo tale serie convergente secondo il metodo di sommazione assoluto, per il teorema II.5 si ha in particolare

$$|a_{k_1 \ldots k_n}| \, |x^1_1 - x^0_1|^{k_1} \ldots |x^1_n - x^0_n|^{k_n} \leq C \qquad \forall \, k \in \mathcal{M} \; . \tag{II.3.2}$$

Allora, posto $q_h = \dfrac{\varrho_h}{|x^1_h - x^0_h|}$, risulta in I

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k||x_1 - x^0_1|^{k_1} \ldots |x_n - x^0_n|^{k_n} \leq \sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| \varrho_1^{k_1} \ldots \varrho_n^{k_n} =$$
$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| q_1^{k_1} |x^1_1 - x^0_1|^{k_1} \ldots q_n^{k_n} |x^1_n - x^0_n|^{k_n} \leq C \sum_{|k|=0}^{\infty} q_1^{k_1} \ldots q_n^{k_n}$$

ed essendo $0 < q_h < 1$ $(h = 1, \ldots, n)$, la serie geometrica all'ultimo membro converge e quindi si ha la tesi.

Si badi che per dimostrare il teorema non è necessario supporre la convergenza della serie in x^1, ma è sufficiente supporre che valga la (II.3.2).

Diremo che W è il *campo massimo di assoluta convergenza* della serie (II.3.1) se in W la serie converge assolutamente e non esiste alcun aperto contenente propriamente W nel quale la serie converge assolutamente. Si badi che W, in generale, non è l'insieme più grande nel quale la serie converge assolutamente. Ad esempio, consideriamo la serie doppia di potenze

$$\sum_{h,k}^{0,\infty} a_{hk} x^h y^k \qquad a_{hk} = \begin{cases} 2^{-h} & \text{se } k = 0, \; h = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{se } h = 0, \; k = 1, 2, \ldots \\ 1 & \text{se } h, k = 1, 2, \ldots \end{cases} \quad ,$$

ossia la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} x^h \sum_{k=1}^{\infty} y^k + \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^h \; .$$

Questa serie converge assolutamente nell'insieme

$$\{(x,y) \mid |x|<1,\ |y|<1\} \cup \{(x,y) \mid x=0,\ y\in I\!R\} \cup \{(x,y) \mid y=0,\ |x|<2\}$$

mentre il campo massimo di assoluta convergenza è solamente $\{(x,y) \mid |x|<1,\ |y|<1\}$.

Un teorema fondamentale nello studio delle serie semplici è il teorema di Cauchy-Hadamard. Questo risultato si estende alle serie multiple al modo seguente

II.10 *Sia*[(4)]

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{|k|\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{|k|}}}$$

(con la solita convenzione che $R=0$ ($R=+\infty$) se il massimo limite a denominatore è uguale a $+\infty$ (0)). Se $R>0$ la serie (II.3.1) converge totalmente in ogni intervallo

$$\{(x_1,\dots,x_n) \mid |x_h - x_h^0| \le \varrho, \quad h=1,\dots,n\}$$

dove $\varrho<R$. Se $R<+\infty$ la serie (II.3.1) diverge assolutamente per ogni x tale che

$$|x_h - x_h^0| > R \qquad h=1,\dots,n\ .$$

La dimostrazione di questo teorema è del tutto analoga a quella del teorema di Cauchy-Hadamard per le serie semplici. Purtroppo non è altrettanto efficace ! Infatti, per $n=1$, il teorema di Cauchy-Hadamard permette di concludere che il campo massimo di assoluta convergenza della serie semplice in esame è l'intervallo $\{x\in I\!R \mid |x-x^0|<R\}$; infatti all'interno di questo intervallo c'è assoluta convergenza, mentre al di fuori la serie diverge assolutamente. Esaminiamo ora il risultato fornito dal teorema II.10 nel caso $n=2$: abbiamo la convergenza assoluta quando sia $|x_1-x_1^0|$ che $|x_2-x_2^0|$ sono minori di R e la divergenza assoluta quando entrambi sono maggiori di R. Ma che succede quando $|x_1-x_1^0|<R$ e $|x_2-x_2^0|>R$? Il teorema non lo dice ed è facile dare esempi per i quali l'intervallo $\{(x_1,x_2) \mid |x_1-x_1^0|<R,\ |x_2-x_2^0|<R\}$ non è il massimo aperto di assoluta convergenza. Si studi, ad esempio, la serie

$$\sum_{h,k}^{0,\infty} a_{hk} x^h y^k \qquad a_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{se } h=k \\ 0 & \text{se } h\neq k \end{cases}$$

(4) Con il simbolo $\limsup_{|k|\to\infty}$ intendiamo $\limsup_{\{\mathcal{M}\}}$ dove l'insieme $\{\mathcal{M}\}$ è quasi ordinato definendo il multi-indice k' seguente k se $|k'|>|k|$.

ossia la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} x^h y^h$$

per la quale $R = 1$, mentre il campo massimo di assoluta convergenza è il campo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| < 1\}$, il quale contiene propriamente $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1\}$.

Se i numeri reali positivi $R_1, \ldots, R_n$ sono tali che

$$\limsup_{|k|\to\infty} \left(|a_k| R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}\right)^{\frac{1}{|k|}} = 1$$

essi si chiamano *raggi associati di assoluta convergenza* per la (II.3.1). Sussistono i seguenti teoremi, dei quali omettiamo la dimostrazione:

II.11 *Se $R_1, \ldots, R_n$ è un sistema di raggi associati di assoluta convergenza per la serie (II.3.1), allora l'intervallo $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_h - x_h^0| < R_h,\ h = 1, \ldots, n\}$ è un aperto di assoluta convergenza. Se il punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ è tale che $|x_h - x_h^0| > R_h$ ($h = 1, \ldots, n$), la serie (II.3.1) è assolutamente divergente in x.*

II.12 *Se la serie (II.3.1) è tale che*

$$0 < \limsup_{|k|\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{|k|}} < \infty$$

si ottengono infiniti sistemi di raggi associati fissando arbitrariamente i numeri positivi $t_2, \ldots, t_n$ e ponendo

$$R_1 = \left[\limsup_{|k|\to\infty} \left(|a_k| t_2^{k_2} \ldots t_n^{k_n}\right)^{\frac{1}{|k|}}\right]^{-1},$$
$$R_2 = t_2 R_1,\ \ldots,\ R_n = t_n R_1\ .$$

Indagheremo ora il problema della derivazione di una serie di potenze. Consideriamo la seguente *serie derivata*:

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} k_1 a_k (x_1 - x_1^0)^{k_1 - 1} (x_2 - x_2^0)^{k_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{k_n} \tag{II.3.3}$$

la quale è ancora una serie di potenze, essendo nulli i coefficienti dei termini in cui $k_1 - 1$ è negativo. Indichiamo con W' il campo massimo di assoluta convergenza della (II.3.3). Si ha

II.13 $W \subset W'$.

Poniamo per semplicità $x^0 = 0$ e consideriamo un $y \in W$. Fissato un altro punto $\overline{x} \in W$ tale che $|y_h| < |\overline{x}_h|$ $(h = 1, \ldots, n)$ e posto $q_h = \frac{|y_h|}{|\overline{x}_h|}$, risulta

$$
\begin{gathered}
k_1 |a_k|\, |y_1|^{k_1-1}\, |y_2|^{k_2} \ldots |y_n|^{k_n} = \\
k_1\, |q_1|^{k_1-1}\, |q_2|^{k_2} \ldots |q_n|^{k_n} |a_k| |\overline{x}_1|^{k_1-1}\, |\overline{x}_2|^{k_2} \ldots |\overline{x}_n|^{k_n} \leq \\
\frac{C}{|\overline{x}_1|}\, k_1\, |q_1|^{k_1-1}\, |q_2|^{k_2} \ldots |q_n|^{k_n}
\end{gathered}
$$

dove C è una costante dipendente da $\overline{x}$ (cfr. (II.3.2)). Essendo $0 \leq q_h < 1$, la serie

$$
\sum_{|k|=0}^{\infty} k_1\, |q_1|^{k_1-1}\, |q_2|^{k_2} \ldots |q_n|^{k_n}
$$

risulta convergente e quindi la serie derivata (II.3.3) converge assolutamente in y.

È ovvio che il teorema II.13 continua ad essere valido per una qualsiasi serie derivata

$$
\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k\, k_1 \ldots (k_1 - h_1 + 1) \ldots k_n \ldots (k_n - h_n + 1)(x_1 - x_1^0)^{k_1-h_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{k_n-h_n} \; .
$$

Si noti che, in generale, gli aperti massimi di assoluta convergenza W e W' **non** coincidono. Si consideri, ad esempio, la serie doppia

$$
\sum_{h,k}^{0,\infty} a_{hk} x^h y^k, \qquad a_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } h = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \; .
$$

Tale serie si può scrivere come

$$
\sum_{h=0}^{\infty} x^h + \sum_{k=1}^{\infty} y^k
$$

e quindi il campo massimo di assoluta convergenza è l'intervallo $(-1, 1) \times (-1, 1)$; la serie derivata rispetto alla x è

$$
\sum_{h=1}^{\infty} h\, x^{h-1}
$$

che converge assolutamente nell'intervallo $(-1, 1) \times \mathbb{R}$. In generale, insomma, una serie derivata può convergere assolutamente in un aperto contenente propriamente l'aperto massimo di assoluta convergenza della serie non derivata. Ciò contrasta col caso ben noto delle serie di potenze in una variabile, dove tutte le serie derivate hanno lo stesso aperto massimo di assoluta convergenza.

II.14 *Supponiamo che la serie (II.3.1) abbia un campo massimo di assoluta convergenza W non vuoto e sia $f(x)$ la sua somma. Allora $f(x) \in C^\infty(W)$ e la serie (II.3.1) coincide con la serie di Taylor della funzione f, ossia*

$$a_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1 + \dots k_n} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \bigg|_{x=x^0}$$

ovvero, usando la notazione dei multi-indici,

$$a_k = \frac{1}{k!} D^k f(x^0) \ .$$

Poniamo per semplicità $x^0 = 0$. Sia $y \in W$ tale che $0 < |y_h|$ $(h = 1, \dots, n)$. Per il teorema II.13 anche la serie (II.3.3) converge assolutamente in y. Allora, per il teorema II.9, entrambe le serie (II.3.1) e (II.3.3) convergono totalmente in un intervallo del tipo

$$I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_h| \leq \varrho_h, \ h = 1, \dots, n\}$$

essendo $0 < \varrho_h < |y_h|$ $(h = 1, \dots, n)$. Ciò permette di derivare la serie (II.3.1) termine a termine in I, ossia di scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} k_1 \, a_k \, x_1^{k_1 - 1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

da cui segue la continuità e derivabilità della $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ in I, nonchè la relazione

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = a_{1,0,\dots,0} \ .$$

Lo stesso ragionamento si ripete per tutte le derivate di ogni ordine, ottenendo così la tesi.

Non andremo oltre nello studio delle serie multiple. Vogliamo solo osservare che, come nel caso delle serie semplici di potenze, è preferibile studiare le serie multiple di potenze nel campo complesso $\mathbb{C}^n$, inquadrandole nella teoria delle funzioni olomorfe di più variabili complesse. Vi sono, però, come abbiamo già visto, delle differenze notevoli tra il caso $n = 1$ ed $n > 1$. È possibile caratterizzare geometricamente in maniera completa i campi massimi di assoluta convergenza, ma la questione è notevolmente più complicata del caso $n = 1$, caso nel quale i campi massimi di assoluta convergenza sono i dischi. Per uno studio approfondito di tali questioni, rimandiamo alle dispense G. Fichera, Teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse, Corso di Analisi Superiore 1982-83, Istituto Matematico G. Castelnuovo, Università "La Sapienza", Roma.

Sia $f(x)$ una funzione reale definita nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Diremo che f è *analitica* in Ω e scriveremo $f \in C^\omega(\Omega)$ se per ogni $x^0 \in \Omega$ esiste una serie di potenze (II.3.1), la quale converge assolutamente in un intorno I_{x^0} alla funzione $f(x)$.

Osserviamo anche che, in base al teorema II.14, una funzione analitica $f \in C^\omega(\Omega)$ risulta $C^\infty(\Omega)$ e, per ogni $x^0 \in \Omega$, può svilupparsi in un intorno di x^0 in serie di Taylor assolutamente convergente

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{D^k f(x^0)}{k!} (x - x^0)^k \, . \tag{II.3.4}$$

È chiaro che esistono funzioni C^∞ le quali non sono analitiche. Dimostriamo adesso un principio di identità che il lettore probabilmente già conosce nell'ambito della teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa.

II.15 *Sia $f \in C^\omega(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso. Se esiste un punto $x^0 \in \Omega$ tale che $D^\alpha f(x^0) = 0$ per ogni multi-indice α, allora $f \equiv 0$ in tutto Ω.*

Sia A l'insieme dei punti di Ω dove f è nulla con tutte le sue derivate parziali. L'insieme A è non vuoto (contiene x^0) ed è un aperto. Infatti, se $x^0 \in A$, allora esiste un intorno I di x^0 nel quale f è sviluppabile in serie di Taylor (II.3.4); ma tale serie, essendo $x^0 \in A$ per ipotesi, è identicamente nulla e quindi tutto I è contenuto in A.

Sia ora $B = \Omega - A$; anche B è un aperto. Infatti, se $x^0 \in B$, esiste un intorno J contenuto in B, perché, se così non fosse, in ogni intorno di x^0 cadrebbe almeno un punto di A; sarebbe allora possibile costruire una successione di punti $\{x^h\}$, la quale appartiene ad A e converge a x^0. Ma allora, per la continuità di f e di tutte le sue derivate, si avrebbe $D^\alpha f(x^0) = 0$ per ogni multi-indice α, ossia $x^0 \in A$ e ciò è assurdo. È così provato che B è un aperto. Ora, se l'aperto B fosse non vuoto, avremmo $\Omega = A \cup B$ con A, B aperti non vuoti e disgiunti e ciò contraddice la connessione di Ω. Deve quindi essere $B = \emptyset$, ossia $\Omega = A$.

Capitolo III
Il metodo delle "maggioranti" e il teorema di Cauchy-Kowalewsky.

1 Le serie maggioranti e l'analiticità delle soluzioni del problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie.

Del teorema di Cauchy-Kowalewsky si conoscono diverse dimostrazioni; qui seguiremo l'idea originale (dovuta a Cauchy per il caso lineare ed estesa da Kowalewsky per il caso quasi-lineare), la quale si basa sul concetto di "maggiorante"di una serie di potenze. Siano

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k, \qquad F(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k \ .$$

due serie multiple di potenze. Supponiamo i coefficienti b_k tutti non negativi; se risulta

$$|a_k| \leq b_k \qquad \forall\ k \in \mathcal{M}$$

allora la serie $F(x)$ è detta *maggiorante* la serie $f(x)$ e si scrive

$$f << F \ .$$

È ovvio che, se in un intorno di x_0 la serie $F(x)$ converge assolutamente, allora anche $f(x)$ converge assolutamente nel medesimo intorno. In modo da comprendere bene come il metodo delle maggioranti possa essere utilizzato, vediamo prima un teorema più semplice del teorema di Cauchy-Kowalewsky nel quale tale metodo viene utilizzato: precisamente, dimostriamo l'analiticità della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria. Premettiamo un lemma

III.1 *Sia $f \in C^\infty$ e sia y una soluzione dell'equazione differenziale*

$$y' = f(x,y) \ .$$

Allora, per ogni k intero positivo, esiste un polinomio di $\frac{k(k+1)}{2}$ variabili:

$$P_k(t_{0,0}, t_{1,0}, t_{0,1}, \dots, t_{k-1,0}, t_{k-2,1}, \dots, t_{0,k-1})$$

a coefficienti positivi tale che

$$y^{(k)}(x) = P_k(f(x,y(x)), f_x(x,y(x)), f_y(x,y(x)), \dots \\ \dots f_{x^{k-1}}(x,y(x)), f_{x^{k-2}y}(x,y(x)), \dots f_{y^{k-1}}(x,y(x)))$$

È ovvio che il lemma è vero per $k=1$. Supponiamo che sia vero per k e dimostriamolo per $k+1$. Risulta

$$\begin{aligned}y^{(k+1)}(x) = &\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{h=0}^{j} \frac{\partial P_k}{\partial t_{h,j-h}}(f(x,y(x)),\ldots,f_{y^{k-1}}(x,y(x)))\frac{d}{dx}f_{x^h y^{j-h}}(x,y(x)) = \\ &\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{h=0}^{j} \frac{\partial P_k}{\partial t_{h,j-h}}(f(x,y(x)),\ldots,f_{y^{k-1}}(x,y(x)))\, f_{x^{h+1} y^{j-h}}(x,y(x)) + \\ &\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{h=0}^{j} \frac{\partial P_k}{\partial t_{h,j-h}}(f(x,y(x)),\ldots,f_{y^{k-1}}(x,y(x)))\, f_{x^{h} y^{j-h+1}}(x,y(x))\, y'(x)\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}y^{(k+1)}(x) = &\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{h=0}^{j} \frac{\partial P_k}{\partial t_{h,j-h}}(f(x,y(x)),\ldots,f_{y^{k-1}}(x,y(x)))\, f_{x^{h+1} y^{j-h}}(x,y(x)) + \\ &\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{h=0}^{j} \frac{\partial P_k}{\partial t_{h,j-h}}(f(x,y(x)),\ldots,f_{y^{k-1}}(x,y(x)))\, f_{x^{h} y^{j-h+1}}(x,y(x))\, f(x,y(x))\end{aligned}$$

che è ancora un polinomio a coefficienti positivi nelle derivate $f_{x^p y^s}$ per $p+s\leq k$.

Per esempio, per $k=1,2,3$ si ha

$$\begin{gathered} y'(x) = f(x,y(x)); \\ y''(x) = f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))y'(x) = f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))\, f(x,y(x)); \\ y'''(x) = f_{xx}(x,y(x)) + 2f_{xy}(x,y(x))\, y'(x) + f_{yy}(x,y(x))\, y'^2(x) + f_y(x,y(x))y''(x) = \\ f_{xx}(x,y(x)) + 2f_{xy}(x,y(x))\, f(x,y(x)) + f_{yy}(x,y(x))\, [f(x,y(x))]^2 + \\ f_y(x,y(x))f_x(x,y(x)) + [f_y(x,y(x))]^2\, f(x,y(x)) \; . \end{gathered}$$

III.2 *Sia $f(x,y)$ una funzione analitica in $A\times B$ (A e B intervallo aperti dell'asse reale) e consideriamo il problema di Cauchy relativo al punto $(x_0,y_0)\in A\times B$*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad . \tag{III.1.1}$$

La soluzione $y(x)$ risulta analitica.

Per semplicità supponiamo, senza ledere la generalità, che $x_0=y_0=0$. Per ipotesi la funzione $f(x,y)$ sarà sviluppabile in serie doppia di potenze

$$f(x,y) = \sum_{h,k}^{0,\infty} a_{hk}x^h y^k \tag{III.1.2}$$

in un intorno di $(0,0)$. Inoltre risulta

$$a_{hk} = \frac{1}{h!k!}\frac{\partial^{h+k} f}{\partial x^h \partial y^k}(0,0) \ .$$

Supponiamo per un momento che la soluzione y sia analitica, ossia che

$$y(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h \tag{III.1.3}$$

in un intorno dell'origine. In tal caso dovrà essere

$$\begin{gathered} c_0 = y(0) = 0; \\ c_1 = y'(0) = f(0,0); \\ c_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{1}{2!}(f_x(0,0) + f_y(0,0)y'(0)) = \frac{1}{2!}(f_x(0,0) + f_y(0,0)f(0,0)); \end{gathered}$$

e, in generale, in base al lemma III.1

$$c_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}P_k(f(0,0), f_x(0,0), \ldots, f_{y^{k-1}}(0,0)) \tag{III.1.4}$$

Se la serie (III.1.3) converge e i suoi coefficienti verificano le relazioni (III.1.4), allora la $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy (III.1.1). Infatti, in base alle relazioni (III.1.4), la funzione $y'(x) - f(x, y(x))$ ha tutte le derivate nulle in 0 ed essendo tale funzione analitica [5], dovrà essere $y'(x) = f(x, y(x))$ in tutto un intorno di 0.

Per dimostrare il teorema bisognerà quindi far vedere che la serie (III.1.3) i cui coefficienti sono determinati da (III.1.4) converge in un intorno di 0. Supponiamo di avere una maggiorante F della f, ossia una funzione analitica di due variabili $F(x,y)$ tale che $f << F$, e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y' = F(x,Y) \\ Y(0) = 0 \end{cases} . \tag{III.1.5}$$

Supponiamo, inoltre, di sapere che la soluzione Y di questo problema risulta analitica, ossia sviluppabile in serie di potenze

$$Y(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_h x^h$$

[5] Si osservi che funzioni composte di funzioni analitiche sono analitiche.

in un intorno dello 0. Usando ancora il lemma III.1, si trova che i coefficienti della Y sono legati alla F dalle stesse relazioni (III.1.4), ossia che

$$\gamma_k = \frac{Y^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} P_k(F(0,0), F_x(0,0), \ldots, F_{y^{k-1}}(0,0)) \ .$$

Poichè i coefficienti dei polinomi P_k sono positivi ed essendo

$$\left| \frac{\partial^{h+k} f}{\partial x^h \partial y^k}(0,0) \right| \leq \frac{\partial^{h+k} F}{\partial x^h \partial y^k}(0,0)$$

si ha

$$|y^{(k)}(0)| = |P_k(f(0,0), f_x(0,0), \ldots, f_{y^{k-1}}(0,0))| \leq$$
$$P_k(|f(0,0)|, |f_x(0,0)|, \ldots, |f_{y^{k-1}}(0,0)|) \leq P_k(F(0,0), F_x(0,0), \ldots, F_{y^{k-1}}(0,0)) =$$
$$Y^{(k)}(0)$$

ossia che $y << Y$. Essendo la Y convergente in un intorno dello 0, si ottiene così la convergenza della y e quindi la tesi. Per completare la dimostrazione bisogna quindi trovare una maggiorante F tale che la Y soluzione di (III.1.5) è analitica.

Siano r, t due numeri positivi tali che la serie (III.1.2) converge totalmente in $|x| \leq r$, $|y| \leq t$. Esisterà allora una costante M tale che (cfr. teorema II.5):

$$|a_{hk}| r^h t^k \leq M \qquad\qquad h, k = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Come funzione F tale che $f << F$ è allora naturale prendere

$$F(x,y) = M \sum_{h,k}^{0,\infty} \left(\frac{x}{r}\right)^h \left(\frac{y}{t}\right)^k \ .$$

Questa non è altro che una serie multipla geometrica la cui somma è

$$F(x,y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{t}\right)} \ .$$

Abbiamo così trovato una maggiorante di f; resta da dimostrare che la soluzione del problema di Cauchy (III.1.5) è analitica. Separando le variabili nell'equazione, abbiamo

$$\int \left(1 - \frac{Y}{t}\right) dY = \int \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}\, dx$$

e, tenendo presente che $Y(0) = 0$,

$$Y - \frac{Y^2}{2t} = -Mr \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)$$

ossia

$$Y^2 - 2tY - 2tMr\log\left(1 - \frac{x}{r}\right) = 0\ ,$$

da cui

$$Y(x) = t - \sqrt{t^2 + 2tMr\log\left(1 - \frac{x}{r}\right)}$$

(va esclusa la soluzione col segno "più" davanti alla radice, perché in 0 vale $2t$). Tale funzione risulta analitica in un intorno dello 0 (verificarlo !).

La dimostrazione si estende facilmente ai sistemi di equazioni differenziali del primo ordine di forma normale. Essendo poi un qualsiasi sistema di equazioni differenziali di ordine qualsiasi di forma normale equivalente ad un sistema del primo ordine di forma normale, il teorema III.2 vale per un sistema qualsiasi, purché di forma normale.

2 Il teorema di Cauchy-Kowalesky.

Consideriamo il seguente problema di Cauchy per un sistema quasi-lineare del primo ordine in due variabili:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} A_{ij}(x,y,u_1,\ldots,u_p)\frac{\partial u_j}{\partial x} + B_i(x,y,u_1,\ldots,u_p) \qquad i=1,\ldots,p \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x) \qquad i=1,\ldots,p \end{cases} . \qquad \text{(III.2.1)}$$

Dimostreremo tra poco che se le A_{ij}, B_ie le φ_i sono funzioni analitiche delle variabili da cui dipendono, allora esiste (in piccolo) ed è unica la soluzione di (III.2.1). Il prossimo teorema mostra che in tal modo si ottiene un teorema di esistenza ed unicità per sistemi più generali.

III.3 *Il problema di Cauchy per il sistema* [(6)]

$$\begin{cases} F_i(x,y,u_1,\ldots,u_p,\ldots,D^\beta u_1,\ldots,D^\beta u_p) = 0 \quad (|\beta|\le m) \quad i=1,\ldots,p \\ \frac{\partial^j u_i}{\partial y^j}(x,0) = \varphi_{ij}(x) \qquad i=1,\ldots,p,\ j=1,\ldots,m-1 \end{cases} ,$$

dove si suppone l'equazione $F_i(x,y,u_1,\ldots,u_p,\ldots,D^\beta u_1,\ldots,D^\beta u_p) = 0$ risolubile rispetto alla $\frac{\partial^m u_i}{\partial y^m}$ ($i = 1,\ldots,p$), risulta equivalente ad un problema di Cauchy per un sistema quasi-lineare del tipo (III.2.1).

[(6)]Scrivendo $u,\ldots D^\beta u$ ($|\beta|\le m$), intendiamo che consideriamo tutte le derivate della u di ordine minore od uguale a m.

Dimostriamo questo risultato per un problema particolare

$$\begin{cases} u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}) \\ u(x, 0) = \varphi(x); \;\; u_y(x, 0) = \psi(x) \end{cases} . \tag{III.2.2}$$

Supponiamo che u sia soluzione del problema (III.2.2) e poniamo

$$p_1 = u_x, \;\; p_2 = u_y, \;\; p_{11} = u_{xx}, \;\; p_{12} = u_{xy}, \;\; p_{22} = u_{yy} \; .$$

Risulta ovviamente

$$\frac{\partial u}{\partial y} = p_2, \;\; \frac{\partial p_1}{\partial y} = p_{12}, \;\; \frac{\partial p_2}{\partial y} = p_{22}, \;\; \frac{\partial p_{11}}{\partial y} = \frac{\partial p_{12}}{\partial x}, \;\; \frac{\partial p_{12}}{\partial y} = \frac{\partial p_{22}}{\partial x} \; .$$

Inoltre, essendo

$$p_{22} = F(x, y, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}) \; ,$$

si ha

$$\begin{gathered} \frac{\partial p_{22}}{\partial y} = F_y(x, y, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}) + F_u(x, y, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}) \frac{\partial u}{\partial y} + \\ F_{p_1}(x, y, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}) \frac{\partial p_1}{\partial y} + F_{p_2}(x, y, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}) \frac{\partial p_2}{\partial y} + \\ F_{p_{11}}(x, y, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}) \frac{\partial p_{11}}{\partial y} + F_{p_{12}}(x, y, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}) \frac{\partial p_{12}}{\partial y} \; . \end{gathered}$$

Quindi il vettore $(u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22})$ è soluzione del seguente sistema quasi-lineare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = p_2 \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial y} = p_{12} \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial y} = p_{22} \\ \dfrac{\partial p_{11}}{\partial y} = \dfrac{\partial p_{12}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial p_{12}}{\partial y} = \dfrac{\partial p_{22}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial p_{22}}{\partial y} = F_y + F_u p_2 + F_{p_1} p_{12} + F_{p_2} p_{22} + F_{p_{11}} \dfrac{\partial p_{12}}{\partial x} + F_{p_{12}} \dfrac{\partial p_{22}}{\partial x} \end{cases} \tag{III.2.3}$$

e soddisfa le seguenti condizioni iniziali;

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ p_1(x,0) = \varphi'(x) \\ p_2(x,0) = \psi(x) \\ p_{11}(x,0) = \varphi''(x) \\ p_{12}(x,0) = \psi'(x) \\ p_{22}(x,0) = F(x,0,\varphi(x),\varphi'(x),\psi(x),\varphi''(x),\psi'(x)) \end{cases} . \tag{III.2.4}$$

Abbiamo quindi fatto vedere che se u è soluzione del problema di Cauchy (III.2.2), allora $(u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22})$ è soluzione del problema di Cauchy (III.2.3), (III.2.4).

Viceversa, supponiamo che $(u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22})$ soddisfi (III.2.3), (III.2.4). Poniamo

$$\begin{cases} \delta_1 = u_x - p_1 \\ \delta_2 = u_y - p_2 \\ \delta_{11} = u_{xx} - p_{11} \\ \delta_{12} = u_{xy} - p_{12} \\ \delta_{22} = u_{yy} - p_{22} \end{cases}$$

È ovvio che $\delta_2 \equiv 0$; dimostriamo che anche le altre δ sono tutte nulle. Infatti risulta

$$\delta_{22} = u_{yy} - p_{22} = u_{yy} - \frac{\partial p_2}{\partial y} = u_{yy} - u_{yy} \equiv 0 \ .$$

Inoltre

$$\frac{\partial \delta_{12}}{\partial y} = u_{xyy} - \frac{\partial p_{12}}{\partial y} = u_{xyy} - \frac{\partial p_{22}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u_{yy} - p_{22}) = \frac{\partial \delta_{22}}{\partial x} \equiv 0$$

ed essendo

$$\delta_{12}(x,0) = u_{xy}(x,0) - p_{12}(x,0) = \frac{\partial}{\partial x} u_y(x,0) - p_{12}(x,0) =$$
$$\frac{\partial}{\partial x} p_2(x,0) - \psi'(x) = \psi'(x) - \psi'(x) = 0$$

si trae [7] $\delta_{12} \equiv 0$.

Analogamente,essendo

$$\frac{\partial \delta_{11}}{\partial y} = u_{xyy} - \frac{\partial p_{11}}{\partial y} = u_{xyy} - \frac{\partial p_{12}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u_{xy} - p_{12}) \equiv 0$$

[7] Stiamo usando il fatto che se una funzione $f(x,y)$ è tale che $f_y \equiv 0$ ed inoltre $f(x,0) = 0$, allora $f \equiv 0$. Infatti, dall'essere la derivata rispetto alla y identicamente nulla, segue $f(x,y) = c(x)$ ed essendo, d'altra parte, $0 = f(x,0) = c(x)$, si trae $f \equiv 0$.

e
$$\delta_{11}(x,0) = u_{xx}(x,0) - p_{11}(x,0) = \varphi''(x) - \varphi''(x) = 0 \ ,$$
deve essere $\delta_{11} \equiv 0$. Inoltre
$$\frac{\partial \delta_1}{\partial y} = u_{xy} - \frac{\partial p_1}{\partial y} = u_{xy} - p_{12} \equiv 0$$
insieme al fatto che
$$\delta_1(x,0) = u_{xy} - \frac{\partial p_1}{\partial y} = u_{xy} - p_{12} = 0$$
implica che $\delta_1 \equiv 0$. Infine, l'ultima delle equazioni (III.2.3), può essere scritta come
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[p_{22} - F(x,y,u,p_1,p_2,p_{11},p_{12})\right] = 0 \ ;$$
essendo, per la ultima delle (III.2.4),
$$p_{22}(x,0) - F(x,0,u,p_1(x,0),p_2(x,0),p_{11}(x,0),p_{12}(x,0)) = 0$$
si trae
$$p_{22} - F(x,y,u,p_1,p_2,p_{11},p_{12}) \equiv 0 \ .$$
Ma tutte le δ sono identicamente nulle e quindi possiamo dire che
$$u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy})$$
ed inoltre
$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ u_y(x,0) = \psi(x) \ .$$
È così dimostrata l'equivalenza tra i due problemi di Cauchy (III.2.2) e (III.2.3), (III.2.4).

Osservazione 1. È bene osservare che **non** abbiamo dimostrato l'equivalenza tra le equazioni differenziali, ma soltanto tra i problemi di Cauchy (nella seconda parte del teorema abbiamo più volte usato le condizioni iniziali !). In effetti l'equazione $u_{yy} = F$ ed il sistema (III.2.3) **non** sono equivalenti. Si consideri, ad esempio, l'equazione $u_{yy} = 0$ (ossia $F \equiv 0$); il vettore $(y^2, 0, 2y, 0, 0, 2)$ è soluzione del sistema (III.2.3), come si verifica immediatamente, ma la funzione y^2 non soddisfa l'equazione $u_{yy} = 0$. Ciò contrasta con quanto succede per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie; ad esempio, l'equazione $y'' = f(x,y,y')$ è perfettamente equivalente al sistema $y' = p, \ p' = f(x,y,p)$.

Alla dimostrazione del teorema di Cauchy-Kowalesky premettiamo un paio di lemmi.

III.4 *Sia $k = (k_1, \ldots, k_p)$ un multi-indice; risulta*
$$k! \leq |k|! \ . \tag{III.2.5}$$

Dimostriamo questo lemma per induzione sulla dimensione p del multi-indice. Il lemma è evidente per $p = 1$. Inoltre, per $p = 2$, risulta

$$k! = k_1!\, k_2! = k_1!\, (|k| - k_1)! \leq |k|!$$

dato che

$$1 \leq \binom{|k|}{k_1} = \frac{|k|!}{k_1!\, (|k| - k_1)!} \; .$$

Sia ora $p \geq 2$ e supponiamo vero il lemma per $p - 1$; allora

$$k! = k_1! \dots k_{p-1}!\, k_p! \leq (k_1 + \dots + k_{p-1})!\, k_p!$$

ed essendo il lemma vero per $p = 2$:

$$k! \leq (k_1 + \cdots k_{p-1})!\, k_p! \leq [(k_1 + \cdots k_{p-1}) + k_p]! = |k|! \; .$$

Il lemma è così dimostrato per ogni intero positivo p.

III.5 *Dati comunque i numeri reali $a_1, \dots, a_n$ e fissato l'intero positivo p, risulta*

$$(a_1 + \cdots + a_n)^p = \sum_{|k|=p} \frac{p!}{k!} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \; .$$

Il lemma è vero per $n = 1$, qualunque sia p. Supponiamolo vero per $n - 1$ (qualunque sia p). Posto $\alpha = a_1 + \cdots + a_{n-1}$, per la formula del binomio di Newton, si ha

$$(a_1 + \cdots + a_n)^p = (\alpha + a_n)^p = \sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} \alpha^{p-h} a_n^h$$

e inoltre, per l'ipotesi induttiva,

$$\alpha^{p-h} = (a_1 + \cdots a_{n-1})^{p-h} = \sum_{|\beta|=p-h} \frac{(p-h)!}{\beta!} a_1^{\beta_1} \dots a_{n-1}^{\beta_{n-1}} \; .$$

Possiamo allora scrivere

$$(a_1 + \cdots + a_n)^p = \sum_{h=0}^{p} \frac{p!}{h!(p-h)!}\, a_n^h \sum_{|\beta|=p-h} \frac{(p-h)!}{\beta!} a_1^{\beta_1} \dots a_{n-1}^{\beta_{n-1}} =$$

$$\sum_{h=0}^{p} \sum_{|\beta|=p-h} \frac{p!}{\beta! h!} a_1^{\beta_1} \dots a_{n-1}^{\beta_{n-1}} a_n^h$$

ossia la tesi, non appena si osservi che, posto $k = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, h)$, risulta

$$\sum_{h=0}^{p} \sum_{|\beta|=p-h} = \sum_{|k|=p}$$

dato che ad ogni multi-indice $k = (k_1, \ldots, k_n)$ di lunghezza p corrisponde ed è unico un $\beta = (k_1, \ldots, k_{n-1})$ di lunghezza $|\beta| = p - k_n$ con $0 \leq k_n \leq p$ e viceversa.

III.6 *Supponiamo che*

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = F_i(x, y, u_1, \ldots, u_p, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u_p}{\partial x}) \qquad i = 1, \ldots, p$$

con $F_i(x, y, u_1, \ldots, u_p, s_1, \ldots, s_p) \in C^\infty$. *Per ogni multi-indice* $\alpha \in \mathcal{M}$, *con* $|\alpha| = k > 0$, *e per ogni* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *esiste un polinomio di* $\frac{pk(k+3)}{2}$ *variabili*

$$P_i^\alpha(t_{0,1}, \ldots, t_{0,p}, \ldots, t_{\beta,1}, \ldots, t_{\beta,p}, s_{1,1}, \ldots, s_{1,p}, \ldots, s_{k,1}, \ldots, s_{k,p}) \qquad (|\beta| \leq k-1)$$

(per il significato da attribuire a β, *cfr. nota* [6], *p.30) a coefficienti positivi tale che*

$$D^\alpha u_i = P_i^\alpha(F_1, \ldots, F_p, \ldots, D^\beta F_1, \ldots, D^\beta F_p, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u_p}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u_1}{\partial x^k}, \ldots, \frac{\partial^k u_p}{\partial x^k}) \quad (|\beta| \leq k-1) \tag{III.2.6}$$

dove le varie derivate delle F_i *si intendono calcolate in*

$$\left(x, y, u_1(x,y), \ldots, u_p(x,y), \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u_p(x,y)}{\partial x}\right) .$$

Dimostriamolo per induzione sulla lunghezza k del multi-indice α. Il lemma è evidentemente vero per $k = 1$. Supponiamo che (III.2.6) valga; allora [8]

$$\frac{\partial}{\partial x} D^\alpha u_i = \sum_{j=1}^{p} \left[\sum_{|\beta| \leq k-1} \frac{\partial P_i^\alpha}{\partial t_{\beta,j}} \frac{\partial}{\partial x}[D^\beta F_j] + \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial P_i^\alpha}{\partial s_{h,j}} \frac{\partial^{h+1} u_j}{\partial x^{h+1}} \right] \tag{III.2.7}$$

[8] Si noti che il simbolo $\frac{\partial}{\partial x}[D^\beta F_j]$ indica la derivata rispetto alla variabile x della funzione composta $D^\beta F_j \left(x, y, u_1(x,y), \ldots, u_p(x,y), \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u_p(x,y)}{\partial x}\right)$, mentre con $\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial x}$ denotiamo la derivata della funzione $D^\beta F_j$ rispetto alla prima variabile x.

e quindi la tesi per questa derivata, non appena si osservi che

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[D^\beta F_j\left(x,y,u_1(x,y),\dots,u_p(x,y),\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x},\dots,\frac{\partial u_p(x,y)}{\partial x}\right)\right]=$$
$$\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial x}+\sum_{h=1}^p\left(\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial u_h}\frac{\partial u_h}{\partial x}+\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial s_h}\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2}\right)\ .$$

Per quanto riguarda la derivata di$D^\alpha u_i$ rispetto ad y si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}D^\alpha u_i=\sum_{j=1}^p\left[\sum_{|\beta|\le k-1}\frac{\partial P_i^\alpha}{\partial t_{\beta,j}}\frac{\partial}{\partial y}[D^\beta F_j]+\sum_{h=1}^k\frac{\partial P_i^\alpha}{\partial s_{h,j}}\frac{\partial^{h+1}u_j}{\partial y\partial x^h}\right]$$

Siccome

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[D^\beta F_j\left(x,y,u_1(x,y),\dots,u_p(x,y),\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x},\dots,\frac{\partial u_p(x,y)}{\partial x}\right)\right]=$$
$$\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial y}+\sum_{i=1}^p(\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial s_i}\frac{\partial^2 u_i}{\partial y\partial x})=$$
$$\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial y}+\sum_{i=1}^p(\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial u_i}F_i+\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial s_i}\frac{\partial}{\partial x}[F_i])=$$
$$\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial y}+\sum_{i=1}^p\left(\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial u_i}F_i+\frac{\partial D^\beta F_j}{\partial s_i}\left[\frac{\partial F_i}{\partial x}+\sum_{j=1}^p(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial F_i}{\partial s_j}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2})\right]\right)$$

ed essendo per la (III.2.7)

$$\frac{\partial^{h+1}u_j}{\partial y\partial x^h}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^h u_j}{\partial x^{h-1}\partial y}=\sum_{l=1}^p\left[\sum_{|\beta|\le h-1}\frac{\partial P_j^{h-1,1}}{\partial t_{\beta,l}}\frac{\partial}{\partial x}[D^\beta F_l]+\sum_{r=1}^h\frac{\partial P_j^{h-1,1}}{\partial s_{r,l}}\frac{\partial^{r+1}u_l}{\partial x^{r+1}}\right]=$$
$$\sum_{l=1}^p\sum_{|\beta|\le h-1}\frac{\partial P_j^{h-1,1}}{\partial t_{\beta,l}}\left[\frac{\partial D^\beta F_l}{\partial x}+\sum_{i=1}^p\left(\frac{\partial D^\beta F_l}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial D^\beta F_l}{\partial s_i}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)\right]+$$
$$\sum_{l=1}^p\sum_{r=1}^h\frac{\partial P_j^{h-1,1}}{\partial s_{r,l}}\frac{\partial^{r+1}u_l}{\partial x^{r+1}}\ ,$$

si trae la tesi.

Ad esempio si ha

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\frac{\partial u_i}{\partial x}\ ;\qquad \frac{\partial u_i}{\partial y}=F_i\ ;$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial s_j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right];$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 y} = \frac{\partial F_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial s_j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial y \partial x} \right] =$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_j} F_j + \frac{\partial F_i}{\partial s_j} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x} + \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{\partial F_j}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial F_j}{\partial s_k} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \right] \right) \right].$$

III.7 *(Cauchy-Kowalesky). Siano A_{ij}, B_i funzioni analitiche di $(x, y, u_1, \ldots, u_p)$ in un intorno di $(0, \ldots, 0)$ e siano φ_i funzioni analitiche della x in un intorno dello 0. Allora esiste ed è unica la soluzione analitica del problema di Cauchy (III.2.1) in un intorno di $(0, 0)$.*

Cominciamo coll'osservare che è possibile fare due ipotesi semplificative non restrittive.

La prima è supporre che le φ_i sono tutte nulle. Infatti, sia u una soluzione di (III.2.1); poniamo $\tilde{u}_i(x, y) = u_i(x, y) - \varphi_i(x)$. Risulta

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} = \frac{\partial u_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^{p} A_{ij}(x, y, u_1, \ldots, u_p) \frac{\partial u_j}{\partial x} + B_i(x, y, u_1, \ldots, u_p) =$$

$$\sum_{j=1}^{p} A_{ij}(x, y, \tilde{u}_1 + \varphi_1', \ldots, \tilde{u}_p + \varphi_p') \left[\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x} + \varphi_j'(x) \right] + B_i(x, y, \tilde{u}_1 + \varphi_1', \ldots, \tilde{u}_p + \varphi_p')$$

Posto, quindi,

$$\widetilde{A}_{ij}(x, y, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_p) = A_{ij}(x, y, \tilde{u}_1 + \varphi_1', \ldots, \tilde{u}_p + \varphi_p') \ ,$$

$$\widetilde{B}_i(x, y, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_p) = \sum_{j=1}^{p} A_{ij}(x, y, \tilde{u}_1 + \varphi_1', \ldots, \tilde{u}_p + \varphi_p') \varphi_j' + B_i(x, y, \tilde{u}_1 + \varphi_1', \ldots, \tilde{u}_p + \varphi_p')$$

le $\tilde{u}_i$ risultano soluzioni del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \widetilde{A}_{ij}(x, y, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_p) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x} + \widetilde{B}_i(x, y, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_p) \\ \tilde{u}_i(x, 0) = 0 \qquad i = 1, \ldots, p \end{cases}$$

(si osservi che, se le A_{ij}, B_i, φ_i sono analitiche, allora lo sono anche le $\widetilde{A}_{ij}, \widetilde{B}_i$). In maniera analoga si dimostra il viceversa e ciò dimostra che non è restrittivo supporre le φ_i tutte nulle. Considereremo, quindi, d'ora in avanti il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} A_{ij}(x, y, u_1, \ldots, u_p) \frac{\partial u_j}{\partial x} + B_i(x, y, u_1, \ldots, u_p) \qquad i = 1, \ldots, p \\ u_i(x, 0) = 0 \qquad i = 1, \ldots, p \end{cases} . \tag{III.2.8}$$

La seconda ipotesi è la seguente. Supponiamo $(u_1, \dots, u_p)$ soluzione del problema (III.2.8) e poniamo $u_0(x,y) = y$; allora $(u_0, u_1, \dots, u_p)$ è soluzione del seguente problema (quasi-lineare !)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} A_{ij}(x, u_0, u_1, \dots, u_p) \frac{\partial u_j}{\partial x} + B_i(x, u_0, u_1, \dots, u_p) \qquad i = 1, \dots, p \\ u_i(x, 0) = 0 \qquad i = 0, 1, \dots, p \end{cases} . \tag{III.2.9}$$

Viceversa, sia $(u_0, u_1, \dots, u_p)$ soluzione di (III.2.9); essendo $\frac{\partial u_0}{\partial y} = 1$ si ha $u_0(x,y) = y + c(x)$ ed essendo $0 = u_0(x,0) = c(x)$, si deduce $u_0(x,y) = y$. Allora $(u_1, \dots, u_p)$ sarà soluzione di (III.2.8). Quindi non è restrittivo supporre che i coefficienti A_{ij}, B_i non dipendono dalla variabile y.

Dimostreremo allora il teorema di Cauchy-Kowalesky considerando unicamente problemi del tipo seguente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} A_{ij}(x, u_1, \dots, u_p) \frac{\partial u_j}{\partial x} + B_i(x, u_1, \dots, u_p) \qquad i = 1, \dots, p \\ u_i(x, 0) = 0 \qquad i = 1, \dots, p \end{cases} \tag{III.2.10}$$

senza ledere per questo la generalità. Faremo vedere che esiste ed è unica una soluzione analitica di (III.2.10):

$$u_i(x,y) = \sum_{|h|=0}^{\infty} c_h^i x^{h_1} y^{h_2} .$$

Per ipotesi i coefficienti sono sviluppabili in serie di potenze:

$$A_{ij}(x, u_1, \dots, u_p) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \alpha^{ij}_{k_0 k_1 \dots k_p} x^{k_0} u_1^{k_1} \dots u_p^{k_p}$$

$$B_i(x, u_1, \dots, u_p) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \beta^{i}_{k_0 k_1 \dots k_p} x^{k_0} u_1^{k_1} \dots u_p^{k_p}$$

(dove $k = (k_0, k_1, \dots, k_p)$) assolutamente convergenti in un intorno dell'origine, diciamo nell'intervallo

$$\{(x, u_1, \dots, u_p) \mid |x| \le r, \ |u_1| \le r, \dots |u_p| \le r\} .$$

Esiste allora una costante M tale che

$$|\alpha^{ij}_k| r^{|k|} \le M; \quad |\beta^i_k| r^{|k|} \le M, \qquad \forall\ k \in \mathcal{M}, \ i,j = 1, \dots, p .$$

Tenendo presente (III.2.5) possiamo scrivere

$$\left.\begin{array}{l}|\alpha_k^{ij}| \\ \\ |b_k^i|\end{array}\right\} \leq \frac{M}{r^{|k|}} \leq \frac{M}{r^{|k|}}\frac{|k|!}{k!}$$

e quindi la serie

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{M}{r^{|k|}}\frac{|k|!}{k!} x^{k_0} u_1^{k_1} \dots u_p^{k_p} \tag{III.2.11}$$

è una serie maggiorante tanto le A_{ij} che le B_i. Poniamo allora A^*_{ij}, B^*_i uguali alla serie (III.2.11) e consideriamo il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_i}{\partial y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} A^*_{ij}(x, U_1, \dots, U_p)\frac{\partial U_j}{\partial x} + B^*_i(x, U_1, \dots, U_p) \qquad i = 1, \dots, p \\ U_i(x, 0) = 0 \qquad i = 1, \dots, p \end{cases} . \tag{III.2.12}$$

Facciamo vedere che dall'essere $A_{ij} << A^*_{ij}$, $B_i << B^*_i$ segue $u_i << U_i$.

In base al lemma III.6, i coefficienti dello sviluppo di u_i sono dati da [9]

$$c_h^i = \frac{1}{h!} D^h u_i(0,0) =$$

$$\frac{1}{h!} P_i^h(F_1(0, \dots, 0), \dots, F_p(0, \dots, 0), \dots, D^\beta F_1(0, \dots, 0), \dots, D^\beta F_p(0, \dots, 0), 0, \dots, 0)$$
$$(|\beta| \leq |h| - 1)$$

dove

$$F_i(x, u_1, \dots, u_p, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots \frac{\partial u_p}{\partial x}) = \sum_{j=1}^{p} A_{ij}(x, u_1, \dots, u_p)\frac{\partial u_j}{\partial x} + B_i(x, u_1, \dots, u_p) .$$

Ciò dimostra, intanto, che la soluzione analitica, se esiste, è unica (si ricordi il principio di identità per le funzioni analitiche !).

Analogamente i coefficienti dell'eventuale soluzione analitica di (III.2.12)

$$U_i(x, y) = \sum_{|h|=0}^{\infty} \gamma_h^i x^{h_1} y^{h_2}$$

sono dati da

$$\gamma_h^i = \frac{1}{h!} D^h U_i(0,0) =$$

$$\frac{1}{h!} P_i^h(F^*_1(0, \dots, 0), \dots, F^*_p(0, \dots, 0), \dots, D^\beta F^*_1(0, \dots, 0), \dots, D^\beta F^*_p(0, \dots, 0), 0, \dots, 0)$$
$$(|\beta| \leq |h| - 1)$$

[9] Dall'essere $u_i(x, 0) = 0$ segue $\frac{\partial^h u_i}{\partial x^h}(0, 0) = 0$ per ogni h.

dove

$$F_i^*(x, U_1, \ldots, U_p, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \ldots \frac{\partial U_p}{\partial x}) = \sum_{j=1}^{p} A_{ij}^*(x, U_1, \ldots, U_p) \frac{\partial U_j}{\partial x} + B_i^*(x, U_1, \ldots, U_p) \ .$$

Osserviamo, inoltre, che dall'essere $A_{ij} << A_{ij}^*$, $B_i << B_i^*$, si trae $F_i << F_i^*$; infatti, si tratta di far vedere che

$$|D^\beta F_i(0, \ldots, 0)| \leq D^\beta F_i^*(0, \ldots, 0) \qquad \forall\, \beta \in \mathcal{M} \ . \tag{III.2.13}$$

Ma questo è evidente, non appena si osservi che

$$F_i(x, t_1, \ldots, t_p, s_1, \ldots, s_p) = \sum_{j=1}^{p} A_{ij}(x, t_1, \ldots, t_p) s_j + B_i(x, t_1, \ldots, t_p) =$$
$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{|k|=0}^{\infty} \alpha_k^{ij} x^{k_0} t_1^{k_1} \ldots t_p^{k_p} s_j + \sum_{|k|=0}^{\infty} \beta_k^i x^{k_0} t_1^{k_1} \ldots t_p^{k_p}$$

e

$$F_i^*(x, t_1, \ldots, t_p, s_1, \ldots, s_p) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{M}{r^{|k|}} \frac{|k|!}{k!} x^{k_0} t_1^{k_1} \ldots t_p^{k_p} s_j +$$
$$\sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{M}{r^{|k|}} \frac{|k|!}{k!} x^{k_0} t_1^{k_1} \ldots t_p^{k_p} \ .$$

Tenendo presente che i polinomi di cui al al lemma III.6 hanno tutti i coefficienti positivi, la (III.2.13) implica

$$\begin{gathered} h!\, |c_h^i| = \\ |P_i^h(F_1(0, \ldots, 0), \ldots, F_p(0, \ldots, 0), \ldots, D^\beta F_1(0, \ldots, 0), \ldots, D^\beta F_p(0, \ldots, 0), 0, \ldots, 0)| \leq \\ P_i^h(|F_1(0, \ldots, 0)|, \ldots, |F_p(0, \ldots, 0)|, \ldots, |D^\beta F_1(0, \ldots, 0)|, \ldots, |D^\beta F_p(0, \ldots, 0)|, 0, \ldots, 0) \\ \leq P_i^h(F_1^*(0, \ldots, 0), \ldots, F_p^*(0, \ldots, 0), \ldots, D^\beta F_1^*(0, \ldots, 0), \ldots, D^\beta F_p^*(0, \ldots, 0), 0, \ldots, 0) \\ = h!\, \gamma_h^i \end{gathered}$$

che dimostra $u_i << U_i$. Per completare la dimostrazione occorre ora far vedere che il problema (III.2.12) ammette una soluzione analitica. Cominciamo col determinare la somma della serie (III.2.11); se la sommiamo per diagonali, tenendo presente il lemma III.5, otteniamo

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{M}{r^{|k|}} \frac{|k|!}{k!} x^{k_0} u_1^{k_1} \ldots u_p^{k_p} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|k|=j} \frac{M}{r^{|k|}} \frac{|k|!}{k!} x^{k_0} u_1^{k_1} \ldots u_p^{k_p} =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M}{r^j} \sum_{|k|=j} \frac{|k|!}{k!} x^{k_0} u_1^{k_1} \dots u_p^{k_p} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M}{r^j} (x + u_1 + \cdots u_p)^j =$$
$$\frac{M}{1 - \frac{x+u_1+\cdots u_p}{r}} = \frac{Mr}{r - (x + u_1 + \cdots u_p)} .$$

Si noti che, se $|x + u_1 + \cdots u_p| < r$, la serie converge assolutamente e quindi la (III.2.11) converge con un qualsiasi metodo di sommazione.

Il problema (III.2.12) è quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_i}{\partial y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{Mr}{r - (x + U_1 + \cdots U_p)} \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{Mr}{r - (x + U_1 + \cdots U_p)} \qquad i = 1, \dots, p \\ U_i(x, 0) = 0 \qquad i = 1, \dots, p \end{cases} .$$

Per risolvere tale sistema cerchiamo, ovviamente, una soluzione in cui tutte le componenti sono uguali, ossia cerchiamo una U tale che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{Mpr}{r - (x + pU)} \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{Mr}{r - (x + pU)} \\ U(x, 0) = 0 \end{cases} ; \tag{III.2.14}$$

il vettore $(U_1, \dots, U_p)$ con $U_i = U$ $(i = 1, \dots, p)$ sarà la soluzione cercata. Il problema (III.2.14) può essere riscritto come

$$\begin{cases} Mpr \dfrac{\partial U}{\partial x} + (x + pU - r) \dfrac{\partial U}{\partial y} = -Mr \\ U(x, 0) = 0 \end{cases} ;$$

si tratta di un problema di Cauchy per un'equazione alle derivate parziali quasi-lineare del primo ordine e sappiamo che per risolverla è sufficiente risolvere la seguente famiglia di problemi di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} x' = Mpr \\ y' = x + pU - r \\ U' = -Mr \\ x(s, 0) = s; \ y(s, 0) = 0; \ U(s, 0) = 0. \end{cases}$$

La prima e la terza equazione, tenuto conto delle condizioni iniziali, danno

$$x(s, t) = Mprt + s; \qquad U(s, t) = -Mrt \tag{III.2.15}$$

che, sostituite nella seconda, portano all'equazione per la y

$$y' = s - r$$

da cui

$$y(s,t) = (s-r)t \ .$$

Il sistema

$$\begin{cases} x = Mprt + s \\ y = (s-r)t \end{cases}$$

si risolve facilmente; ricavando s dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, si ottiene

$$y = (x - Mprt - r)t$$

ossia

$$Mprt^2 - (x-r)t + y = 0 \ .$$

Quindi

$$t = \frac{(x-r) \pm \sqrt{(x-r)^2 - 4Mpry}}{2Mpr}$$

che, sostituito nella seconda delle (III.2.15), porta a

$$U(x,y) = -\frac{(x-r) \pm \sqrt{(x-r)^2 - 4Mpry}}{2p} \ ;$$

dovendo essere $U(x,0) = 0$ (per x piccoli !), la soluzione del problema (III.2.14) è

$$U(x,y) = -\frac{(x-r) - \sqrt{(x-r)^2 - 4Mpry}}{2p} \ ,$$

che, come si verifica facilmente, è una funzione analitica in un intorno di $(0,0)$. La dimostrazione è così completa.

Finora abbiamo considerato problemi di Cauchy nei quali i dati erano assegnati sulla retta $y = 0$. Più in generale i dati possono essere assegnati su una curva S. In tal caso è possibile ricondurre questo problema più generale ad un problema di Cauchy del tipo già visto. Consideriamo, ad esempio, il seguente problema di Cauchy relativo ad un'equazione quasi-lineare:

$$\begin{cases} A_{11}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + 2A_{12}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy} + A_{22}(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy} = \\ \hfill B(x,y,u,u_x,u_y) \\ u(x,y) = \varphi(x,y)\,, \ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) = \psi(x,y) \qquad (x,y) \in S \end{cases} \tag{III.2.16}$$

dove S è una curva assegnata del tipo

$$f(x,y) = 0$$

con f di classe C^1 e tale che

$$\text{grad}\, f \neq 0 \ .$$

Ricordiamo che questa condizione assicura l'esistenza in tutti i punti del versore normale

$$\nu = \frac{\text{grad}\, f}{|\text{grad}\, f|} \ .$$

Ricordiamo anche che, conoscendo la u e la sua derivata normale su S, sono note anche u_x e u_y su S.

Supponiamo che il problema (III.2.16) sia *non caratteristico*; ciò significa

$$A_{11}\nu_1^2 + 2A_{12}\nu_1\nu_2 + A_{22}\nu_2^2 \neq 0 \tag{III.2.17}$$

dove i coefficienti A_{ij} si intendono calcolati nei punti (x, y) di S e nei valori (determinati dai dati) $u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)$ corrispondenti. Facciamo vedere che il problema (III.2.16) può ricondursi ad un problema del tipo già considerato.

Essendo grad $f \neq 0$ una delle derivate prime sarà diversa da 0 in $(0, 0)$; supponiamo che sia la f_y. Allora, in un intorno di $(0, 0)$, S potrà essere rappresentata come $(x, \Phi(x))$, dove Φ è una funzione la cui regolarità dipende dalla regolarità di S (ad es. se S è analitica, allora Φ è analitica). Posto

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = y - \Phi(x) \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \eta + \Phi(\xi) \end{cases}$$

la curva S si trasforma nella retta $\eta = 0$. Consideriamo allora la funzione

$$U(\xi, \eta) = u(\xi, \eta + \Phi(\xi)) \ .$$

Risulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\Phi'(\xi) \ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\Phi'(\xi)\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\Phi'(\xi)\right)\Phi'(\xi) =$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\Phi'(\xi) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\Phi'(\xi)^2 - \frac{\partial U}{\partial \eta}\Phi''(\xi) \ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\Phi'(\xi) \ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \ .$$

Allora abbiamo

$$
\begin{gathered}
A_{11}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + 2A_{12}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy} + A_{22}(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy} = \\
A_{11}(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta)[U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta}\Phi' + U_{\eta\eta}\Phi'^2 - U_\eta\Phi'']+ \\
2A_{12}(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta)[U_{\xi\eta} - U_{\eta\eta}\Phi']+ \\
A_{22}(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta)U_{\eta\eta}\ .
\end{gathered}
$$

Quindi, posto

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{A}_{11}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) = A_{11}(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta)\ , \\
&\widetilde{A}_{12}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) = A_{12}(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta) - \\
&\qquad\qquad A_{11}(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta)\,\Phi'(\xi)\ , \\
&\widetilde{A}_{22}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) = A_{11}(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta)\,\Phi'(\xi)^2 - \\
&\qquad 2A_{12}(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta)\,\Phi'(\xi) + A_{22}(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta)\ , \\
&\widetilde{B}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) = B(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta) + \\
&\qquad\qquad A_{11}(\xi,\eta+\Phi(\xi),U,U_\xi - U_\eta\Phi'(\xi),U_\eta)\,U_\eta\,\Phi''(\xi)\ ,
\end{aligned}
$$

u è soluzione dell'equazione nella (III.2.16) se e solo se U è soluzione dell'equazione

$$
\begin{gathered}
\widetilde{A}_{11}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)U_{\xi\xi} + 2\widetilde{A}_{12}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)U_{\xi\eta} + \widetilde{A}_{22}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)U_{\eta\eta} = \\
\widetilde{B}(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)
\end{gathered}
$$

Inoltre le condizioni sulla curve S di (III.2.16) diventano condizioni sulla retta $\eta = 0$; infatti la prima si trasforma in

$$
U(\xi,0) = \varphi(\xi,\Phi(\xi))\ ,
$$

mentre la seconda, essendo

$$
\frac{\partial u}{\partial \nu} = u_x\nu_1 + u_y\nu_2 = (U_\xi - U_\eta\Phi')\nu_1 + U_\eta\nu_2 = -(U_\xi - U_\eta\Phi')\frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} + U_\eta\frac{1}{\sqrt{1+\Phi'^2}}\ ,
$$

si può scrivere come

$$
U_\eta(\xi,0) = \frac{1}{\sqrt{1+\Phi'^2}}\left(\psi(\xi,\Phi(\xi) + \frac{d}{d\xi}[\varphi(\xi,\Phi(\xi))]\,\frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}}\right)
$$

(si noti, infatti, che $U_\xi(\xi,0) = \frac{d}{d\xi}[\varphi(\xi,\Phi(\xi))]$).

Osserviamo inoltre che il coefficiente che moltiplica $U_{\eta\eta}$ è $\widetilde{A}_{22} = A_{11}\Phi'^2 - 2A_{12}\Phi' + A_{22}$ il quale è diverso da zero per la condizione (III.2.17). Abbiamo così ottenuto un problema di Cauchy del tipo (III.2.2) e quindi equivalente ad un problema del tipo (III.2.1). Infine osserviamo che se i coefficienti A_{ij}, B, il termine noto φ e la curva S (ossia la funzione Φ) sono analitiche, allora il nuovo problema avrà i coefficienti e il termine noto analitico e, in questo caso, sarà possibile applicare il teorema di Cauchy-Kowalesky.

Per semplicità abbiamo considerato in dettaglio il caso di funzioni di due variabili, ma dimostrazioni analoghe portano agli stessi risultati in un numero qualsiasi di variabili. Ad esempio, per quanto riguarda il teorema di Cauchy-Kowalesky, invece dell'asse delle x si considererà l'iperpiano $x_n = 0$; dove compaiono le derivate rispetto alla x bisognerà considerare le derivate rispetto a $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ed il ruolo della y sarà giocato dalla x_n. ll teorema di Cauchy-Kowalesky fornirà quindi l'esistenza ed unicità (in piccolo) della soluzione analitica del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \sum_{h=1}^{n-1} A_{ijh}(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p) \dfrac{\partial u_j}{\partial x_h} + B_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, \ldots, p \\ u_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{cases} . \tag{III.2.18}$$

Considerazioni analoghe a quelle svolte nel teorema III.3, poi, mostrano che il problema di Cauchy per equazioni quasi-lineari di ordine m

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_1, \ldots, x_n, u, \ldots, D^\beta u) D^\alpha u = B(x_1, \ldots, x_n, u, \ldots, D^\beta u) \quad (|\beta| \leq m-1) \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \qquad j = 0, \ldots, m-1 \end{cases} \tag{III.2.19}$$

è equivalente al problema di Cauchy (III.2.18), purché (III.2.19) sia *non caratteristico*, ossia

$$A_{(0,\ldots,0,m)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, u, \ldots, D^\beta u) \neq 0$$

sull'iperpiano $x_n = 0$ (si noti che su questo iperpiano, grazie alle condizioni iniziali, sono note tutte le derivate della u fino all'ordine $m-1$).

Come abbiamo fatto in precedenza, possiamo considerare problemi di Cauchy dove i dati sono assegnati su una varietà. Precisamente supponiamo che la varietà portante Σ i dati sia definita come

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

con $f \in C^1$ tale che

$$\operatorname{grad} f \neq 0 \ .$$

Come versore $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ normale alla superficie Σ prendiamo il vettore

$$\nu = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \ .$$

Un operatore del tipo
$$\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$$
sarà detta *derivata direzionale*; se, in particolare,
$$\sum_{j=1}^{n} a_j \nu_j = 0$$
tale derivata sarà detta *tangenziale*. Oltre alla derivata normale
$$\sum_{j=1}^{n} \nu_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$$
si definiscono le *derivate normali successive*
$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = \sum_{|\beta|=k} \nu^\beta D^\beta u \ .$$

Il problema di Cauchy per un'equazione differenziale di ordine m consiste nel cercare una soluzione dell'equazione tale che lei e le sue derivate normali successive fino all'ordine $m-1$ coincidono con delle funzioni assegnate sulla superficie Σ. Consideriamo, ad esempio, il problema di Cauchy per un'equazione quasi-lineare
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_1, \ldots, x_n, u, \ldots, D^\beta u) D^\alpha u = B(x_1, \ldots, x_n, u, \ldots, D^\beta u) \quad (|\beta| \leq m-1) \\ \displaystyle\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(x) = \varphi_j(x) \quad x \in \Sigma \qquad j = 0, \ldots, m-1 \end{cases}$$
Si può dimostrare che i dati di Cauchy determinano, su Σ, tutte le derivate della u di ordine minore od uguale ad $m-1$. Se si suppone
$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha \nu^\alpha \neq 0$$
(i coefficienti A_α si intendono calcolati in $x \in \Sigma$ e nei corrispondenti $u(x), \ldots, D^\beta u(x)$), il problema è detto *non caratteristico*. In questo caso ci si può ricondurre ad un problema (III.2.18). Omettiamo i dettagli.

3 La buona posizione del problema di Cauchy.

Hadamard dice *ben posto* un problema relativo alle equazioni differenziali se sussiste un teorema di esistenza, di unicità e inoltre c'è la dipendenza continua dai dati. Quest'ultima significa che a piccole variazioni dei dati corrispondono piccole variazioni della soluzione. In termini più precisi, introdotta una norma funzionale $||\cdot||_d$ nello spazio dei dati ed una norma $||\cdot||_s$ nello spazio in cui si cerca la soluzione, deve sussistere una disuguaglianza del tipo

$$||u-v||_s \leq K\,||u-v||_d$$

per ogni coppia di soluzioni u, v dell'equazione differenziale. Nel caso di equazioni lineari, basta verificare che:

$$||u||_s \leq K\,||u||_d$$

per ogni soluzione u dell'equazione differenziale.

Hadamard fu il primo a ritenere che il problema di Cauchy non è ben posto. Per illustrare la sua idea, consideriamo per l'equazione di Laplace

$$\Delta_2 u = 0$$

il seguente problema di Cauchy relativo alla curva portante i dati $y = 0$:

$$u(x,0) = \frac{\cos(nx)}{n^p}\ ,\ \ u_y(x,0) = 0 \tag{III.3.1}$$

dove n e p sono numeri interi positivi fissati. In un intorno di $(0,0)$ la soluzione, come si verifica facilmente, è data da

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n^p}\cosh(ny)\,\cos(nx)\ .$$

Fissato un qualsiasi intero k, consideriamo, come norma nello spazio dei dati, la norma

$$||\alpha||_d = \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in[-\delta,\delta]} |\alpha^{(j)}(t)|$$

per un certo $\delta > 0$. Ora, essendo

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}[u_n(t,0)]\right| \leq n^{j-p}\ ,$$

si avrà

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n||_d = 0 \tag{III.3.2}$$

purché si sia scelto un $p > k$. Come norma nello spazio delle soluzioni prendiamo

$$||u||_s = \sum_{0\leq|\beta|\leq h} \left(\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |D^\beta u(x,y)|\right)$$

dove h è un intero fissato ed Ω è un intorno di $(0,0)$. Se ci fosse la dipendenza continua dai dati, dovremmo avere

$$||u_n||_s \leq K\,||u_n||_d$$

e quindi, per la (III.3.2), che

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n||_s = 0 \ .$$

Ma questo non accade, perché per $x = 0$ ed $y > 0$ si ha

$$|u_n(0,y)| = \frac{\cosh(ny)}{n^p} \to +\infty$$

e quindi, qualunque sia la scelta di h, risulta

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n||_s = +\infty \ .$$

Questo contro-esempio mostra che prendendo le norme usuali degli spazi C^k con k qualsiasi non c'è la dipendenza continua dai dati. Ciò ha portato diversi matematici, a partire da Hadamard, a considerare poco interessante il teorema di Cauchy-Kowalesky, perché, appunto, relativo ad un problema mal posto. Ecco cosa ha scritto, ad esempio, il celebre matematico Lars Hörmander nel suo libro "Linear Partial Differential Operators" Springer, (p.115):
It was emphasized by Hadamard that the Cauchy-Kowalesky theorem is of limited value because the solution u need not depend continuously on f and φ even if these functions are given the C^∞ topology and a very week topology is used for u. (In the terminology of Hadamard, the Cauchy problem need not be correctly posed.)

Tuttavia non appare del tutto corretta questa critica; ecco cosa scriveva Gaetano Fichera a tale proposito ("Teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse"):
Tale presunta instabilità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Cauchy-Riemann è, a parere di chi scrive, conseguenza di una discrepanza logica nella quale, da Hadamard in poi, incorrono gli analisti che si occupano della questione. In effetti, dato che per assicurare l'esistenza della w, oltre che $\Gamma \in C^\omega$, occorre anche assumere $W \in C^\omega$, appare ingiustificato considerare la norma per la W, pensando questa come funzione della sola variabile t.

Insomma, se per avere il teorema di esistenza ed unicità bisogna avere "tutto analitico", non sembra corretto andare a considerare delle norme (ad esempio quelle C^k) le quali **non** tengono conto della natura analitica del problema. Per quanto riguarda l'esempio di Hadamard, ecco come Fichera spiegava la presunta instabilità. Introdotta la variabile complessa $\zeta = x + i\xi$, consideriamo la funzione

$$W(\zeta) = \frac{\cos(n\zeta)}{n^p}$$

la quale è la (unica!) funzione olomorfa della variabile ζ che per ζ reale si riduce al termine noto della (III.3.1). Se prendiamo, allora, come norma per il dato la seguente

$$\max_{\zeta \in \overline{A}} |W(\zeta)|$$

dove A è un aperto contenente $(0,0)$, essendo

$$|W(0+i\xi)| = \frac{\cosh(n\xi)}{n^p} ,$$

si ha

$$|W(0+i\xi)| \to +\infty$$

per $\xi \neq 0$ e quindi i dati **non** tendono a zero. Fichera ha altresì dimostrato che, nel caso del problema di Cauchy per il sistema di Cauchy-Riemann, con norme di questo tipo c'è la dipendenza continua dai dati e quindi, a patto di prendere norme opportune, tale problema risulta ben posto (cfr. "Teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse", Corso di Analisi Superiore 1982-83, p.122-123).

Ecco come Fichera concludeva: *S'impone, ovviamente, una rivalutazione del teorema di Cauchy-Kowalesky ..., rivalutazione certamente possibile, usando norme che considerino i dati come funzioni di variabili complesse, anziché reali, così come abbiamo fatto per il sistema di Cauchy-Riemann. L'espletamento di tale programma richiede solo il superamento di difficoltà formali.* Un teorema generale di questo tipo è stato poi dimostrato da W. Walter in "An elementary proof of the Cauchy-Kowalevsky theorem", *Amer. Math. Monthly* 92 (1985), 115–126.

Capitolo IV
L'equazione di Laplace: un approccio classico.

1 Le funzioni armoniche: prime proprietà.

L'operatore
$$\Delta_2 = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_h^2}$$
è detto *operatore di Laplace*. Le funzioni soluzioni dell'equazione di Laplace omogenea, ossia le funzioni di classe C^2 tali che
$$\Delta_2 u = 0$$
in un campo Ω sono dette *funzioni armoniche* in Ω.

IV.1 *Sia D un dominio regolare* [10]*e siano $u \in C^0(D) \cap C^1(\mathring{D})$, $v \in C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$. Supponiamo che le derivate prime della u e il laplaciano della v appartengano a $L^1(D)$. Allora*
$$\int_D u\Delta_2 v\, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma - \int_D \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx \tag{IV.1.1}$$
dove ν indica la normale esterna.

È ben noto che, se $f_1, \ldots, f_n$ sono funzioni tali che le derivate $\frac{\partial f_h}{\partial x_h}$ $(h = 1, \ldots, n)$ esistono e sono continue in D, allora vale la formula di Gauss-Green
$$\int_{\partial D} \sum_{h=1}^{n} f_h \nu_h\, d\sigma = \int_D \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_h}{\partial x_h}\, dx\ . \tag{IV.1.2}$$

Ripetendo i ragionamenti impiegati per la dimostrazione del teorema XIII del Fichera-De Vito, Funzioni analitiche di una variabile complessa, Ed. Veschi, (p.26-29), si può dimostrare che tale formula continua a sussistere nell'ipotesi che le derivate $\frac{\partial f_h}{\partial x_h}$ $(h = 1, \ldots, n)$ esistono continue soltanto all'interno di D e la funzione
$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_h}{\partial x_h}$$
risulta sommabile in D. Posto
$$f_h = u \frac{\partial v}{\partial x_h}$$

[10]Con dominio regolare intendiamo un dominio decomponibile in un numero finito di domini normali regolari. Supporremo, inoltre, per semplicità che la frontiera del dominio sia di classe C^1.

risulta $f_h \in C^0(D) \cap C^1(\mathring{D})$ ed inoltre

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_h}{\partial x_h} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_h}\frac{\partial v}{\partial x_h} + u\Delta_2 v$$

è sommabile in D. Per la (IV.1.2) si ha quindi

$$\int_{\partial D} \sum_{h=1}^{n} f_h \nu_h \, d\sigma = \int_D \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_h}\frac{\partial v}{\partial x_h} + u\Delta_2 v \right) dx \ .$$

Essendo poi

$$\sum_{h=1}^{n} f_h \nu_h = u \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_h}\nu_h = u\frac{\partial v}{\partial \nu}$$

si ha la tesi.

IV.2 *(Formula di Green) Sia D un dominio regolare dello spazio $I\!R^n$. Siano u, v due funzioni appartenenti a $C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$ tali che $\Delta_2 u$, $\Delta_2 v \in L^1(D)$. Allora si ha*

$$\int_D (u\Delta_2 v - v\Delta_2 u) dx = \int_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma \ .$$

In base al teorema precedente, oltre alla (IV.1.1), sussiste anche

$$\int_D v\Delta_2 u \, dx = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma - \int_D \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u \, dx \ .$$

Sottraendo membro a membro dalla (IV.1.1) si ottiene la tesi.

IV.3 *Siano u, $v \in C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$ due funzioni armoniche in $\mathring{D}$. Allora*

$$\int_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma = 0 \ .$$

Segue immediatamente dal teorema IV.2.

IV.4 *Sia $u \in C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$ una funzione tale che $\Delta_2 u \in L^1(D)$. Si ha*

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = \int_D \Delta_2 u \, dx. \tag{IV.1.3}$$

Se, in particolare, u è armonica:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = 0 \ .$$

Basta porre $v(x) = 1$ nel teorema IV.2.

IV.5 *Sia* $u \in C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$ *una funzione armonica in* $\mathring{D}$. *Si ha*

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_D |\operatorname{grad} u|^2 dx\,. \tag{IV.1.4}$$

Si ponga $v = u$ nella (IV.1.1).

Questo teorema fornisce il seguente *teorema di unicità* per funzioni armoniche.

IV.6 *Siano* $u, v \in C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$ *due funzioni armoniche in* $\mathring{D}$. *Se* $u = v$ *su* ∂D, *allora* $u \equiv v$ *in* D.

Sia $w = u - v$. Dalla formula (IV.1.4) si trae

$$\int_D |\operatorname{grad} w|^2 dx = 0 \tag{IV.1.5}$$

e quindi w è costante su ogni componente connessa di D. Essendo la w continua fin sulla frontiera ed essendo $w|_{\partial D} = 0$, si trae la tesi.

Con analoga dimostrazione si ottiene il seguente interessante risultato:

IV.7 *Supponiamo* D *connesso. Siano* $u, v \in C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$ *due funzioni armoniche in* $\mathring{D}$. *Se* $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ *su* ∂D, *allora* $u - v = \mathrm{cost.}$ *in* D.

Come nel teorema precedente, dalla (IV.1.4) si deduce la (IV.1.5), da cui, in virtù della connessione di D, si ottiene $w = \mathrm{cost.}$.

2 Formule di rappresentazione integrali.

Introduciamo la funzione $s(x, y)$ definita per $x \neq y$:

$$s(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log|x-y| & n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n |x-y|^{n-2}} & n = 3, 4, \dots \end{cases}$$

dove ω_n denota la misura ipersuperficiale della sfera unitaria [11]. La funzione $s(x, y)$ è detta *soluzione fondamentale* dell'equazione di Laplace. Osserviamo che, per $x \neq y$ la funzione $s(x, y)$ è una funzione armonica della x (e della y). Infatti, essendo

$$\frac{\partial}{\partial x_h}|x-y| = \frac{\partial}{\partial x_h}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} = \frac{x_h - y_h}{|x-y|}\,,$$

[11] Per il valore di ω_n, si veda l'Appendice A.

si ha

$$\frac{\partial s(x,y)}{\partial x_h} = \frac{1}{\omega_n} \frac{x_h - y_h}{|x-y|^n}$$

per ogni n e quindi

$$\frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} s(x,y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\delta_{hk}}{|x-y|^n} - \frac{n}{\omega_n} \frac{(x_h - y_h)(x_k - y_k)}{|x-y|^{n+2}}$$

da cui

$$\Delta_{2,x} s(x,y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{n}{|x-y|^n} - \frac{n}{\omega_n} \frac{|x-y|^2}{|x-y|^{n+2}} = 0$$

per $x \neq y$.

IV.8 *Sia $u \in C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$ tale che $\Delta_2 u \in L^1(D)$. Sussiste la seguente formula di rappresentazione di Stokes*

$$u(x) = \int_D s(x,y)\, \Delta_2 u(y)\, dy + \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\, s(x,y) \right) d\sigma_y$$

per ogni $x \in \mathring{D}$.

Si noti che, fissato $x \in \mathring{D}$, la funzione (della y) $s(x,y)\, \Delta_2 u(y)$ risulta sommabile in D. Infatti, fissiamo x e sia $B_\varepsilon(x)$ una palla aperta di centro x e raggio ε tale che $\overline{B}_\varepsilon(x) \subset \mathring{D}$. In $D_\varepsilon = D - B_\varepsilon(x)$ abbiamo la funzione $s(x,y)$ continua e $\Delta_2 u$ sommabile, mentre in $\overline{B}_\varepsilon(x)$ $\Delta_2 u$ è continua e $s(x,y)$ sommabile. Ha senso quindi l'integrale esteso a D dell'enunciato.

Essendo la $s(x,y)$, come funzione della y, regolare in $D_\varepsilon = D - B_\varepsilon(x)$ ed armonica al suo interno, il teorema IV.2 permette di scrivere

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) - s(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y = - \int_{D_\varepsilon} s(x,y)\, \Delta_2 u(y)\, dy \ .$$

Essendo poi $\partial D_\varepsilon = \partial D \cup \partial B_\varepsilon$, si ha

$$\begin{gathered} \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) - s(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y + \\ \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) - s(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y = - \int_{D_\varepsilon} s(x,y)\, \Delta_2 u(y)\, dy \end{gathered} \tag{IV.2.1}$$

dove ν indica la normale esterna al dominio D_ε.

Supponiamo $n > 2$. Poiché

$$\int_{\partial B_\varepsilon} s(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\, d\sigma_y = \frac{1}{(2-n)\omega_n\, \varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\, d\sigma_y \ ,$$

si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\partial B_\varepsilon} s(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\, d\sigma_y = 0 \ , \tag{IV.2.2}$$

dato che

$$\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\left|\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\right| \le \omega_n\, \varepsilon\, \max_{D} |\operatorname{grad} u| \, .$$

Per quanto riguarda l'altro integrale esteso a ∂B_ε, osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) = -\left[\frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{\varrho^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\right]_{\varrho=\varepsilon} = -\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \tag{IV.2.3}$$

e quindi

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = -\frac{1}{\omega_n\, \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon} u(y)\, d\sigma_y \ .$$

D'altra parte

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\omega_n\, \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon} u(y)\, d\sigma_y = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} u(x+\varepsilon\eta)\, d\sigma_\eta = u(x)$$

da cui

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\partial B_\varepsilon} u(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y = -u(x) \ . \tag{IV.2.4}$$

Infine, per la sommabilità osservata all'inizio della dimostrazione, si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{D_\varepsilon} s(x,y)\, \Delta_2 u(y)\, dy = \int_D s(x,y)\, \Delta_2 u(y)\, dy \ .$$

Da questa formula e dalle (IV.2.1), (IV.2.2), (IV.2.4) si trae

$$\int_{\partial D} \left(u(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) - s(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\right) d\sigma_y - u(x) = -\int_D s(x,y)\, \Delta_2 u(y)\, dy$$

ossia la tesi. In maniera del tutto analoga si ragiona per $n = 2$.

I tre integrali che compaiono nella formula di rappresentazione di Stokes, ossia

$$\int_D f(y)\, s(x,y)\, dy, \ \int_{\partial D} g(y)\, s(x,y)\, d\sigma_y, \ \int_{\partial D} h(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y)\, d\sigma_y$$

prendono rispettivamente il nome di *potenziale di dominio*, *potenziale di semplice strato*, *potenziale di doppio strato*. Le funzioni f, g, h prendono il nome di *densità*.

IV.9 *Sia* $u \in C^1(D) \cap C^2(\overset{\circ}{D})$ *una funzione armonica in* $\overset{\circ}{D}$. *Allora*

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) - s(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y$$

per ogni $x \in \overset{\circ}{D}$.

Segue immediatamente dalla formula di rappresentazione di Stokes.

3 Analiticità delle funzioni armoniche.

Come vedremo tra poco, una conseguenza del teorema IV.9 è che le funzioni armoniche (a priori soltanto di classe C^2) sono analitiche.

Nel caso $n = 2$ questo risultato si può ottenere, invece, dalla teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa. Il legame tra funzioni armoniche reali e funzioni olomorfe è dato dal seguente teorema

IV.10 *Sia* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *una funzione olomorfa nell'aperto* Ω. *Allora le funzioni* u *e* v *sono armoniche in* Ω. *Se, inoltre,* Ω *è semplicemente connesso, data una funzione reale* u *armonica in* Ω *esiste una funzione armonica* v *tale che* $f = u + iv$ *è olomorfa in* Ω.

Una funzione v tale che $u + iv$ è olomorfa è detta *funzione armonica coniugata* della u.

È noto che $f = u + iv$ è olomorfa se e solo se u, v sono differenziabili e soddisfano il sistema di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} . \tag{IV.3.1}$$

Allora, se f è olomorfa, sappiamo che f è C^∞ e da (IV.3.1) segue che

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0, \qquad v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

ossia u, v sono armoniche.

Se abbiamo una funzione u armonica, un'armonica coniugata sarà una funzione v tale da soddisfare il sistema di Cauchy-Riemann (IV.3.1), ossia una v tale che

$$dv = -u_y dx + u_x dy \ . \tag{IV.3.2}$$

Ma una tale v esiste se e solo se la forma $-u_y dx + u_x dy$ risulta esatta. Le condizioni locali di integrabilità sono soddisfatte a causa dell'armonicità della u, dato che

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} \ .$$

Essendo Ω semplicemente connesso per ipotesi, la forma $-u_y dx + u_x dy$ è esatta ed esiste quindi una v tale che sussiste (IV.3.2), ossia u, v soddisfano il sistema di Cauchy-Riemann (IV.3.1). Essendo la u di classe C^2 per ipotesi e la v risultando di classe C^1, le funzioni u e v sono entrambi differenziabili e quindi $f = u + iv$ è olomorfa.

IV.11 *Sia u una funzione armonica in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Allora u è analitica.*

Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ e consideriamo un disco di centro tale punto e raggio R tale che la sua chiusura sia contenuta in Ω. Essendo questo disco un insieme semplicemente connesso, per il teorema precedente esiste una funzione v armonica coniugata della u. Allora la funzione $f = u + iv$ è olomorfa e quindi, per risultati ben noti, analitica. In un intorno di $z_0 = x_0 + iy_0$ avremo quindi

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (z - z_0)^h \ . \tag{IV.3.3}$$

Posto

$$a_h = \alpha_h + i\beta_h, \qquad P_h(x - x_0, y - y_0) = Re(z - z_0)^h, \qquad Q_h(x - x_0, y - y_0) = Im(z - z_0)^h$$

avremo che

$$u(x, y) = \sum_{h=0}^{\infty} [\alpha_h P_h(x - x_0, y - y_0) - \beta_h Q_h(x - x_0, y - y_0)] \ .$$

Se scriviamo

$$\alpha_h P_h(x - x_0, y - y_0) - \beta_h Q_h(x - x_0, y - y_0) = \sum_{|\beta|=h} c_\beta (x - x_0)^{\beta_1} (y - y_0)^{\beta_2}$$

allora

$$u(x, y) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=h} c_\beta (x - x_0)^{\beta_1} (y - y_0)^{\beta_2} \ .$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo far vedere che la serie doppia

$$\sum_{|\beta|=0}^{\infty} c_\beta (x - x_0)^{\beta_1} (y - y_0)^{\beta_2} \tag{IV.3.4}$$

che sappiamo convergente per diagonali alla $u(x, y)$, converge assolutamente. Risulta

$$\sum_{|\beta|=h} |c_\beta| \, |x - x_0|^{\beta_1} |y - y_0|^{\beta_2} = |\alpha_h| \, P_h^*(|x - x_0|, |y - y_0|) + |\beta_h| \, Q_h^*(|x - x_0|, |y - y_0|)$$

avendo indicato con P_h^* (Q_h^*) il polinomio ottenuto prendendo come coefficienti i valori assoluti dei coefficienti di P_h (Q_h) [12] . Supponendo la (IV.3.3) convergente assolutamente per $|z - z_0| \leq R$, avremo che esiste una costante M tale che

$$|a_h|\, R^h \leq M$$

da cui

$$|\alpha_h| \leq \frac{M}{R^h}, \qquad |\beta_h| \leq \frac{M}{R^h} \ .$$

Sarà allora [13]

$$\sum_{|\beta|=h} |c_\beta|\, |x - x_0|^{\beta_1} |y - y_0|^{\beta_2} \leq \frac{M}{R^h} \left[P_h^*(|x - x_0|, |y - y_0|) + Q_h^*(|x - x_0|, |y - y_0|)\right] =$$
$$\frac{M}{R^h}(|x - x_0| + |y - y_0|)^h$$

---

(12) Si tenga presente, infatti, che essendo

$$(z - z_0)^h = \sum_{s=0}^{h} \binom{h}{s} i^s (x - x_0)^{h-s} (y - y_0)^s$$

si ha

$$P_h(x - x_0, y - y_0) = \sum_{\substack{s=0 \\ s \text{ pari}}}^{h} \binom{h}{s} i^s (x - x_0)^{h-s} (y - y_0)^s ,$$
$$Q_h(x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{i} \sum_{\substack{s=0 \\ s \text{ dispari}}}^{h} \binom{h}{s} i^s (x - x_0)^{h-s} (y - y_0)^s$$

e quindi

$$P_h^*(|x - x_0|, |y - y_0|) = \sum_{\substack{s=0 \\ s \text{ pari}}}^{h} \binom{h}{s} |x - x_0|^{h-s} |y - y_0|^s ,$$
$$Q_h^*(|x - x_0|, |y - y_0|) = \sum_{\substack{s=0 \\ s \text{ dispari}}}^{h} \binom{h}{s} |x - x_0|^{h-s} |y - y_0|^s \ .$$

(13) Dalla nota precedente segue subito

$$P_h^*(|x - x_0|, |y - y_0|) + Q_h^*(|x - x_0|, |y - y_0|) = \sum_{s=0}^{h} \binom{h}{s} |x - x_0|^{h-s} |y - y_0|^s =$$
$$(|x - x_0| + |y - y_0|)^h \ .$$

che mostra l'assoluta convergenza per diagonali (e quindi con ogni metodo di sommazione) della serie (IV.3.4) per $|x-x_0|+|y-y_0|<R$.

In dimensione superiore, non avendo più un legame con la teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa, dobbiamo dimostrare l'analiticità con altri metodi.

IV.12 *Sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione armonica nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; u risulta analitica.*

Fissiamo un punto x_0 di Ω; per semplicità supponiamo che sia l'origine (ipotesi ovviamente non restrittiva). Consideriamo quindi un disco di centro l'origine e raggio R la cui chiusura sia contenuta in Ω. Indicata con Σ la sua frontiera, si ha

$$u(x)=\int_\Sigma \left(u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}s(x,y)-s(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}\right)d\sigma_y$$

per ogni x interno al disco.

Basterà quindi dimostrare che i potenziali di semplice e doppio strato possono essere sviluppati in serie di potenze assolutamente convergenti in un intorno di 0.

Poiché

$$|x-y|^2=|x|^2+|y|^2-2x\cdot y=|y|^2\left(1+\frac{|x|^2}{|y|^2}-2\frac{x\cdot y}{|y|^2}\right)$$

possiamo scrivere

$$\frac{1}{|x-y|^{n-2}}=\frac{1}{|y|^{n-2}}\,\frac{1}{(1-\Lambda)^{\frac{n-2}{2}}}$$

dove

$$\Lambda=2\frac{x\cdot y}{|y|^2}-\frac{|x|^2}{|y|^2}\ .$$

Introduciamo anche la seguente quantità

$$\widetilde{\Lambda}=\frac{2}{R}\sum_{h=1}^{n}|x_h|+\frac{|x|^2}{R^2}$$

e osserviamo che, fissato $0<q<1$, se

$$|x|\le q(\sqrt{n^2+1}-n)R \tag{IV.3.5}$$

allora

$$|\Lambda|\le|\widetilde{\Lambda}|\le\frac{2n|x|R+|x|^2}{R^2}\le q<1\ . \tag{IV.3.6}$$

Sussiste perciò il seguente sviluppo in serie

$$\frac{1}{|x-y|^{n-2}} = \frac{1}{|y|^{n-2}} \frac{1}{(1-\Lambda)^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{1}{|y|^{n-2}} \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-\frac{n-2}{2}}{h} (-\Lambda)^h =$$
$$\frac{1}{|y|^{n-2}} \left[1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(n-2)n(n+2)\ldots(n+2h-4)}{(2h)!!} \Lambda^h \right] \ ;$$

sviluppando poi le potenze di Λ si ottiene una serie di potenze del tipo

$$\sum_{|\beta|=0}^{\infty} \gamma_\beta(y)\, x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} \ . \tag{IV.3.7}$$

Per dimostrare la convergenza di questa serie, consideriamo la serie

$$\frac{1}{R^{n-2}} \frac{1}{(1-\widetilde{\Lambda})^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{1}{R^{n-2}} \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-\frac{n-2}{2}}{h} (-\widetilde{\Lambda})^h =$$
$$\frac{1}{R^{n-2}} \left[1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(n-2)n(n+2)\ldots(n+2h-4)}{(2h)!!} \widetilde{\Lambda}^h \right]$$

la quale per x soddisfacente (IV.3.5) converge in virtù della (IV.3.6). Dopo aver sviluppato le potenze di $\widetilde{\Lambda}$, questa serie diventa una serie del tipo

$$\sum_{|\beta|=0}^{\infty} c_\beta |x_1|^{\beta_1} \ldots |x_n|^{\beta_n}$$

con tutti i coefficienti c_β **positivi**. Tale serie di potenze risulta convergente (è stata ottenuta riarrangiando i termini di una serie assolutamente convergente) ed inoltre è una maggiorante della (IV.3.7), dato che

$$|\gamma_\beta(y)| \le c_\beta \qquad \forall\, \beta \in \mathcal{M},\ \forall\, y \in \Sigma \ .$$

Allora, fissato x tale che vale (IV.3.5), la (IV.3.7) converge totalmente al variare di $y \in \Sigma$ e quindi

$$\int_\Sigma s(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\sigma_y = \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{(n-2)\omega_n} \int_\Sigma \gamma_\beta(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\sigma_y \right) x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$$

e questa serie converge assolutamente per ogni x soddisfacente la (IV.3.5). È così dimostrata l'analiticità del potenziale di semplice strato. In maniera del tutto analoga si dimostra l'analiticità del potenziale di doppio strato. Il teorema è così dimostrato.

4 Il teorema della media di Gauss e sue conseguenze.

Il prossimo teorema fornisce le *proprietà di media* per funzioni armoniche.

IV.13 *(Gauss) Sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione armonica nell'aperto Ω. Per ogni $x \in \Omega$ si ha* [14]

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u \, d\sigma$$
$$u(x) = \frac{1}{\Omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u \, dy$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $R > 0$ tale che $\overline{B}_R(x) \subset \Omega$.

In base al teorema IV.9 possiamo scrivere

$$u(x) = \int_{\partial B_R(x)} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) - s(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y \; .$$

D'altra parte (supponendo $n > 2$),

$$\int_{\partial B_R(x)} s(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \, d\sigma_y = - \frac{1}{(n-2)\omega_n \, R^{n-2}} \int_{\partial B_R(x)} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \, d\sigma_y = 0$$

grazie al teorema IV.4 e quindi

$$u(x) = \int_{\partial B_R(x)} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) \, d\sigma_y = \frac{1}{\omega_n \, R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) \, d\sigma_y \qquad \text{(IV.4.1)}$$

ossia la prima proprietà di cui all'enunciato. Per dimostrare la seconda, si osservi che, per ogni $0 < \varrho < R$ possiamo scrivere

$$\omega_n \, \varrho^{n-1} u(x) = \int_{\partial B_\varrho(x)} u(y) \, d\sigma_y = \varrho^{n-1} \int_{|\eta|=1} u(x + \varrho\eta) \, d\sigma_\eta \; .$$

Integrando rispetto a ϱ si ottiene

$$\omega_n u(x) \int_0^R \varrho^{n-1} d\varrho = \int_0^R \varrho^{n-1} d\varrho \int_{|\eta|=1} u(x + \varrho\eta) \, d\sigma_\eta \; ,$$

ossia

$$\omega_n u(x) \frac{R^n}{n} = \int_{B_R(x)} u(y) \, dy \; .$$

Ma questa è proprio la formula cercata, dato che $\omega_n = n \, \Omega_n$ (cfr. la (IV.9.4)).

I prossimi teoremi mostrano alcune conseguenze.

[14] Con Ω_n indichiamo la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$.

IV.14 *Sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione armonica nell'aperto connesso Ω. Supponiamo che u non sia costante. Allora u è sprovvista in Ω di minimi o massimi relativi.*

Supponiamo per assurdo che $x_0 \in \Omega$ sia un minimo relativo contenuto in Ω. Questo significa che possiamo trovare una palla B_R (la cui chiusura è contenuta in Ω) di centro x_0 per la quale

$$u(x_0) \leq u(x) \qquad \forall\, x \in B_R \,. \tag{IV.4.2}$$

Per la proprietà di media si ha

$$u(x_0) = \frac{1}{\Omega_n R^n} \int_{B_R} u(y)\, dy$$

ossia

$$\int_{B_R} [u(y) - u(x_0)]\, dy = 0 \,.$$

Ma essendo, per la (IV.4.2), l'integrando maggiore od uguale a zero, si trova $u(y) = u(x_0)$ per ogni $y \in B_R(x_0)$. Per l'analiticità delle funzioni armoniche e per un principio di identità delle funzioni analitiche, segue $u =$ cost. in Ω e questo è assurdo. In maniera analoga si ragiona per i massimi.

IV.15 *Se D è un dominio limitato e $u \in C^2(\mathring{D}) \cap C^0(D)$ è armonica, allora*

$$\min_{y \in \partial D} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y \in \partial D} u(y) \qquad \forall\, x \in D \;; \tag{IV.4.3}$$

inoltre, se u non è costante e D è connesso, u assume minimo e massimo esclusivamente sulla ∂D.

Il teorema di Weiestraß implica che la funzione u assume minimo e massimo in D. Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo assoluto; se $x_0 \in \partial D$, la prima disuguaglianza è dimostrata. Supponiamo allora che $x_0 \in \mathring{D}$ e sia $B_R(x_0)$ la palla di centro x_0 e raggio $R = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$. La funzione u risulta continua in $\overline{B}_R(x_0)$ e armonica all'interno; essendo $B_R(x_0)$ connesso, il teorema precedente implica che u è costante in $B_R(x_0)$. D'altra parte sulla $\partial B_R(x_0)$ cade almeno un punto $z \in \partial D$. Quindi esiste un punto $z \in \partial B_R(x_0)$ tale che

$$u(z) = \min_{y \in \partial D} u(y)$$

e ciò prova la prima disuguaglianza. Dato che anche la funzione $-u$ è armonica, si deve avere

$$\min_{y \in \partial D} [-u(y)] \leq -u(x) \qquad \forall\, x \in D$$

ossia la seconda disuguaglianza di (IV.4.3). L'ultima parte dell'enunciato è assicurata dal teorema precedente.

Il risultato appena dimostrato porta al seguente teorema di unicità (diverso dal teorema IV.6 !)

IV.16 *Se D è un dominio limitato e $u, v \in C^2(\mathring{D}) \cap C^0(D)$ sono armoniche e tali che $u = v$ su ∂D, allora $u \equiv v$ in D.*

La funzione $w = u - v$, essendo di classe $C^2(\mathring{D}) \cap C^0(D)$ e nulla su ∂D, per la (IV.4.3) dovrà essere identicamente nulla in D.

È interessante vedere che la proprietà di media caratterizza le funzioni armoniche. Si ha infatti

IV.17 *Sia $u \in C^0(\Omega)$ una funzione tale che*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u \, d\sigma \tag{IV.4.4}$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $R > 0$ tale che $\overline{B}_R(x) \subset \Omega$. Allora u è armonica, ossia $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta_2 u = 0$ in Ω.

Supponiamo dapprima che la funzione che soddisfa la (IV.4.4) sia di classe $C^2(\Omega)$. Per la formula integrale di Stokes possiamo scrivere

$$u(x) = \int_{\partial B_R(x)} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} s(x,y) - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} s(x,y) \right) d\sigma_y + \int_{B_R(x)} s(x,y) \, \Delta_2 u(y) \, dy$$

ossia, ricordando la (IV.2.3):

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) \, d\sigma_y + \frac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}} \int_{\partial B_R(x)} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \, d\sigma_y - \\ - \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{B_R(x)} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \Delta_2 u(y) \, dy \; . \end{aligned} \tag{IV.4.5}$$

Allora, applicando la formula di Green (IV.1.3) e tenendo presente la (IV.4.4), risulta

$$\frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{B_R(x)} \left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right) \Delta_2 u(y) \, dy = 0 \tag{IV.4.6}$$

e questo per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $R > 0$ tale che $B_R(x) \subset \Omega$. Supponiamo $\Delta_2 u(x) > 0$; per la continuità delle derivate seconde della u esisterà un $R > 0$ tale che

$$\Delta_2 u(y) > 0 \qquad \forall \, y \in B_R(x) \; .$$

Inoltre, essendo all'interno di $B_R(x)$: $|x - y| < R$, si avrà

$$\left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right) \Delta_2 u(y) < 0 \qquad \forall \, y \in B_R(x)$$

e questo contraddice la (IV.4.6). In maniera analoga si dimostra che è assurdo supporre $\Delta_2 u(x) < 0$ e quindi u risulta armonica.

Sia ora $u \in C^0(\Omega)$. Fissiamo un $x_0 \in \Omega$ e un $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B}_{2\varepsilon}(x_0) \subset \Omega$. Poniamo

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy$$

dove ϱ_ε è un mollifier (cfr. Appendice B). Supponiamo, inoltre, che $\varrho_\varepsilon(x)$ dipenda solo dal $|x|$, sia, cioé, del tipo $\varrho_\varepsilon(|x|)$ (cfr. l'esempio indicato nell'appendice B).

Per ogni $x \in B_\varepsilon(x_0)$ si ha (si noti che, per tali x, risulta $B_\varepsilon(x) \subset B_{2\varepsilon}(x_0)$):

$$u_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy = \int_0^\varepsilon \varrho_\varepsilon(r)\, r^{n-1} dr \int_{|\eta|=1} u(x+r\eta)\, d\sigma_\eta.$$

D'altra parte la (IV.4.4) si può riscrivere come

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} u(x+R\eta)\, d\sigma_\eta$$

e quindi, ricordando che il supporto di ϱ_ε è contenuto in $B_\varepsilon(0)$ e che l'integrale di ϱ_ε è uguale ad 1,

$$u_\varepsilon(x) = \omega_n u(x) \int_0^\varepsilon \varrho_\varepsilon(r)\, r^{n-1} dr = u(x) \int_{B_\varepsilon(0)} \varrho_\varepsilon(y)\, dy = u(x).$$

Abbiamo quindi provato che

$$u(x) = u_\varepsilon(x) \qquad \forall\, x \in B_\varepsilon(x_0);$$

ciò mostra che $u \in C^\infty(B_\varepsilon(x_0))$, ossia che u è di classe C^∞ in un intorno di x_0.

Per l'arbitrarietà di x_0, si ha che $u \in C^\infty(\Omega)$ e quindi, per la prima parte della dimostrazione, u è armonica.

5 Il problema di Dirichlet. La funzione di Green.

Il problema di Dirichlet, di fondamentale importanza in diverse discipline della Matematica, è il seguente: su un dominio D si cerca una funzione u armonica all'interno di D che coincide sulla frontiera con una funzione assegnata φ. Più precisamente supponiamo D dominio limitato e regolare e cerchiamo una u tale che

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathring{D}) \cap C^0(D) & \\ \Delta_2 u(x) = 0 & x \in \mathring{D} \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial D \end{cases} \tag{IV.5.1}$$

essendo φ una funzione assegnata di $C^0(\partial D)$. Il teorema IV.16 (e non il IV.6 !) fornisce il teorema di unicità per questo problema. La questione dell'esistenza è più delicata. Oggigiorno si conoscono vari metodi per ottenere ciò e un primo metodo che vogliamo esporre in questo paragrafo è il metodo della funzione di Green.

L'idea basilare di questo metodo è quella di cercare la soluzione mediante una rappresentazione integrale del tipo considerato nel teorema IV.9. Purtroppo quest'ultima non sembra utilizzabile, perché interviene in questa formula non solo la u sulla ∂D (ossia il dato φ), ma anche la $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ che, in generale, non è nota, né è deducibile dalla φ. Questa osservazione ha comunque suggerito la seguente definizione[15]:
la funzione $G(x,y)$ è detta *funzione di Green* del problema (IV.5.1) relativa al dominio D se è definita per $x \in \mathring{D}$ e $y \in D$, ha la forma

$$G(x,y) = s(x,y) + g(x,y)$$

dove $s(x,y)$ è la soluzione fondamentale introdotta in § 2, per ogni fissato $x \in \mathring{D}$ la g è, come funzione della y, di classe $C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$, si ha $\Delta_{2y} g(x,y) = 0$ e infine

$$G(x,y) = 0 \qquad x \in \mathring{D},\ y \in \partial D\ . \tag{IV.5.2}$$

La funzione $g(x,y)$ è detta *funzione ausiliaria.*

IV.18 *Supposta l'esistenza della funzione di Green, ogni funzione armonica di classe $C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$ si rappresenta al modo seguente*

$$u(x) = \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} d\sigma_y \tag{IV.5.3}$$

Sia x un punto fissato all'interno di D. Le funzioni $u(y)$ e $g(x,y)$ (come funzione della y) soddisfano le ipotesi del teorema IV.3 e quindi si ha

$$\int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial g(x,y)}{\partial \nu_y} - g(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y = 0\ . \tag{IV.5.4}$$

D'altra parte la formula di rappresentazione di Stokes fornisce

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial s(x,y)}{\partial \nu_y} - s(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y\ . \tag{IV.5.5}$$

Sommando membro a membro la (IV.5.4) e la (IV.5.5) si ottiene la (IV.5.3), non appena si tenga conto della condizione (IV.5.2).

Si ha dunque immediatamente:

[15] È bene avvertire che alcuni Autori danno una diversa definizione di funzione di Green, richiedendo, in genere, qualcosa in più, ad esempio che la funzione $g(x,y)$ risulti armonica rispetto ad entrambe le variabili.

IV.19 *Supposta l'esistenza della funzione di Green, se la soluzione u del problema di Dirichlet (IV.5.1) esiste ed è di classe $C^1(D)$, la funzione u si rappresenta al modo seguente*

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} d\sigma_y \ . \tag{IV.5.6}$$

Si badi che questo teorema non fornisce ancora un teorema di esistenza; dice soltanto che, **se** la soluzione esiste (ed ha un certo grado di regolarità), deve rappresentarsi al modo indicato. Tuttavia questo risultato indica una via da seguire; si tratta di dimostrare che, data una φ continua su ∂D, l'integrale a secondo membro della (IV.5.6) è soluzione del problema (IV.5.1). Per completare la dimostrazione del teorema di esistenza, bisogna anche far vedere che la funzione di Green esiste. Le verifiche di questi fatti sono tuttaltro che banali e non le daremo in generale [16].

Consideriamo la sfera unitaria. In questo caso la funzione di Green si scrive esplicitamente:

$$G(x,y) = s(x,y) - s\left(|x|\, y, \frac{x}{|x|}\right) \ . \tag{IV.5.7}$$

Verifichiamo che tale funzione è la funzione di Green relativa alla palla unitaria. Per prima cosa proviamo che la funzione ausiliaria

$$g(x,y) = -s\left(|x|\, y, \frac{x}{|x|}\right)$$

è, per ogni fissato $x \in \mathring{D}$, di classe $C^1(D) \cap C^2(\mathring{D})$. Sia quindi $x \in \mathring{D}$ fissato. Essendo

$$\left| |x|\, y - \frac{x}{|x|} \right| = |x| \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|$$

e $\left|\frac{x}{|x|^2}\right| = \frac{1}{|x|} > 1$, la funzione (della y) $g(x,y)$ risulta di classe C^∞ in D ed armonica in $\mathring{D}$. Per verificare la (IV.5.2), osserviamo che si ha

$$\left| |x|\, y - \frac{x}{|x|} \right|^2 = |x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y + 1$$

e quindi

$$\left| |x|\, y - \frac{x}{|x|} \right| = \left| |y|\, x - \frac{y}{|y|} \right| \tag{IV.5.8}$$

[16] Per avere un'idea della difficoltà del metodo, si consulti il Fichera-De Vito, Funzioni analitiche di una variabile complessa, Ed. Veschi, dove il metodo è dimostrato nel caso particolare $n = 2$.

Allora, se $|y| = 1$, abbiamo

$$\left| |x|\, y - \frac{x}{|x|} \right| = |x - y| \tag{IV.5.9}$$

da cui

$$s\left(|x|\, y, \frac{x}{|x|} \right) = s(x, y)$$

ossia la (IV.5.2). La (IV.5.7) è quindi la funzione di Green relativa alla palla unitaria. Calcoliamoci ora la sua derivata normale. Osservato che sulla sfera unitaria si ha $\nu_y = y_h$ (la normale è quella esterna !), possiamo scrivere

$$\frac{\partial s(x,y)}{\partial \nu_y} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial s(x,y)}{\partial y_h} \nu_h(y) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{h=1}^{n} \frac{y_h - x_h}{|y - x|^n} y_h = \frac{1}{\omega_n} \frac{|y|^2 - x \cdot y}{|y - x|^n} \ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} s\left(|x|\, y, \frac{x}{|x|} \right) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{h=1}^{n} \frac{|x| y_h - \frac{x_h}{|x|}}{\left| |x|\, y - \frac{x}{|x|} \right|^n} |x|\, y_h = \frac{1}{\omega_n} \frac{|x|^2 |y|^2 - x \cdot y}{\left| |x|\, y - \frac{x}{|x|} \right|^n}$$

e quindi, tenendo presente la (IV.5.9),

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} = \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{|y|^2 - x \cdot y}{|y - x|^n} - \frac{|x|^2 |y|^2 - x \cdot y}{\left| |x|\, y - \frac{x}{|x|} \right|^n} \right] = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \ .$$

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet nel caso della palla unitaria.

IV.20 *Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ la palla unitaria. La funzione*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B} \varphi(y) \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \, d\sigma_y \tag{IV.5.10}$$

è l'unica soluzione del problema (IV.5.1).

La formula (IV.5.10) prende il nome di *formula di Poisson.*

L'unicità è stata già ottenuta. La funzione (IV.5.10) è armonica all'interno della palla, perché (IV.5.10) non è altro che la (IV.5.6) e inoltre, in base alla (IV.5.8),

$$G(x,y) = s(x,y) - s\left(|x|\, y, \frac{x}{|x|} \right) = s(x,y) - s\left(|y|\, x, \frac{y}{|y|} \right) \ .$$

Verifichiamo ora la condizione al bordo, ossia che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} u(x) = \varphi(x_0)$$

per ogni $x_0 \in \partial B$. Poiché $u \equiv 1$ è una funzione armonica, il teorema IV.18 implica che

$$1 = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \, d\sigma_y \qquad \forall \; x \in B. \tag{IV.5.11}$$

Allora verificare la condizione al bordo significa far vedere che

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B} [\varphi(y) - \varphi(x_0)] \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \, d\sigma_y$$

tende a 0 per $x \to x_0$ rimanendo in B. Essendo, per il teorema di Heine-Cantor, la funzione φ uniformemente continua su ∂B, dato un $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall \; y, y' \in \partial B; \; |y - y'| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y')| < \varepsilon \; . \tag{IV.5.12}$$

Posto

$$\Gamma_\varepsilon = \{ y \in \partial B \mid |y - x_0| < \delta_\varepsilon \}, \qquad \widetilde{\Gamma}_\varepsilon = \partial B - \Gamma_\varepsilon$$

scriviamo

$$\int_{\partial B} = \int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{\widetilde{\Gamma}_\varepsilon}$$

e studiamo separatamente i due integrali. Il primo, tenendo presenti (IV.5.11) e (IV.5.12), si può maggiorare al modo seguente

$$\left| \frac{1}{\omega_n} \int_{\Gamma_\varepsilon} [\varphi(y) - \varphi(x_0)] \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \, d\sigma_y \right| \le \frac{1}{\omega_n} \int_{\Gamma_\varepsilon} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \, d\sigma_y \le$$
$$\varepsilon \frac{1}{\omega_n} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \, d\sigma_y \le \varepsilon \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \, d\sigma_y = \varepsilon \; .$$

Per maggiorare l'integrale esteso a $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon$, osserviamo che si ha, per $|x| \le 1$

$$1 - |x|^2 = (1 + |x|)(1 - |x|) \le 2(|x_0| - |x|) \le 2|x - x_0|$$

e supponendo $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $y \in \widetilde{\Gamma}_\varepsilon$

$$|y - x| = |y - x_0 + x_0 - x| \ge \big| \, |y - x_0| - |x - x_0| \, \big| \ge \delta_\varepsilon - |x - x_0| \; .$$

Si ha quindi, per $x \in B, \; |x - x_0| < \delta_\varepsilon$:

$$\left| \frac{1}{\omega_n} \int_{\widetilde{\Gamma}_\varepsilon} [\varphi(y) - \varphi(x_0)] \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \, d\sigma_y \right| \le \frac{1}{\omega_n} \int_{\widetilde{\Gamma}_\varepsilon} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \, d\sigma_y \le$$
$$2 \, \|\varphi\|_\infty \frac{1}{\omega_n} \int_{\widetilde{\Gamma}_\varepsilon} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \, d\sigma_y \le 4 \, \|\varphi\|_\infty \frac{1}{\omega_n} \frac{|x - x_0|}{(\delta_\varepsilon - |x - x_0|)^n} \int_{\widetilde{\Gamma}_\varepsilon} d\sigma_y \le$$
$$4 \, \|\varphi\|_\infty \frac{|x - x_0|}{(\delta_\varepsilon - |x - x_0|)^n} \; .$$

Esiste quindi un $\varrho_e < \delta_\varepsilon$ tale che, se $|x - x_0| < \varrho_\varepsilon$ si ha

$$\left|\frac{1}{\omega_n}\int_{\widetilde{\Gamma}_\varepsilon}[\varphi(y)-\varphi(x_0)]\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}\,d\sigma_y\right| < \varepsilon\ .$$

Mettendo insieme le disuguaglianze ottenute si ha

$$x \in B,\ |x - x_0| < \varrho_e \Rightarrow |u(x) - \varphi(x_0)| < 2\varepsilon$$

ossia la tesi. Si noti che essendo ϱ_ε indipendente da x_0 abbiamo dimostrato che la convergenza è uniforme rispetto a $x_0 \in \partial B$.

Il risultato ottenuto per la palla unitaria si estende subito ad una palla $B_R(x_0)$ di raggio R e di centro x_0. In tal caso la formula di Poisson diventa

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R}\int_{\partial B_R(x_0)}\varphi(y)\,\frac{R^2-|x-x_0|^2}{|y-x|^n}\,d\sigma_y\ . \qquad \text{(IV.5.13)}$$

Infatti, supponiamo che u sia la soluzione del problema di Dirichlet in $B_R(x_0)$ soddisfacente la condizione al bordo

$$u(x) = \varphi(x) \qquad |x - x_0| = R.$$

Allora la funzione

$$v(z) = u(Rz + x_0)$$

è definita in $B_1(0)$, è armonica perché

$$\Delta_2 v(z) = R^2\Delta_2 u(Rz + x_0) = 0$$

e infine

$$v(z) = \varphi(Rz + x_0) \qquad |z| = 1.$$

Per quanto dimostrato si ha

$$v(z) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|w|=1}\varphi(Rw + x_0)\,\frac{1-|z|^2}{|w-z|^n}d\sigma_w$$

per $|z| < 1$. Posto $x = Rz + x_0$, $y = Rw + x_0$ (ossia $z = \frac{x-x_0}{R}$, $w = \frac{y-x_0}{R}$) questa formula, tenendo presente che $d\sigma_y = R^{n-1}d\sigma_w$) diventa

$$v\left(\frac{x-x_0}{R}\right) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|y-x_0|=R}\varphi(y)\,\frac{1-\left|\frac{x-x_0}{R}\right|^2}{\left|\frac{y-x}{R}\right|^n}\,\frac{d\sigma_y}{R^{n-1}}$$

ossia la (IV.5.13).

Un altro caso in cui la funzione di Green si scrive esplicitamente è il caso del semispazio. Vogliamo risolvere il problema di Dirichlet (IV.5.1) in $D = \{x \in I\!R^n \mid x_n > 0\}$. Essendo in questo caso il dominio illimitato occorre aggiungere delle condizioni all'infinito, senza le quali può mancare anche l'unicità. Ad esempio, la funzione $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ è armonica nel semipiano $\{x \in I\!R^2 \mid x_2 > 0\}$, è continua nel semipiano chiuso e inoltre soddisfa su ∂D la condizione: $u(x_1, 0) = 0$, senza per questo essere identicamente nulla in D.

IV.21 *Sia* $D = \{x \in I\!R^n \mid x_n > 0\}$*; esiste ed è unica la soluzione del problema di Dirichlet (IV.5.1) convergente all'infinito, dove* φ*, oltre ad essere continua, è supposta convergente all'infinito. La soluzione è data da*

$$u(x) = \frac{2}{\omega_n} \int_{I\!R^{n-1}} \frac{x_n\, \varphi(y_1, \dots, y_{n-1})}{\left[\sum_{h=1}^{n-1}(y_h - x_h)^2 + x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}}\, dy_1 \dots dy_{n-1} \ . \tag{IV.5.14}$$

Nel semispazio la funzione di Green è

$$G(x, y) = s(x, y) - s(x, y')$$

dove y' è il simmetrico di y rispetto al piano $x_n = 0$; in altre parole, se

$$y = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$$

allora

$$y' = (y_1, \dots, y_{n-1}, -y_n) \ .$$

Lasciamo al Lettore il compito di verificare che si tratta della funzione di Green. Osserviamo che

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} = -\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n} = -\frac{1}{\omega_n}\left[\frac{y_n - x_n}{|y - x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y' - x|^n}\right] =$$
$$\frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{\left[\sum_{h=1}^{n-1}(y_h - x_h)^2 + x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}}$$

(si noti che sulla ∂D si ha $y_n = 0$). In questo caso, quindi, (IV.5.14) non è altro che la (IV.5.6).

La verifica, del tutto analoga alla dimostrazione del teorema IV.20, che si tratta di una soluzione del problema di Dirichlet la lasciamo al Lettore. Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo di avere due funzioni u, v soluzioni del medesimo problema di Dirichlet. Essendo tali funzioni armoniche e convergenti all'infinito, lo sarà anche la funzione $w = u-v$. Essendo poi

$$w(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) - v(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$$

non può che essere

$$\lim_{\substack{|x|\to\infty \\ x\in D}} w(x) = 0 \ .$$

Dato quindi un $\varepsilon > 0$, esisterà un disco di centro l'origine e raggio R tale che, indicato con $D_R = \{x \in I\!\!R^n \mid |x| < R,\ x_n > 0\}$, si ha

$$|w(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in I\!\!R^n - D_R,\ x_n > 0.$$

Essendo w armonica all'interno di D_R ed essendo w sulla ∂D_R nulla oppure in modulo minore di ε, per il teorema IV.15 si avrà

$$|w(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in D_R.$$

Per l'arbitrarietà di ε: $w \equiv 0$.

6 Ulteriori proprietà delle funzioni armoniche.

IV.22 *Sia $u \in C^2(I\!\!R^n)$ una funzione armonica non negativa (oppure non positiva). Allora u è costante.*

Fissiamo un $x \in I\!\!R^n$ e consideriamo una palla B_R di centro l'origine e raggio $R > |x|$; per la (IV.5.13) possiamo scrivere

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} u(y)\, \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^n}\, d\sigma_y \ . \tag{IV.6.1}$$

D'altra parte, se $|x| < R,\ |y| = R$, si ha

$$R - |x| = |y| - |x| \le |y - x| \le |y| + |x| = R + |x|$$

e quindi

$$\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}} = \frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^n} \le \frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n} \le \frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^n} = \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}.$$

Dalla (IV.6.1) segue allora (si noti che la $u \geq 0$):

$$\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}\frac{1}{\omega_n R}\int_{\partial B_R} u(y)\,d\sigma_y \leq u(x) \leq \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}\frac{1}{\omega_n R}\int_{\partial B_R} u(y)\,d\sigma_y$$

che, ricordando il teorema della media IV.13, si scrive

$$\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}R^{n-2}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}R^{n-2}u(0)\ . \tag{IV.6.2}$$

Questo disuguaglianza, nota come *disuguaglianza di Harnack*, sussiste per ogni $R > |x|$; facendo tendere $R \to \infty$ si ottiene $u(x) = u(0)$. Per l'arbitrarietà di x si ha la tesi.

IV.23 *(Liouville) Una funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ armonica che sia limitata inferiormente (superiormente) è costante.*

Infatti, se $u(x) \geq m$ in tutto lo spazio, la funzione $u(x) - m$ è armonica e non negativa. Per il teorema precedente si ha la tesi.

Dimostriamo ora alcune proprietà relative alle derivate prime di una funzione armonica.

IV.24 *Sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione armonica. Per ogni $x \in \Omega$ si ha:*

$$u_{x_h}(x) = \frac{1}{\Omega_n R^{n+1}}\int_{\partial B_R(x)} u(y)\,(y_h - x_h)\,d\sigma_y \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

purché $\overline{B}_R(x) \subset \Omega$.

Sappiamo che la funzione u è C^∞ (anzi è analitica!) e quindi, potendo derivare e invertire l'ordine di derivazione, si ha

$$\Delta_2 u_{x_h} = \frac{\partial}{\partial x_h}\Delta_2 u = 0$$

ossia u_{x_h} (così come ogni derivata della u) è armonica. Per il teorema IV.13

$$u_{x_h}(x) = \frac{1}{\Omega_n R^n}\int_{B_R(x)} u_{y_h}(y)\,dy$$

e per le formule di Gauss-Green

$$u_{x_h}(x) = \frac{1}{\Omega_n R^n}\int_{\partial B_R(x)} u(y)\,\nu_h(y)\,d\sigma_y\ .$$

La tesi segue subito, non appena si osservi che sulla sfera $\partial B_R(x)$ risulta

$$\nu_h(y) = \frac{y_h - x_h}{R}\ .$$

IV.25 *Sia D un dominio limitato e sia $u \in C^2(\mathring{D}) \cap C^0(D)$ una funzione armonica in $\mathring{D}$. Allora per ogni $x \in \mathring{D}$, indicata con $\delta(x)$ la distanza di x dalla frontiera ∂D, si ha:*

$$|u_{x_h}(x)| \leq \frac{n}{\delta(x)} \max_{y \in \partial D} |u(y)| \, . \tag{IV.6.3}$$

Fissiamo un $x \in \mathring{D}$ e sia $0 < R < \delta(x)$. Per il teorema precedente

$$|u_{x_h}(x)| \leq \frac{1}{\Omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x)} |u(y)| \frac{|y_h - x_h|}{R} \, d\sigma_y \leq \frac{1}{\Omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x)} |u(y)| \, d\sigma_y \leq$$
$$\frac{\omega_n R^{n-1}}{\Omega_n R^n} \max_{y \in \partial B_R(x)} |u(y)| \leq \frac{n}{R} \max_{y \in D} |u(y)|$$

(si ricordi che $\omega_n = n\,\Omega_n$, cfr. Appendice A). Valendo questa disuguaglianza per ogni $R < \delta(x)$ si trae

$$|u_{x_h}(x)| \leq \frac{n}{\delta(x)} \max_{y \in D} |u(y)|$$

da cui, per il teorema IV.15, segue la tesi.

Dimostriamo ora due teoremi dovuti ad Harnack riguardanti successioni di funzioni armoniche. Nel caso particolare $n = 2$, tenendo presente il teorema IV.10, si vede che questi due teoremi implicano gli analoghi risultati per le successioni di funzioni olomorfe dovuti a Weierstraß.

IV.26 *(1^0 teorema di Harnack.) Sia $\{u_m\}$ una successione di funzioni armoniche convergenti uniformemente all'interno del campo Ω* (17)*. Allora la funzione limite u risulta armonica. Inoltre una qualsiasi successione derivata $\{D^\beta u_m\}$ converge uniformemente all'interno di Ω alla corrispondente derivata $D^\beta u$.*

Fissiamo un compatto $K \subset \Omega$ e sia C un dominio limitato contenuto in Ω e tale che K è contenuto all'interno di C. Per ipotesi, essendo ∂C un compatto di Ω, dato un $\varepsilon > 0$ esiste un ν_ε tale che per ogni $m, p > n_\varepsilon$ si ha

$$|u_m(y) - u_p(y)| < \varepsilon \qquad \forall \; y \in \partial C$$

ossia

$$\max_{y \in \partial C} |u_m(y) - u_p(y)| < \varepsilon \, .$$

(17) Ricordiamo che una successione $\{u_m\}$ converge uniformemente all'interno di Ω se converge uniformemente su ogni compatto $K \subset \Omega$.

Per la (IV.6.3), indicata con δ la distanza (certamente positiva) tra K e ∂C, risulta

$$\left|\frac{\partial u_m(x)}{\partial x_h} - \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_h}\right| \leq \frac{n}{\delta} \max_{y\in\partial C} |u_m(y) - u_p(y)| \leq \frac{n}{\delta}\varepsilon \qquad \forall\, x \in K.$$

Questo dimostra che la successione derivata $\{\frac{\partial u_m}{\partial x_h}\}$ converge uniformemente sul compatto K e quindi, per l'arbitrarietà di K, converge uniformemente all'interno di Ω. Essendo poi le funzioni della successione derivata $\{\frac{\partial u_m}{\partial x_h}\}$ esse stesse armoniche, si può applicare il procedimento ora descritto alle derivate seconde e così via, ottenendo quindi la convergenza uniforme all'interno di Ω di tutte le successioni derivate. Si ha dunque che la funzione limite u è dotata di derivate di qualsiasi ordine e ciascuna derivata $D^\beta u$ è limite uniforme all'interno di Ω della corrispondente successione derivata $\{D^\beta u_m\}$. Inoltre si ha

$$\Delta_2 u(x) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_h^2} = \lim_{m\to\infty} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 u_m(x)}{\partial x_h^2} = \lim_{m\to\infty} \Delta_2 u_m(x) = 0$$

ossia l'armonicità della u.

IV.27 *(2^0 teorema di Harnack.) Sia D un dominio limitato e sia $\{u_m\}$ una successione di funzioni continue in D e armoniche in $\mathring{D}$. Supponiamo la successione $\{u_m\}$ uniformemente convergente sulla ∂D. Allora $\{u_m\}$ converge uniformemente in D e quindi ha per limite una funzione continua in D ed armonica in $\mathring{D}$.*

Dato un $\varepsilon > 0$ esiste un ν_e tale che, per $m, p > \nu_\varepsilon$, si ha

$$|u_m(y) - u_p(y)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in \partial D$$

ossia

$$\max_{y\in\partial D} |u_m(y) - u_p(y)| < \varepsilon\ .$$

Per il teorema IV.15 si ha dunque

$$\max_{y\in D} |u_m(y) - u_p(y)| < \varepsilon$$

da cui la convergenza uniforme della successione $\{u_m\}$ in tutto D. Quindi la funzione limite u risulta continua in D e, per il teorema precedente, armonica in $\mathring{D}$.

C'è anche un terzo teorema, sempre dovuto ad Harnack, che riguarda successioni non decrescenti di funzioni armoniche. Premettiamo un risultato, noto come *disuguaglianza di Harnack in senso esteso.*

IV.28 *Sia Ω un aperto connesso. Fissato un compatto $K \subset \Omega$ e un punto $x_0 \in \Omega$, esistono due costanti positive $c(K, x_0)$, $C(K, x_0)$ tali che*

$$c(K, x_0)\, u(x_0) \leq u(x) \leq C(K, x_0)\, u(x_0) \qquad \forall\, x \in K \tag{IV.6.4}$$

quale che sia la funzione u armonica non negativa in Ω.

Il teorema è ovvio se $\Omega = I\!R^n$, dato che in questo caso le u debbono essere costanti. Supponiamo, quindi, $\Omega \neq I\!R^n$. Consideriamo un compatto connesso $K_0 \subset \Omega$ che contenga sia K che x_0. Poniamo $\delta = \operatorname{dist}(K_0, \partial\Omega)$; risulta $0 < \delta < +\infty$. Sia $0 < r < \frac{\delta}{3}$. Essendo K_0 compatto ed essendo

$$K_0 \subset \bigcup_{x \in K_0} B_r(x)$$

esisteranno $x_1, \ldots, x_m \in K_0$ tali che

$$K_0 \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_r(x_j)$$

e quindi possiamo scrivere

$$K_0 \subset \bigcup_{j=0}^{m} B_r(x_j) \tag{IV.6.5}$$

(x_0 è il punto di cui all'enunciato).

Per la connessione di K_0, possiamo ordinare le $B_r(x_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ in guisa tale che

$$B_r(x_j) \cap \left(\bigcup_{i=0}^{j-1} B_r(x_i) \right) \neq \emptyset \qquad\qquad j = 1, \ldots, m. \tag{IV.6.6}$$

Per la disuguaglianza di Harnack (IV.6.2), possiamo scrivere

$$R^{n-2} \frac{R - \varrho}{(R + \varrho)^{n-1}}\, u(x_k) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R + \varrho}{(R - \varrho)^{n-1}}\, u(x_k) \qquad \forall\, x \ :\ |x - x_k| = \varrho$$

per ogni funzione u armonica non negativa in Ω, purché $B_R(x_k) \subset \Omega$. In particolare

$$(3r)^{n-2} \frac{3r - 2r}{(3r + 2r)^{n-1}} u(x_k) \leq u(x) \leq (3r)^{n-2} \frac{3r + 2r}{(3r - 2r)^{n-1}} u(x_k) \qquad \forall\, x \ :\ |x - x_k| = 2r$$

(si noti che, per definizione di r, si ha $B_{2r}(x_k) \subset B_{3r}(x_k) \subset \Omega$), ossia

$$\frac{1}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} u(x_k) \leq u(x) \leq 3^{n-2} 5\, u(x_k) \qquad \forall\, x \ :\ |x - x_k| = 2r.$$

Per il teorema del massimo (teorema IV.15) si ha anche

$$c\,u(x_k) \leq u(x) \leq C\,u(x_k) \qquad \forall\ x\ :\ |x-x_k| \leq 2r.$$

avendo posto

$$c = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}\ ; \quad C = 3^{n-2}5\ .$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} c\,u(x_0) \leq u(x) \leq C\,u(x_0) \qquad \forall\ x\ :\ |x-x_0| \leq 2r; \\ c\,u(x_1) \leq u(x) \leq C\,u(x_1) \qquad \forall\ x\ :\ |x-x_1| \leq 2r. \end{aligned}$$

Essendo $c \leq 1 \leq C$, la prima relazione implica

$$c^2 u(x_0) \leq u(x) \leq C^2 u(x_0) \qquad \forall\ x\ :\ |x-x_0| \leq 2r.$$

Essendo d'altra parte $|x_1 - x_0| \leq 2r$ (si ricordi la (IV.6.6)), abbiamo $c\,u(x_0) \leq u(x_1) \leq C\,u(x_0)$ e quindi

$$c^2 u(x_0) \leq cu(x_1) \leq u(x) \leq Cu(x_1) \leq C^2 u(x_0) \qquad \forall\ x\ :\ |x-x_1| \leq 2r\ .$$

In definitiva

$$c^2 u(x_0) \leq u(x) \leq C^2 u(x_0) \qquad \forall\ x \in B_{2r}(x_0) \cup B_{2r}(x_1)\ .$$

Ma si ha anche

$$c\,u(x_2) \leq u(x) \leq C\,u(x_2) \qquad \forall\ x\ :\ |x-x_2| \leq 2r$$

e quindi, ripetendo il ragionamento precedente,

$$c^3 u(x_0) \leq u(x) \leq C^3 u(x_0) \qquad \forall\ x \in B_{2r}(x_0) \cup B_{2r}(x_1) \cup B_{2r}(x_2)\ .$$

Iterando il procedimento

$$c^{m+1} u(x_0) \leq u(x) \leq C^{m+1} u(x_0) \qquad \forall\ x \in \bigcup_{j=0}^{m} B_{2r}(x_j)$$

da cui la tesi in virtù della (IV.6.5).

IV.29 *(3^0 teorema di Harnack.) Sia Ω un aperto connesso e sia $\{u_n\}$ una successione non decrescente di funzioni armoniche in Ω. Se esiste un punto $x_0 \in \Omega$ nel quale la successione è convergente, allora la successione $\{u_n\}$ risulta uniformemente convergente all'interno di Ω.*

Sia K un compatto di Ω; per la disuguaglianza di Harnack in senso esteso, per ogni m, p interi positivi si ha

$$0 \leq u_{m+p}(x) - u_m(x) \leq C(K, x_0) \left[u_{m+p}(x_0) - u_m(x_0)\right] \qquad \forall\, x \in K$$

dato che, per le ipotesi fatte, la funzione $u_{m+p}(x) - u_m(x)$ è armonica e non negativa. Il teorema è così dimostrato.

Vogliamo concludere questa parte, indicando un'altra conseguenza della disuguaglianza di Harnack. Consideriamo una funzione armonica regolare in un dominio limitato. Come sappiamo i punti di minimo e massimo assoluto della funzione cadono sulla frontiera. È ovvio che, se x_0 è un punto della frontiera dove la funzione armonica u assume il suo massimo (minimo), allora la derivata normale (esterna) della u nel punto x_0 risulta non negativa (non positiva), dato che

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t} \tag{IV.6.7}$$

e si ha $u(x_0 + t\nu) \leq u(x_0)$ $(u(x_0 + t\nu) \geq u(x_0))$. Il cosiddetto *principio di Zaremba*, alla dimostrazione del quale premettiamo un lemma, afferma che le predette derivate normali non possono essere nulle.

IV.30 *Sia D un dominio limitato la cui frontiera è supposta di classe C^2. Fissato un punto $x_0 \in \partial D$ esiste una $B_R(x_1)$ con centro x_1 sulla normale interna a ∂D in x_0, con $R = |x_0 - x_1|$ e tale che risulta tutta contenuta in $\overset{\circ}{D}$.*

Per dimostrare il lemma basterà far vedere che, se abbiamo una funzione $f(x') \in C^2(\overline{B}_\delta)$ (dove $B_\delta = \{x' \equiv (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x'| < \delta\}$) tale che

$$f(0, \ldots, 0) = 0, \qquad \operatorname{grad} f(0, \ldots, 0) = 0 \tag{IV.6.8}$$

allora esiste un $R > 0$ tale che

$$f(x') > \sqrt{R^2 - |x'|^2} - R \qquad \forall\, x' \;:\; 0 < |x'| < R. \tag{IV.6.9}$$

Poniamo

$$K = \max_{|\alpha|=2} \max_{|x'| \leq \delta} |D^\alpha f(x')|$$

e scegliamo R tale che

$$0 < R < \min\left(\frac{1}{K(n-1)^2}, \delta\right) . \tag{IV.6.10}$$

Facciamo vedere che con queste scelte la (IV.6.9) è vera. Sia $0 < |x'| < R$; allora, se $f(x') \geq 0$ la (IV.6.9) è certamente soddisfatta, dato che $\sqrt{R^2 - |x'|^2} - R < 0$. Se, invece, $f(x') < 0$, la (IV.6.9) è equivalente a

$$f^2(x') < R^2 - |x'|^2 + R^2 - 2R\sqrt{R^2 - |x'|^2}$$

ossia

$$2R\sqrt{R^2 - |x'|^2} < 2R^2 - (|x'|^2 + f^2(x')) \ . \tag{IV.6.11}$$

D'altra parte in $\overline{B}_\delta$ possiamo scrivere

$$f(x') = f(0) + \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha f(0)\, x'^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}\, x'^\alpha$$

(dove ξ è un punto opportuno di B_δ) e quindi, tenendo presente la (IV.6.8),

$$f(x') = \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}\, x'^\alpha$$

da cui, per la (IV.6.10), [18]

$$|f(x')| \leq K \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!}\, |x'|^2 = K\frac{(n-1)^2}{2}\, |x'|^2 \leq \frac{1}{2R}\, |x'|^2 \ . \tag{IV.6.12}$$

Da questa disuguaglianza si trae

$$f^2(x') \leq \frac{1}{4R^2}|x'|^4 \leq \frac{R^2}{4}$$

per $|x'| \leq R$; ciò implica che il secondo membro della (IV.6.11) è positivo e così la (IV.6.11) sussiste se e solo se

$$4R^2 f^2(x') < |x'|^4 + 2|x'|^2 f^2(x') + f^4(x') \ . \tag{IV.6.13}$$

[18] Si ricordi che, se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$,

$$\sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!}\, a^\alpha = (a_1 + \ldots + a_m)^n$$

e quindi

$$\sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} = m^n \ .$$

Ma essendo per la (IV.6.12)

$$4R^2 f^2(x') \le |x'|^4$$

la (IV.6.13) è certamente soddisfatta (si noti che stiamo supponendo $f(x') < 0$ e quindi non nulla). Il lemma è così dimostrato.

Osserviamo che, se cade l'ipotesi di classe C^2, il lemma non è più vero in generale. Consideriamo, ad esempio, il caso $n = 2$ con $f(x) = -x^{\frac{4}{3}}$. Risulta $f(0) = f'(0) = 0$ e se fosse vero l'enunciato del lemma, dovrebbe valere la (IV.6.13), che, in questo caso, si scrive

$$4R^2 x^{\frac{8}{3}} < x^4 + 2x^2 x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{16}{3}}$$

ossia

$$4R^2 < x^{\frac{4}{3}} + 2x^2 + x^{\frac{8}{3}}$$

che è palesemente assurda, dato che il secondo membro tende a zero per $x \to 0$.

IV.31 *(Principio di Zaremba). Sia D un dominio limitato e connesso la cui frontiera è di classe C^2. Sia $u \in C^1(D) \cap C^2(\overset{\circ}{D})$ una funzione armonica non costante. Sia $x_0 \in \partial D$ un punto di massimo (minimo) assoluto per la funzione u. Risulta*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0 \quad (< 0)\ .$$

Sia $x_0 \in \partial D$ un punto di minimo assoluto per u. Sia $B_R(x_1)$ una palla di cui all'enunciato del lemma precedente. Per la disuguaglianza di Harnack (IV.6.2) si ha

$$\frac{R - |x - x_1|}{(R + |x - x_1|)^{n-1}} R^{n-2} [u(x_1) - u(x_0)] \le [u(x) - u(x_0)] \qquad \forall\ x\ :\ |x - x_1| < R$$

(si noti che la funzione $[u(x) - u(x_0)]$ è armonica e non negativa) e quindi

$$\frac{1}{2^{n-1}} \frac{u(x_1) - u(x_0)}{R} \le \frac{u(x) - u(x_0)}{R - |x - x_1|} \qquad \forall\ x\ :\ |x - x_1| < R$$

dato che $R + |x - x_1| < 2R$. Prendiamo x sulla normale a x_0 con $|x - x_0| < R$; in questo caso si ha $|x - x_0| = R - |x - x_1|$ e quindi, facendo tendere $x \to x_0$, si ottiene (si tenga presente la (IV.6.7))

$$\frac{1}{2^{n-1}} \frac{u(x_1) - u(x_0)}{R} \le -\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$$

ossia

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \le -\frac{1}{2^{n-1}} \frac{u(x_1) - u(x_0)}{R}\ .$$

Essendo la u non costante il secondo membro è negativo. Per quanto riguarda i massimi, basta considerare il minimo di $-u$.

7 Le funzioni subarmoniche e il metodo di Perron.

Sia Ω un aperto di $I\!R^n$. Diremo che la funzione a valori reali u risulta *subarmonica* in Ω se è di classe $C^0(\Omega)$ [(19)]e se per ogni dominio limitato $T \subset \Omega$ risulta:

$$h \in C^0(T) \cap C^2(\mathring{T}),\ \Delta_2 h = 0 \text{ in } \mathring{T},\ u(x) \leq h(x)\ \forall\ x \in \partial T\ \Rightarrow$$
$$u(x) \leq h(x)\ \forall\ x \in T\ .$$

Quindi la funzione u è subarmonica se, per ogni dominio limitato $T \subset \Omega$ e per ogni funzione armonica h che "è sopra" la u sulla ∂T, si ha che u rimane "sotto" la h in tutto T.

IV.32 *Sia $u \in C^0(\Omega)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*
1) u è subarmonica in Ω;
2) per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\overline{B}_\varrho(x) \subset \Omega$ risulta

$$u(x) \leq \frac{1}{\varrho^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\varrho(x)} u(y)\, d\sigma_y\ ;$$

3) se $T \subset \Omega$ è un dominio limitato e se $h \in C^0(T) \cap C^2(\mathring{T})$, $\Delta_2 h = 0$ in $\mathring{T}$, allora

$$\max_{x\in T}[u(x) - h(x)] = \max_{x\in\partial T}[u(x) - h(x)]\ .$$

1) $\Rightarrow$ 2). Sia $\overline{B}_\varrho(x) \subset \Omega$ e sia h l'integrale di Poisson di u relativo a $B_\varrho(x)$, ossia sia h la funzione armonica in $B_\varrho(x)$ che coincide con u su $\partial B_\varrho(x)$. Per definizione di funzione subarmonica e per il teorema della media, si ha

$$u(x) \leq h(x) = \frac{1}{\varrho^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\varrho(x)} h(y)\, d\sigma_y = \frac{1}{\varrho^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\varrho(x)} u(y)\, d\sigma_y\ .$$

2) $\Rightarrow$ 3). Supponiamo che esiste un punto x_0 interno a T tale che

$$u(x_0) - h(x_0) = \max_{x\in T}[u(x) - h(x)]\ .$$

Consideriamo la $B_\varrho(x)$ con $\varrho = \mathrm{dist}(x, \partial T)$. Per la 2) e per il teorema della media (h è armonica!) possiamo scrivere

$$u(x_0) - h(x_0) \leq \frac{1}{\varrho^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\varrho(x)} [u(y) - h(y)]\, d\sigma_y$$

[(19)]Alcuni Autori danno una definizione più generale di funzione subarmonica, permettendo alla funzione u di essere semicontinua superiormente, ma ciò non sarà per noi necessario.

ossia

$$\int_{\partial B_\varrho(x)} [u(y) - h(y) - (u(x_0) - h(x_0))]\, d\sigma_y \geq 0.$$

Essendo l'integrando non positivo, segue

$$u(y) - h(y) = u(x_0) - h(x_0) \qquad \forall\, y \in \partial B_\varrho(x).$$

Ma dato che $\partial B_\varrho(x) \cap \partial T \neq \emptyset$, esiste almeno un punto $\tilde{y}$ di ∂T nel quale

$$u(\tilde{y}) - h(\tilde{y}) = u(x_0) - h(x_0) = \max_{x \in T}[u(x) - h(x)]$$

ossia la 3).

3) $\Rightarrow$ 1). Se $h \in C^0(T) \cap C^2(\mathring{T})$, $\Delta_2 h = 0$ in $\mathring{T}$ è tale che $u(x) \leq h(x)$ $\forall\, x \in \partial T$, risulta

$$\max_{x \in \partial T}[u(x) - h(x)] \leq 0.$$

Per la 3) sarà

$$\max_{x \in T}[u(x) - h(x)] \leq 0$$

ossia $u(x) \leq h(x)$ in tutto T.

IV.33 *Se $u_1, \ldots, u_n$ sono subarmoniche in Ω, allora una loro combinazione lineare $\sum_{h=1}^n c_h u_h$ con i coefficienti $c_h \geq 0$ risulta subarmonica in Ω.*

La combinazione lineare $\sum_{h=1}^n c_h u_h$ è ovviamente continua. Inoltre, per la 2) del teorema precedente, si ha

$$u_h(x) \leq \frac{1}{\varrho^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\varrho(x)} u_h(y)\, d\sigma_y \qquad h = 1, \ldots, n$$

da cui, essendo $c_h \geq 0$,

$$\sum_{h=1}^n c_h u_h(x) \leq \frac{1}{\varrho^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\varrho(x)} \sum_{h=1}^n c_h u_h(y)\, d\sigma_y$$

che, sussistendo per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $B_\varrho(x) \subset \Omega$, implica la tesi.

IV.34 *Se $u_1, \ldots, u_n$ sono subarmoniche in Ω, allora la funzione*

$$u(x) = \max[u_1(x), \ldots, u_n(x)]$$

risulta subarmonica in Ω.

È ovvio che basta dimostrare questa proprietà per $n = 2$. Se u_1, u_2 sono continue, allora

$$u(x) = \max[u_1(x), u_2(x)]$$

risulta continua. Infatti la controimmagine di un intervallo aperto è aperta, dato che

$$\{x \in \Omega \mid a < u(x) < b\} = \{x \in \Omega \mid a < u(x)\} \cap \{x \in \Omega \mid u(x) < b\} =$$
$$[\{x \in \Omega \mid a < u_1(x)\} \cup \{x \in \Omega \mid a < u_2(x)\}] \cap$$
$$[\{x \in \Omega \mid u_1(x) < b\} \cap \{x \in \Omega \mid u_2(x) < b\}] \ .$$

Inoltre, fissato un punto x e denotata con u_k la funzione tale che

$$u_k(x) = \max[u_1(x), u_2(x)] \ ,$$

si ha

$$u(x) = u_k(x) \leq \frac{1}{\varrho^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\varrho(x)} u_k(y)\, d\sigma_y \leq \frac{1}{\varrho^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\varrho(x)} u(y)\, d\sigma_y$$

per ogni $B_\varrho(x) \subset \Omega$, ossia u è subarmonica.

Se la funzione u è più regolare, precisamente di classe C^2, allora le funzioni subarmoniche sono tutte e sole quelle che hanno il laplaciano non negativo, come dimostrato dal prossimo teorema.

IV.35 *Sia $u \in C^2(\Omega)$. La funzione u è subarmonica se e solo se*

$$\Delta_2 u(x) \geq 0 \qquad \forall\ x \in \Omega. \tag{IV.7.1}$$

Fissiamo una $B_R(x) \subset \Omega$; per (IV.4.5) e (IV.1.3), possiamo scrivere

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n\, R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y)\, d\sigma_y +$$
$$\frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{B_R(x)} \left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right) \Delta_2 u(y)\, dy \ .$$

Essendo $R^{2-n} - |x-y|^{2-n} < 0$ all'interno di $B_R(x)$, dalla (IV.7.1) segue immediatamente la 2) del teorema IV.32, ossia u è subarmonica. Se, viceversa, sussiste la 2) del teorema IV.32, allora si ha

$$\int_{B_R(x)} \left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right) \Delta_2 u(y)\, dy \leq 0$$

per ogni $R > 0$ tale che $B_R(x) \subset \Omega$. Ragionando come nel teorema IV.17, si vede che non può essere $\Delta_2 u(x) < 0$. Per l'arbitrarietà di x, si ha la tesi.

Il prossimo teorema afferma che se modifichiamo una funzione subarmonica u in Ω su un dominio limitato T con una funzione armonica α, la quale "si saldi" con continuità con la funzione u, allora ciò che si ottiene è ancora una funzione subarmonica (si pensi al caso banale uni-dimensionale, dove le funzioni armoniche sono rette e le funzioni subarmoniche sono le funzioni convesse).

IV.36 *Sia u una funzione subarmonica in Ω. Sia $D \subset \Omega$ un dominio limitato e sia $\alpha \in C^0(D) \cap C^2(\mathring{D})$ una funzione armonica in $\mathring{D}$ e tale che $\alpha(x) = u(x)$ per $x \in \partial D$. La funzione così definita*

$$u^*(x) = \begin{cases} \alpha(x) & x \in D \\ u(x) & x \in \Omega - D \end{cases}$$

risulta subarmonica in Ω.

La u^* è continua in Ω. Infatti, è ovvio che la u^* risulta continua all'interno di D e in $\Omega - D$. Inoltre, se $x_0 \in \partial D$, si ha

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{D}}} \alpha(x) = \alpha(x_0) = u(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega - D}} u(x)$$

e quindi

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{D}}} u^*(x) = u^*(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega - D}} u^*(x)$$

ossia u^* è continua anche su ∂D.

Osserviamo anche che si ha

$$u(x) \leq u^*(x) \qquad \forall\, x \in \Omega\ ; \tag{IV.7.2}$$

infatti, se $x \in \Omega - D$ è ovvio, mentre se $x \in D$ si ha $u(x) \leq \alpha(x)$ per definizione di funzione subarmonica.

Per dimostrare la subarmonicità di u^* consideriamo un dominio limitato $T \subset \Omega$ ed una funzione $h \in C^0(T) \cap C^2(\mathring{T})$, armonica in $\mathring{T}$ e tale che $u^* \leq h$ su ∂T.

Dobbiamo far vedere che

$$u^*(x) \leq h(x) \qquad \forall\, x \in T. \tag{IV.7.3}$$

La (IV.7.3) è certamente vera se $T \subset D$ (dove la u^* coincide con la funzione armonica α) oppure se $T \subset \Omega - D$ (dove la u^* coincide con la funzione subarmonica u).

Nel caso generale, osserviamo che la (IV.7.2) implica $u \leq u^* \leq h$ su ∂T e quindi, essendo u subarmonica, sarà $u \leq h$ in tutto T. In particolare

$$u^*(x) = u(x) \leq h(x) \qquad \forall\, x \in T - D. \tag{IV.7.4}$$

La (IV.7.4) mostra, in particolare, che $u^* \leq h$ su $\partial D \cap T$. Abbiamo quindi

$$u^*(x) \leq h(x) \qquad \forall\, x \in \partial(D \cap T), \tag{IV.7.5}$$

dato che $\partial(D \cap T) = (T \cap \partial D) \cup (D \cap \partial T)$ [(20)]. Ma in $D \cap T$ la $u^* - h$ coincide con la funzione armonica $\alpha - h$ e quindi la (IV.7.5) implica $\alpha \leq h$ in $D \cap T$, ossia

$$u^*(x) \leq h(x) \qquad \forall\, x \in D \cap T.$$

La disuguaglianza appena ottenuta e la (IV.7.4) provano la (IV.7.3) e il teorema è così dimostrato.

L'idea base del metodo di Perron è di ottenere la soluzione del problema di Dirichlet come estremo superiore delle funzioni subarmoniche che sono minori od uguali al dato sulla frontiera. Per illustrare questo metodo, cominciamo col dimostrare il seguente risultato

IV.37 *Sia $\Omega \subset I\!\!R^n$ un aperto limitato. Sia f una funzione limitata definita su $\partial\Omega$. Considerato lo spazio*

$$W = \{w \in C^0(\overline{\Omega}) \mid w \text{ è subarmonica in } \Omega;\ w(x) \leq f(x),\ \forall\, x \in \partial\Omega\}$$

e posto

$$u(x) = \sup_{w \in W} w(x) \tag{IV.7.6}$$

la funzione u risulta armonica in Ω.

Facciamo intanto vedere che la funzione (IV.7.6) è ben definita. Lo spazio W è non vuoto, perché contiene almeno le costanti minori dell'estremo inferiore di f su $\partial\Omega$. Inoltre, per ogni x, l'estremo superiore indicato in (IV.7.6) risulta finito, dato che, come vedremo tra un attimo, si ha

$$w(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} f(y) \qquad \forall\, w \in W,\ \forall\, x \in \overline{\Omega}\,. \tag{IV.7.7}$$

[(20)] Infatti si ha:

$$D \cap T = (\mathring{D} \cup \partial D) \cap (\mathring{T} \cup \partial T) = (\mathring{D} \cap \mathring{T}) \cup (\mathring{D} \cap \partial T) \cup (\partial D \cap \mathring{T}) \cup (\partial D \cap \partial T).$$

Ora, poiché $D \cap T$ è chiuso (e quindi contiene la sua frontiera), $\mathring{D} \cap \mathring{T}$ coincide con l'interno di $D \cap T$ e gli altri termini a secondo membro contengono esclusivamente punti di frontiera, si trae subito che

$$\partial(D \cap T) = (\mathring{D} \cap \partial T) \cup (\partial D \cap \mathring{T}) \cup (\partial D \cap \partial T) = (D \cap \partial T) \cup (T \cap \partial D).$$

Infatti, sia $\widetilde{x}$ un punto di massimo assoluto per la funzione w (continua sul compatto $\overline{\Omega}$!). Se $\widetilde{x} \in \partial\Omega$, la (IV.7.7) è vera. Se $\widetilde{x} \in \Omega$, essendo la w subarmonica, risulta

$$w(\widetilde{x}) \leq \frac{1}{\varrho^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\varrho(\widetilde{x})} w(y)\, d\sigma_y$$

per ogni $0 < \varrho < \delta \equiv \mathrm{dist}(\widetilde{x}, \partial\Omega)$. Passando al limite per $\varrho \to \delta$ si ottiene

$$w(\widetilde{x}) \leq \frac{1}{\delta^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\delta(\widetilde{x})} w(y)\, d\sigma_y$$

ossia

$$\int_{\partial B_\delta(\widetilde{x})} [w(y) - w(\widetilde{x})]\, d\sigma_y \geq 0 \ .$$

Ma, dovendo essere $w(y) \leq w(\widetilde{x})$, questo è possibile se e solo se $w(y) = w(\widetilde{x})$ per ogni $y \in \partial B_\delta(\widetilde{x})$. Essendoci almeno un punto della $\partial\Omega$ in $\partial B_\delta(\widetilde{x})$, si ha che esiste almeno un punto sulla $\partial\Omega$ nel quale la w assume il suo valore massimo e quindi la (IV.7.7).

Fissiamo ora un $x_0 \in \Omega$. Per definizione di u esiste una successione $\{w_k\}$ di funzioni di W tale che

$$\lim_{k\to\infty} w_k(x_0) = u(x_0) \ . \tag{IV.7.8}$$

Posto $v_k(x) = \max[w_1(x), \ldots, w_k(x)]$, la v_k risulta subarmonica per il teorema IV.34. Inoltre, essendo

$$w_k(x) \leq f(x) \qquad \forall\ x \in \partial\Omega$$

si ha anche

$$v_k(x) \leq f(x) \qquad \forall\ x \in \partial\Omega$$

e quindi le v_k appartengono a W. Deve essere, allora,

$$v_k(x) \leq u(x) \qquad \forall\ x \in \Omega$$

e quindi, in particolare,

$$w_k(x_0) \leq v_k(x_0) \leq u(x_0)$$

da cui segue, per la (IV.7.8),

$$\lim_{k\to\infty} v_k(x_0) = u(x_0) \ . \tag{IV.7.9}$$

Osserviamo anche che, ovviamente,

$$v_k(x) \leq v_{k+1}(x) \qquad \forall\ x \in \Omega. \tag{IV.7.10}$$

Fissiamo un $B_R(x_0) \subset \Omega$ e sia φ_k la funzione armonica in $B_R(x_0)$ che coincide con v_k sulla $\partial B_R(x_0)$, ossia l'integrale di Poisson della v_k ristretta alla $\partial B_R(x_0)$. Definiamo

$$v_k^*(x) = \begin{cases} v_k(x) & x \in \overline{\Omega} - B_R(x_0) \\ \varphi_k(x) & x \in B_R(x_0) \end{cases} \ .$$

Per il teorema IV.36 le v_k^* risultano subarmoniche. Inoltre, essendo $v_k^*(y) = v_k(y) \leq f(y)$ su $\partial\Omega$, le v_k^* appartengono a W e quindi

$$v_k^*(x) \leq u(x) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega} \tag{IV.7.11}$$

Si ha poi

$$v_k^*(x) \leq v_{k+1}^*(x) \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

Infatti, se $x \in \overline{\Omega} - B_R(x_0)$, questo segue dalla (IV.7.10), mentre se $x \in B_R(x_0)$, dovendo essere $v_k^*(x) - v_{k+1}^*(x) = v_k(x) - v_{k+1}(x) \leq 0$ su $\partial B_R(x_0)$, il teorema di massimo per le funzioni armoniche IV.15 implica che

$$v_k^*(x) - v_{k+1}^*(x) = \varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in \overline{B}_R(x_0)\ . \tag{IV.7.12}$$

Si ha pure che

$$v_k(x) \leq v_k^*(x) \qquad \forall\, x \in \overline{B}_R(x_0)$$

dato che v_k è subarmonica, $v_k^* = \varphi_k$ è armonica in $B_R(x_0)$ e $v_k = \varphi_k$ su $\partial B_R(x_0)$. In particolare, ricordando la (IV.7.11), si ha

$$v_k(x_0) \leq v_k^*(x_0) \leq u(x_0)$$

e quindi, per la (IV.7.9),

$$\lim_{k\to\infty} v_k^*(x_0) = u(x_0)\ . \tag{IV.7.13}$$

Ma in $B_R(x_0)$ v_k^* coincide con la funzione armonica φ_k. Abbiamo così trovato un successione non decrescente di funzioni armoniche $\{\varphi_k\}$ (cfr. la (IV.7.12)) che converge nel punto x_0. Per il terzo teorema di Harnack IV.29 la successione $\{\varphi_k\}$ converge uniformemente in tutto $\overline{B}_R(x_0)$ verso una funzione armonica φ. Risulta

$$\varphi(x_0) = u(x_0)\ . \tag{IV.7.14}$$

Per dimostrare che u è armonica basterà mostrare che si ha

$$\varphi(x) = u(x)$$

in tutto $B_R(x_0)$. Sia quindi $x_1 \in B_R(x_0)$ un punto distinto da x_0. Siano $\widetilde{w}_k$ una successione di W tale che

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{w}_k(x_1) = u(x_1)$$

e sia $\widetilde{v}_k = \max[\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_1]$ cosicché la successione $\{\widetilde{v}_k\}$ risulta monotona e inoltre

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{v}_k(x_1) = u(x_1). \tag{IV.7.15}$$

Poniamo, ancora, $q_k(x) = \max[v_k^*(x), \tilde{v}_k(x)]$. Dato che le $\tilde{v}_k$ appartengono a W (sono subarmoniche e minori di f su $\partial\Omega$), anche la q_k appartengono a W. Essendo, inoltre,

$$v_k^*(x) \leq q_k(x) \leq u(x); \qquad \tilde{v}_k(x) \leq q_k(x) \leq u(x),$$

le (IV.7.13), (IV.7.15) implicano

$$\lim_{k\to\infty} q_k(x_0) = u(x_0); \qquad \lim_{k\to\infty} q_k(x_1) = u(x_1). \tag{IV.7.16}$$

Per trovare una successione di funzioni armoniche convergenti ad u sia in x_0 che in x_1, procediamo come prima e introduciamo la funzione ψ_k armonica in $B_R(x_0)$ e coincidente con q_k su $\partial B_R(x_0)$. Poniamo quindi

$$q_k^*(x) = \begin{cases} q_k(x) & x \in \overline{\Omega} - B_R(x_0) \\ \psi_k(x) & x \in B_R(x_0) \end{cases} .$$

Ragionando come sopra si vede che $q_k^* \in W$ e, dato che $q_k \leq q_k^*$, le (IV.7.16) portano a

$$\lim_{k\to\infty} q_k^*(x_0) = u(x_0); \qquad \lim_{k\to\infty} q_k^*(x_1) = u(x_1)$$

ossia

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x_0) = u(x_0); \qquad \lim_{k\to\infty} \psi_k(x_1) = u(x_1) \tag{IV.7.17}$$

Sempre ragionando come prima, si vede che la successione di funzioni armoniche $\{\psi_k\}$ è non decrescente e quindi, per il terzo teorema di Harnack, convergente uniformemente all'interno di $B_R(x_0)$ ad una funzione armonica ψ. Essendo poi $v_k^*(x) \leq q_k(x) \leq q_k^*(x)$ in tutto Ω, sarà, in particolare su $B_R(x_0)$, $\varphi_k(x) \leq \psi_k(x)$. Passando al limite: $\varphi(x) \leq \psi(x)$. La (IV.7.17) dice che $\psi(x_0) = u(x_0)$ e quindi, per la (IV.7.14): $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$. Allora la funzione $\psi - \varphi$ è armonica in $B_R(x_0)$ e nulla in x_0. Per il teorema della media si ha dunque

$$\int_{B_R(x_0)} [\psi(y) - \varphi(y)]\, dy = 0.$$

Ma $\psi - \varphi$ è anche non negativa e questo implica $\psi \equiv \varphi$ in $B_R(x_0)$. In particolare: $\psi(x_1) = \varphi(x_1) = u(x_1)$ (si ricordi la (IV.7.17) !).

Per l'arbitrarietà di x_1 abbiamo che la u coincide in tutto $B_R(x_0)$ con la funzione armonica φ. Per l'arbitrarietà di x_0 abbiamo la tesi.

Una funzione u è detta *superarmonica* in Ω se $-u$ è subarmonica, ossia se $u \in C^0(\Omega)$ e per ogni dominio limitato $T \subset \Omega$ risulta:

$$h \in C^0(T) \cap C^2(\mathring{T}),\ \Delta_2 h = 0 \text{ in } \mathring{T},\ u(x) \geq h(x)\ \forall\ x \in \partial T\ \Rightarrow$$
$$u(x) \geq h(x)\ \forall\ x \in T\ .$$

È ovvio che per le funzioni superarmoniche sussistono proprietà analoghe a quelle che sussistono per le funzioni subarmoniche, con le disuguaglianze invertite.

Dal teorema appena dimostrato si deduce immediatamente il seguente:

IV.38 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Sia f una funzione limitata definita su $\partial\Omega$. Considerato lo spazio*

$$V = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v \text{ è superarmonica in } \Omega;\ v(x) \geq f(x),\ \forall\, x \in \partial\Omega\}$$

e posto

$$U(x) = \inf_{v\in V} v(x) \tag{IV.7.18}$$

la funzione U risulta armonica in Ω.

Si ha inoltre

IV.39 *Con le notazioni dei due teoremi precedenti risulta*

$$u(x) \leq U(x) \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

Siano $w \in W$, $v \in V$; poichè

$$w(x) \leq f(x) \leq v(x) \qquad \forall\, x \in \partial\Omega$$

si ha

$$w(x) - v(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in \partial\Omega$$

da cui, essendo per il teorema IV.33 $w - v$ subarmonica, segue [21]

$$w(x) - v(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in \Omega$$

ovvero

$$w(x) \leq v(x) \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

Prendendo il sup in W del primo membro, si trova

$$u(x) \leq v(x) \qquad \forall\, x \in \Omega$$

e prendendo poi l'inf del secondo

$$u(x) \leq U(x) \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

[21] Si riscriva la (IV.7.7) con $w - v$ al posto di w e $f \equiv 0$.

Sia Ω un dominio limitato e sia $x_0 \in \partial\Omega$; il punto x_0 si dice *regolare* se esiste una funzione $\omega(x)$ tale che

a) $\omega \in C^0(\overline{\Omega})$;

b) ω è superarmonica in Ω;

c) $\omega(x_0) = 0,\ \omega(x) > 0,\ \forall\ x \in \partial\Omega - \{x_0\}$.

Una funzione ω con queste caratteristiche è detta *barriera.* Siamo ora in grado di dare le condizioni necessarie e sufficienti perché il problema di Dirichlet ammetta sempre soluzione nella classe $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

IV.40 *Sia $\Omega \subset I\!R^n$ un campo limitato. Condizione necessaria e sufficiente affinché il problema di Dirichlet in Ω ammetta soluzione comunque si assegni il dato f continuo è che tutti i punti della frontiera siano regolari.*

La condizione è necessaria. Infatti, fissato il punto $x_0 \in \partial\Omega$, esiste, per ipotesi, la soluzione del problema di Dirichlet seguente

$$\begin{cases} \omega \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \\ \Delta_2\omega = 0 & \text{in } \Omega \\ \omega(x) = |x - x_0| & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

la quale è una barriera relativa ad x_0.

Per dimostrare che la condizione è sufficiente, assegnata la funzione $f \in C^0(\partial\Omega)$ faremo vedere che la funzione u data dalla (IV.7.6) (che, come vedremo, in questo caso coincide con la (IV.7.18)) è la soluzione del problema di Dirichlet. Già sappiamo che u risulta armonica e quindi resta solo da verificare la condizione al bordo. Scegliamo dunque un $x_0 \in \partial\Omega$ e, fissato un $\varepsilon > 0$, consideriamo una $B_\varrho(x_0)$ tale che

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall\ x \in \partial\Omega \cap B_\varrho(x_0). \tag{IV.7.19}$$

Indichiamo con ω_0 il minimo in $\partial\Omega - B_\varrho(x_0)$ (certamente positivo) della barriera ω relativa ad x_0 e con M il massimo di $|f|$ su $\partial\Omega$. Introduciamo le seguenti funzioni

$$w(x) = f(x_0) - \varepsilon - \frac{M + f(x_0)}{\omega_0}\,\omega(x)$$
$$v(x) = f(x_0) + \varepsilon + \frac{M - f(x_0)}{\omega_0}\,\omega(x)$$

Essendo ω superarmonica (e quindi $-\omega$ subarmonica) e risultando $M \pm f(x_0) \geq 0$, le funzioni w e v sono, rispettivamente, subarmonica e superarmonica (cfr. teorema IV.33). Verifichiamo che

$$w(x) \leq f(x) \leq v(x) \qquad \forall\ x \in \partial\Omega\ . \tag{IV.7.20}$$

Supponiamo dapprima che $x \in \partial\Omega - B_\varrho(x_0)$; essendo $\frac{\omega(x)}{\omega_0} \geq 1$, si ha

$$w(x) = f(x_0) - \varepsilon - \frac{M + f(x_0)}{\omega_0}\omega(x) \leq f(x_0) - \varepsilon - M - f(x_0) = -\varepsilon - M < f(x)\,,$$
$$v(x) = f(x_0) + \varepsilon + \frac{M - f(x_0)}{\omega_0}\omega(x) \geq f(x_0) + \varepsilon + M - f(x_0) = \varepsilon + M > f(x)\,.$$

Se, invece, $x \in \partial\Omega \cap B_\varrho(x_0)$, tenendo presente la (IV.7.19), possiamo scrivere

$$w(x) = f(x_0) - \varepsilon - \frac{M + f(x_0)}{\omega_0}\omega(x) \leq f(x_0) - \varepsilon < f(x)\,,$$
$$v(x) = f(x_0) + \varepsilon + \frac{M - f(x_0)}{\omega_0}\omega(x) \geq f(x_0) + \varepsilon > f(x)$$

e quindi la (IV.7.20) è dimostrata. In altri termini abbiamo fatto vedere che $w \in W$, $v \in V$. Deve quindi essere (si ricordi il teorema IV.39)

$$f(x_0) - \varepsilon - \frac{M + f(x_0)}{\omega_0}\omega(x) \leq u(x) \leq U(x) \leq f(x_0) + \varepsilon + \frac{M - f(x_0)}{\omega_0}\omega(x) \qquad \forall\, x \in \Omega\,. \tag{IV.7.21}$$

Facendo tendere $x \to x_0$, avendosi $\omega(x) \to 0$, si ha

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) \leq \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

che, per l'arbitrarietà di ε, implica

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) = f(x_0)$$

e il teorema è dimostrato. Osserviamo che dalla (IV.7.21) segue ugualmente

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} U(x) = f(x_0)$$

e questo, per il teorema di unicità, porta a $u \equiv U$.

8 Condizioni per la regolarità dei punti di frontiera. Il controesempio di Lebesgue.

Sono note varie condizioni che assicurano la regolarità di un punto di frontiera.

IV.41 *Sia Ω un campo limitato e $x_0 \in \partial\Omega$. Se esiste $\xi \in I\!R^n - \overline{\Omega}$ e $B_R(\xi)$ tale che $\overline{B}_R(\xi) \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$, allora x_0 è un punto regolare.*

Posto

$$\omega(x) = \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$$

si ha che ω è una funzione armonica (e quindi superarmonica) in Ω e non negativa in $\overline{\Omega}$. Inoltre, essendo $\omega(x) = 0$ se e solo se $|x-\xi| = R$, l'unico punto di $\overline{\Omega}$ nel quale ω si annulla è x_0. In altri termini ω è una barriera relativa al punto x_0 e il lemma è dimostrato.

Quando esiste una sfera B_R che soddisfa le condizioni indicate nel teorema, si dice che in x_0 è soddisfatta *la condizione della sfera esterna.* Se la frontiera del campo è di classe C^2 in tutti i punti della frontiera questa condizione è certamente soddisfatta (cfr. teorema IV.30). Si ha così che, in un campo di classe C^2, il problema di Dirichlet è sempre risolubile.

Una condizione più sofisticata è la seguente: diremo che in $x_0 \in \partial\Omega$ è soddisfatta la *condizione esterna di cono* se esiste un cono Γ di vertice x_0 tale che $\Gamma \subset I\!\!R^n - \overline{\Omega}$ E $\Gamma \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Dimostreremo tra poco che se in un punto x_0 è soddisfatta la condizione esterna di cono, allora x_0 è regolare.

Premettiamo un lemma tecnico, che può essere visto come una generalizzazione del principio del massimo in un dominio particolare.

Fissato un numero reale positivo α, indicheremo con Γ_α il cono

$$\Gamma_\alpha = \{x \in I\!\!R^n \mid |x'| < \alpha\, x_n\} \qquad (x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

IV.42 *Sia* $\Omega_R = B_R(0) - \overline{\Gamma}_\alpha$ *e sia* $u \in C^0(\overline{\Omega}_R - \{0\}) \cap L^\infty(\Omega_R) \cap C^2(\Omega_R)$, $\Delta_2 u = 0$ *in* Ω_R. *Se* $u(x) \leq C$ *per ogni* $x \in \partial\Omega_R - \{0\}$, *allora* $u(x) \leq C$ *in tutto* Ω_R.

Basterà ovviamente dimostrare il lemma per

$$C = \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega_R - \{0\})}.$$

Sia $M = \|u\|_{L^\infty(\Omega_R)}$ (M risulta finito per ipotesi). Fissiamo un $0 < \varepsilon < R$ e indichiamo con U_ε il campo $\Omega_R - \overline{B}_\varepsilon(0)$.

Poniamo

$$v_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^{n-2}}{|x|^{n-2}}\,(C - M) + [u(x) - C]$$

(stiamo considerando il caso $n \geq 3$; è ovvio come modificare la dimostrazione nel caso $n = 2$).

Mostriamo che $v_\varepsilon \leq 0$ sulla frontiera di U_ε; infatti, se $x \in \partial\Omega_R$, risulta (si noti che $C \leq M$)

$$v_\varepsilon(x) \leq u(x) - C \leq 0$$

mentre, se x appartiene a quella parte di frontiera che è in comune con la $\partial B_\varepsilon(0)$, risulta

$$v_\varepsilon(x) = (C - M) + [u(x) - C] = u(x) - M \leq 0.$$

Essendo v_ε armonica all'interno di U_ε e continua fin sulla frontiera, il principio del massimo permette di dire che $v_\varepsilon \leq 0$ in tutto U_ε, ossia che

$$u(x) \leq C - \frac{\varepsilon^{n-2}}{|x|^{n-2}}(C - M) \qquad \forall\, x \in \Omega_R,\ |x| > \varepsilon. \tag{IV.8.1}$$

Fissato un $x \in \Omega_R$, avremo che la IV.8.1 sussiste per ogni ε tale che $0 < \varepsilon < |x|$ e passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$, si ottiene la tesi.

IV.43 *Sia* $\Omega \equiv \Omega_R = B_R(0) - \overline{\Gamma}_\alpha$. *Sia* $u(x)$ *la funzione definita da (IV.7.6) dove* $f(x) = \frac{|x|}{R}$. *La funzione* u *risulta una barriera relativa al punto* 0.

Osserviamo che risulta

$$0 \leq u(x) \leq 1 \qquad \forall\, x \in \Omega\,. \tag{IV.8.2}$$

Infatti, essendo la funzione identicamente nulla appartenente a W, la prima disuguaglianza è ovvia. La seconda segue dalla (IV.7.7) e dall'osservare che $f(x) \leq 1,\ \forall\, x \in \partial\Omega$.

Per dimostrare il teorema dobbiamo far vedere che la u soddisfa le tre condizioni enunciate a p.88. Già sappiamo (teor. IV.38) che la u risulta di classe 2 in Ω ed è ivi armonica. Inoltre, essendo soddisfatta la condizione della sfera esterna in tutti i punti della $\partial\Omega$ diversi dallo 0, si ha

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x) = f(x_0) \qquad \forall\, x_0\ \in \partial\Omega - \{0\}$$

(cfr. la dimostrazione del teorema IV.40).

Ciò dimostra che $u \in C^0(\overline{\Omega} - \{0\})$ e che $u(x) \neq 0,\ \forall\, x \in \partial\Omega - \{0\}$. Il teorema sarà dunque dimostrato se facciamo vedere che la u è continua anche nel punto 0 e che $u(0) = 0$.

Otterremo ciò facendo vedere che

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) = 0\,. \tag{IV.8.3}$$

Fissiamo un $0 < r < R$ e poniamo

$$\gamma = \max\left\{c, \frac{r}{R}\right\}$$

dove

$$c = \max\{u(x) \mid x \in \overline{\Omega},\ |x| = r\}\,.$$

Osserviamo che $c < 1$; infatti, se così non fosse, dovrebbe esistere un punto η tale che $\eta \in \overline{\Omega},\ |\eta| = r,\ u(\eta) = 1$ (si ricordi la (IV.8.2)). Questo punto η non può appartenere alla $\partial\Omega$, perché lì la funzione u coincide con f ed $f < 1$ (si noti che η cadrebbe su quella parte di $\partial\Omega$ che non appartiene alla $\partial B_R(0)$!).

Deve essere quindi $\eta \in \Omega$; ma allora, in base alla (IV.8.2), il punto η risulterebbe di massimo assoluto per la u e questo, essendo la u armonica e Ω connesso, implicherebbe che u è costante. Ciò è evidentemente assurdo, in quanto la u è certamente non costante sulla $\partial\Omega - \{0\}$. È così dimostrato che $c < 1$ e quindi risulta $0 < \gamma < 1$.

Consideriamo ora la funzione

$$v(x) = u(x) - \gamma\, u\left(\frac{R}{r}\, x\right)$$

in $\Omega_r = \Omega \cap B_r(0)$. Si ha

$$v(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in \partial\Omega_r - \{0\}. \tag{IV.8.4}$$

Infatti, se il punto $x \in \partial\Omega_r$ è tale che $|x| = r$, risulta

$$v(x) = u(x) - \gamma\; f\left(\frac{R}{r}\, x\right) = u(x) - \gamma\, \frac{1}{R}\, \frac{R}{r}\, |x| = u(x) - \gamma \leq u(x) - c \leq 0\,,$$

mentre se $x \in \partial\Omega_r - \{0\}$ appartiene alla frontiera del cono,

$$v(x) = f(x) - \gamma\; f\left(\frac{R}{r}\, x\right) = f(x) - \gamma\, \frac{1}{R}\, \frac{R}{r}\, |x| =$$
$$f(x) - \gamma\, \frac{|x|}{r} \leq f(x) - \frac{r}{R}\, \frac{|x|}{r} = 0$$

e la (IV.8.4) è dimostrata.

Sono soddisfatte tutte le ipotesi del lemma IV.42 e quindi

$$v(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in \Omega_r$$

ossia

$$u(x) \leq \gamma\, u\left(\frac{R}{r}\, x\right) \qquad \forall\, x \in \Omega_r.$$

Ma allora deve essere (si ricordi la (IV.8.2) e che $\gamma > 0$)

$$0 \leq \liminf_{\substack{x\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) \leq \limsup_{\substack{x\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) \leq \gamma\, \limsup_{\substack{x\to 0\\ x\in\Omega}} u\left(\frac{R}{r}\, x\right) = \gamma\, \limsup_{\substack{x\to 0\\ x\in\Omega}} u(x)\,;$$

se fosse

$$\limsup_{\substack{x\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) > 0$$

le disuguaglianze appena ottenute implicherebbero $1 \leq \gamma$ (si noti che il $\limsup u(x)$ è certamente finito per la (IV.8.2)) e questo è assurdo. Deve quindi essere

$$\limsup_{\substack{x\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) = 0$$

e questo prova la (IV.8.3), ossia la tesi.

IV.44 *Sia $\Omega \subset I\!\!R^n$ un aperto limitato e supponiamo che in $x_0 \in \partial\Omega$ sia soddisfatta la condizione esterna di cono. Allora x_0 è regolare.*

Per ipotesi esiste un cono Γ di vertice x_0 ed un $R > 0$ tali che $\overline{\Omega} \cap \overline{\Gamma} \cap B_R(x_0) = \{x_0\}$. Sia u la funzione considerata nel teorema IV.43 relativamente a $B_R(x_0) - \Gamma$; poniamo

$$\tilde{u}(x) \begin{cases} = u(x) & \text{se } x \in \overline{\Omega} \cap B_R(x_0) \\ = 1 & \text{se } x \in \overline{\Omega} - B_R(x_0) \end{cases} .$$

Verifichiamo che la funzione $\tilde{u}$ risulta una barriera per il punto x_0.

È ovvio che la funzione $\tilde{u}$ risulta continua in $\overline{\Omega}$. Inoltre, sulla frontiera di Ω, o il punto x non appartiene alla $B_R(x_0)$ oppure vi appartiene; nel primo caso la $\tilde{u}(x)$ è uguale ovviamente ad 1, mentre nell'altro caso, coincide con la $u(x)$.

D'altra parte, tutti i punti della $\partial\Omega$ che cadono all'interno della $B_R(x_0)$ sono interni a $\Omega_R = B_R(x_0) - \Gamma$, con l'unica eccezione del punto x_0, dove risulta $u(x_0) = 0$.

In un punto di $\partial\Omega - \{x_0\}$ la $u(x)$ non può valere 0, perché altrimenti avremmo un punto interno ad Ω_R dove la u assume un minimo assoluto e questo non può accadere (la u non è costante ecc.). Questo dimostra che $u(x) > 0$ per ogni $x \in \partial\Omega - \{x_0\}$, mentre $u(x_0) = 0$.

Per completare la dimostrazione dobbiamo verificare che $\tilde{u}$ è superarmonica in Ω. Ciò può essere ottenuto con un ragionamento analogo a quello seguito nella dimostrazione del teorema IV.36.

Infatti, sia T un dominio limitato contenuto in Ω e sia $h \in C^0(T) \cap C^2(\mathring{T})$ una funzione armonica all'interno di T e tale che $\tilde{u} \geq h$ su ∂T. Dobbiamo far vedere che

$$\tilde{u}(x) \geq h(x) \qquad \forall\, x \in T. \tag{IV.8.5}$$

Essendo, come sappiamo, $0 \leq u \leq 1$ nel suo insieme di definizione, abbiamo che $\tilde{u} \leq 1$ in tutto Ω. Allora deve essere $h \leq \tilde{u} \leq 1$ su ∂T, da cui si trae $h \leq 1$ in tutto T, per l'armonicità di h,

Possiamo dunque affermare che

$$\tilde{u}(x) = 1 \geq h(x) \qquad \forall\, x \in T - B_R(x_0). \tag{IV.8.6}$$

La (IV.8.6) mostra, in particolare, che $\widetilde{u} \geq h$ su $\partial B_R(x_0) \cap T$. Abbiamo quindi

$$\widetilde{u}(x) \geq h(x) \qquad \forall\, x \in \partial(B_R(x_0) \cap T), \tag{IV.8.7}$$

dato che (cfr. nota [20]) $\partial(B_R(x_0) \cap T) = (T \cap \partial B_R(x_0)) \cup (B_R(x_0) \cap \partial T)$. Ma in $B_R(x_0) \cap T$ la $\widetilde{u} - h$ coincide con la funzione armonica $u - h$ e quindi la (IV.8.7) implica $u \geq h$ in $B_R(x_0) \cap T$, ossia

$$\widetilde{u}(x) \geq h(x) \qquad \forall\, x \in B_R(x_0) \cap T.$$

La disuguaglianza appena ottenuta e la (IV.8.6) provano la (IV.8.5) e il teorema è così dimostrato.

Vi sono diverse classi di domini che si presentano spesso nelle applicazioni, i quali, pur non verificando la condizione esterna della sfera, verificano la condizione del cono. Ciò accade, ad esempio, per tutti i domini poliedrici. È interessante osservare anche che si può dimostrare che se $\partial\Omega \in C^{1,h}$ $(0 < h \leq 1)$, allora in ogni punto della frontiera è soddisfatta la condizione esterna di cono. Si ha così che se $\partial\Omega \in C^{1,h}$ il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace è sempre risolubile.

Costruiamo ora un esempio di aperto limitato per il quale un punto della frontiera non è regolare. Sia $\Omega = B_R(x_0) - \{x_0\}$ e facciamo vedere che il problema di Dirichelt

$$\begin{cases} u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \\ \Delta_2 u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x) = f(x) & \text{se } |x| = R \\ u(x_0) = f(x_0) & \end{cases} \tag{IV.8.8}$$

dove f è una funzione assegnata continua sulla frontiera (ossia $f \in C^0(\partial B_R(x_0))$ e $f(x_0)$ è un valore assegnato) non può ammettere sempre soluzione. Supponiamo che il problema di Dirichlet (IV.8.8) abbia una soluzione u. Siano $0 < \varepsilon < R' < R$; nella corona $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon < |x| < R'|\}$ la funzione u è regolare. Possiamo quindi applicare le formule di Green e scrivere

$$\int_{\partial B_{R'}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0 \tag{IV.8.9}$$

dove ν indica la normale esterna alla corona. D'altra parte, introdotte delle coordinate polari (ϱ, η) di polo x_0, abbiamo

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = -\varepsilon^{n-1} \int_{|\eta|=1} \frac{\partial}{\partial \varrho} u(\varrho, \eta)\Big|_{\varrho=\varepsilon} d\sigma_\eta = -\varepsilon^{n-1} g'(\varepsilon)$$

dove

$$g(\varrho) = \int_{|\eta|=1} u(\varrho, \eta) d\sigma_\eta.$$

Posto
$$C = \int_{\partial B_{R'}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$$
la (IV.8.9) ci dice che la g è soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$\varepsilon^{n-1} g'(\varepsilon) = C \qquad 0 < \varepsilon < R'.$$

Deve quindi essere in $(0, R')$:

$$g(\varepsilon) = \begin{cases} C \log \varepsilon + K & \text{se } n = 2 \\ \frac{C}{2-n}\varepsilon^{2-n} + K & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

con K costante. Ma, essendo $g(0) = \omega_n u(x_0)$, si trae

$$C = 0, \quad u(x_0) = K$$

ossia
$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} u(\varepsilon, \eta) d\sigma_\eta = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \, d\sigma \qquad 0 < \varepsilon < R'.$$
Per l'arbitrarietà di R':

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \, d\sigma \qquad 0 < \varepsilon < R.$$

da cui, passando al limite per $\varepsilon \to R^-$,

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u \, d\sigma.$$

Abbiamo quindi ottenuto che, se esiste la soluzione del problema di Dirichlet (IV.8.8), il dato f deve soddisfare necessariamente la condizione di media

$$f(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} f \, d\sigma.$$

Se questa condizione non è soddisfatta, il problema (IV.8.8) **non** ha soluzione. Abbiamo insomma dimostrato che il punto x_0 non è regolare, dato che tutti i punti di $\partial B_R(x_0)$ sono certamente regolari.

Nel caso $n = 2$ si ha il seguente notevolissimo risultato

IV.45 *Ogni campo limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso ha la frontiera a punti regolari.*

Omettiamo la dimostrazione, per la quale rimandiamo al testo già più volte citato Fichera-De Vito, Funzioni analitiche di una variabile complessa. Si badi che l'essere semplicemente connesso è una condizione sufficiente per la risolubilità del problema di Dirichlet, ma non necessaria. Ad esempio, una corona circolare $\{x \in I\!R^2 \mid r < |x| < R|\}$ risulta, in base al teorema IV.41, un aperto con frontiera a punti regolari, pur non essendo semplicemente connesso.

In dimensione superiore teoremi analoghi al IV.45 sono falsi, come dimostrato dal seguente esempio dovuto a Lebesgue. Consideriamo in $I\!R^3$ la funzione

$$u(x) = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{(t-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}}\, dt.$$

La funzione u risulta armonica al di fuori del segmento $I = \{x \in I\!R^3 \mid 0 \le x_1 \le 1,\, x_2 = x_3 = 0\}$, come facilmente si prova (si può derivare sotto il segno di integrale e la funzione integranda non è altro che la soluzione fondamentale). Nel semispazio $x_1 \le 0$ si ha

$$0 \le u(x) \le 1;$$

infatti la prima disuguaglianza è ovvia (e sussiste in tutto $I\!R^3 - I$), mentre la seconda si ottiene osservando che $(t-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = t^2 - 2x_1 t + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge t^2$ e quindi

$$u(x) \le \int_0^1 dt = 1.$$

Per determinare il comportamento della u nell'altro semispazio, calcoliamoci esplicitamente l'integrale che definisce la u. Posto $\varrho = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ e supposto $x_1 > 0$, $x \notin I$, si ha

$$u(x) = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{(t-x_1)^2 + \varrho^2}}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2(t-x_1)}{\sqrt{(t-x_1)^2 + \varrho^2}}\, dt + x_1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(t-x_1)^2 + \varrho^2}}\, dt.$$

Inoltre

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2(t-x_1)}{\sqrt{(t-x_1)^2 + \varrho^2}}\, dt = \left[\sqrt{(t-x_1)^2 + \varrho^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \sqrt{(1-x_1)^2 + \varrho^2} - \sqrt{x_1^2 + \varrho^2};$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(t-x_1)^2 + \varrho^2}}\, dt = \log\left[(t-x_1) + \sqrt{(t-x_1)^2 + \varrho^2}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=1} =$$

$$\log\left[(1-x_1) + \sqrt{(1-x_1)^2 + \varrho^2}\right] - \log\left[-x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2}\right] =$$

$$\log\left[(1-x_1) + \sqrt{(1-x_1)^2 + \varrho^2}\right] + \log\left[x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2}\right] - 2\log\varrho$$

(nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che [22]

$$-x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2} = \frac{-x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2}} (x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2}) = \frac{\varrho^2}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2}}).$$

Si ha quindi

$$u(x) = \Phi(x_1, \varrho) - 2x_1 \log \varrho$$

dove

$$\Phi(x_1, \varrho) = \sqrt{(1 - x_1)^2 + \varrho^2} - \sqrt{x_1^2 + \varrho^2} + x_1 \log\left[(1 - x_1) + \sqrt{(1 - x_1)^2 + \varrho^2}\right] + x_1 \log\left[x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2}\right].$$

Si noti che la Φ risulta definita in $\mathbb{R}^3 - \{(1,0,0), (0,0,0)\}$. Osserviamo che se, oltre ad essere $x_1 > 0$, si ha anche $x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2} < 1$, allora

$$0 > \log\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2}\right) \geq \log x_1$$

da cui

$$x_1 \left|\log\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2}\right)\right| \leq x_1 |\log x_1|$$

e quindi $x_1 \log\left[x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2}\right] \to 0$ quando $x \to 0$ (con $x_1 > 0$). È allora chiaro che

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x_1 > 0}} \Phi(x_1, \varrho) = 1.$$

Per quanto riguarda l'ultimo termine $-2x_1 \log \varrho$, le sue superficie di livello relative ad un valore $c > 0$ hanno equazione

$$\varrho = e^{-\frac{c}{2x_1}} \tag{IV.8.10}$$

dalla quale è evidente che, se $x_1 \to 0^+$, allora $\varrho \to 0$. Questo significa che, per ogni $c > 0$, le relative superficie di livello contenute nel semispazio $x_1 > 0$ intersecano un qualsiasi intorno dell'origine. Dato che sulla superficie di livello relativa al valore c la funzione u tende a $1 + c$, si trae che la funzione u non risulta continua in 0. Notiamo anche che l'intersezione di una superficie di livello con un piano del tipo $x_1 = \text{cost.}$ è una circonferenza.

[22] Si noti che, dall'essere $x_1 > 0$, segue $x_1 + \sqrt{x_1^2 + \varrho^2} \neq 0$.

Sia Ω il seguente aperto: $\{x \in I\!R^3 \mid u(x) < 1 + c\} \cap \{x \in I\!R^3 \mid |x| < 1\}$. È ovvio dalla definizione che la funzione u risulta armonica in Ω ed ivi limitata. Si ha anche che $u \notin C^0(\overline{\Omega})$ (non è continua in 0) ma la sua restrizione sulla frontiera $\partial\Omega$ lo è, dato che u è certamente continua nella parte della frontiera in comune con la sfera unitaria, mentre si ha $u(x) = 1 + c$ sulla parte restante.

Consideriamo il problema di Dirichlet seguente

$$\begin{cases} v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \\ \Delta_2 v = 0 & \text{in } \Omega \\ v = u & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{IV.8.11}$$

e supponiamo che esista la soluzione v. Essendo v continua sul compatto $\overline{\Omega}$ ed essendo u limitata, esiste una costante M tale che

$$|v(x) - u(x)| \le M \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{IV.8.12}$$

Fissato un $\varepsilon > 0$ introduciamo le seguenti funzioni

$$w^{\pm}(x) = \frac{\varepsilon M}{|x|} \pm (v(x) - u(x))$$

e consideriamole in $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{x \in I\!R^3 \mid |x| > \varepsilon\}$. Risulta

$$\begin{cases} w^{\pm} \in C^0(\overline{\Omega}_\varepsilon) \cap C^2(\Omega_\varepsilon) & \\ \Delta_2 w^{\pm} = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \quad ; \\ w^{\pm} \ge 0 & \text{su } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

le prime due condizioni sono ovvie, mentre l'ultima è vera perché, se $x \in \partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega$, essendo $v = u$, si ha

$$w^{\pm}(x) = \frac{\varepsilon M}{|x|} > 0$$

mentre, se $x \in \partial\Omega_\varepsilon - \partial\Omega$ si ha $|x| = \varepsilon$ e quindi (per la (IV.8.12))

$$w^{\pm}(x) = M \pm (v(x) - u(x)) \ge 0.$$

Per il teorema IV.15 deve essere $w^{\pm}(x) \ge 0$ per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$, ossia

$$|v(x) - u(x)| \le \frac{\varepsilon M}{|x|} \qquad \forall\, x \in \Omega_\varepsilon. \tag{IV.8.13}$$

Fissiamo allora un $x \in \Omega$; la (IV.8.13) sussiste per ogni $0 < \varepsilon < |x|$ e quindi, passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$, si trae

$$v(x) = u(x)$$

ossia, per l'arbitrarietà di x, $v \equiv u$. Ma questo è assurdo, dato che la funzione v è continua in $\overline{\Omega}$, mentre u non lo è. Ciò significa che il problema di Dirichlet (IV.8.11) non ammette soluzione, pur essendo il dato continuo su $\partial\Omega$. In altri termini il campo Ω non ha la frontiera a punti regolari, e precisamente l'origine è un punto non regolare. Si noti la differenza tra un punto singolare della frontiera "penetrante" rispetto ad uno "uscente"; quest'ultimo è evidentemente regolare (per il teorema IV.41), mentre l'esempio di Lebesgue appena discusso mostra che un punto singolare "penetrante" può non essere regolare.

9 Appendice A. Il calcolo di Ω_n e di ω_n.

Vogliamo calcolare il volume di una palla in $I\!R^n$ e la misura ipersuperficiale della sfera. Premettiamo un lemma:

IV.46 *Sia*

$$c_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx \ .$$

Risulta

$$\begin{cases} c_{2m} = \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\, 2 \\ c_{2m+1} = \dfrac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\, \pi \end{cases}$$

per ogni intero positivo m.

Integrando per parti abbiamo

$$c_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx = \Big[(1-x^2)^{\frac{n}{2}} x\Big]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{1} \frac{n}{2}(1-x^2)^{\frac{n}{2}-1}(-2x)\, x\, dx =$$

$$n\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx = n\int_{-1}^{1} (x^2-1)(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx + n\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx =$$

$$-n\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx + n\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx = -nc_n + nc_{n-2}$$

da cui si ricava la seguente formula di riduzione

$$c_n = \frac{n}{n+1} c_{n-2} \ .$$

Essendo poi

$$c_{-1} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi \ ,$$

$$c_0 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \ ,$$

si trae

$$\begin{aligned} c_{2m+1} &= \frac{(2m+1)}{(2m+2)}\, c_{2m-1} = \frac{(2m+1)(2m-1)}{(2m+2)(2m)}\, c_{2m-3} = \dots \\ &= \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\, c_{-1} = \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\, \pi \ ; \\ c_{2m} &= \frac{(2m)}{(2m+1)}\, c_{2m-2} = \frac{(2m)(2m-2)}{(2m+1)(2m-1)}\, c_{2m-4} = \dots \\ &= \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\, c_0 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\, 2 \ , \end{aligned}$$

ossia la tesi.

IV.47 *Indicata con Ω_n la misura n-dimensionale della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$, risulta*

$$\Omega_n = \frac{2^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!!} \tag{IV.9.1}$$

dove $[q]$ indica la parte intera di q.

Cominciamo coll'osservare che, se indichiamo con B_n^R la palla di raggio R e con Ω_n^R la sua misura, posto $\xi = \frac{x}{R}$, abbiamo

$$\Omega_n^R = \int_{B_n^R} dx = \int_{B_n} \left|\det \frac{\partial x}{\partial \xi}\right| d\xi = R^n \int_{B_n} d\xi = R^n \Omega_n \ . \tag{IV.9.2}$$

È ovvio che la misura n-dimensionale di B_n si otterrà integrando da -1 a 1 rispetto ad x_1 la misura $(n-1)$-dimensionale della sezione x_1 =costante, la quale risulta una palla $(n-1)$-dimensionale di raggio $\sqrt{1-x_1^2}$. Quindi possiamo scrivere (tenendo presente (IV.9.2))

$$\Omega_n = \int_{-1}^{1} \Omega_{n-1}^{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \Omega_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx = \Omega_{n-1}\, c_{n-1} \ .$$

Per il lemma IV.46

$$\begin{cases} \Omega_{2m} = \Omega_{2m-1}\, \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\, \pi \\ \Omega_{2m+1} = \Omega_{2m}\, \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\, 2 \end{cases} . \tag{IV.9.3}$$

Dimostriamo ora la tesi per induzione su n. Si verifica subito la tesi per $n = 2$, dato che la (IV.9.1) si riduce a

$$\Omega_2 = \frac{2\pi}{2} \ .$$

Sia quindi $n > 2$ e supponiamo che (IV.9.1) valga per $n-1$. Se $n = 2m$, allora l'ipotesi induttiva è che

$$\Omega_{2m-1} = \frac{2^{2m-1-\left[\frac{2m-1}{2}\right]}\pi^{\left[\frac{2m-1}{2}\right]}}{(2m-1)!!} = \frac{2^m \pi^{m-1}}{(2m-1)!!}$$

dato che

$$\left[\frac{2m-1}{2}\right] = \left[m - \frac{1}{2}\right] = m-1 \ .$$

Dalla (IV.9.3) si trae allora

$$\Omega_{2m} = \frac{2^m \pi^{m-1}}{(2m-1)!!}\,\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,\pi = \frac{2^m \pi^m}{(2m)!!}$$

ossia la tesi per $n = 2m$. Se, invece, $n = 2m+1$, l'ipotesi induttiva si scrive

$$\Omega_{2m} = \frac{2^m \pi^m}{(2m)!!}$$

e la (IV.9.3) implica

$$\Omega_{2m+1} = \frac{2^m \pi^m}{(2m)!!}\,\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\,2 = \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)!!}$$

che non è altro che la (IV.9.1) nel caso $n = 2m+1$, dato che

$$\left[\frac{2m+1}{2}\right] = \left[m + \frac{1}{2}\right] = m \ .$$

IV.48 *Indicata con ω_n la misura ipersuperficiale della sfera unitaria in $I\!\!R^n$, risulta*

$$\omega_n = \frac{2^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-2)!!} \ .$$

È una conseguenza del risultato precedente, non appena si osservi che, essendo $\nu_h = x_h$ su ∂B_n, per le formule di Gauss-Green si ha

$$\omega_n = \int_{\partial B_n} d\sigma = \int_{\partial B_n} (\nu_1^2 + \cdots \nu_n^2)\, d\sigma = \int_{\partial B_n} \sum_{h=1}^n x_h \nu_h \, d\sigma =$$
$$\int_{B_n} \sum_{h=1}^n \frac{\partial x_h}{\partial x_h}\, dx = n \int_{B_n} dx = n\Omega_n$$

e quindi

$$\omega_n = n\,\Omega_n = n\,\frac{2^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!!} \qquad \text{(IV.9.4)}$$

ossia la tesi.

10 Appendice B. Un lemma di approssimazione.

Sia ϱ una funzione ≥ 0 e tale che

$$1)\ \varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \qquad 2)\ \text{spt}\ \varrho \subset B_1(0); \qquad 3) \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x)\,dx = 1.$$

Una siffatta ϱ è, per esempio, la funzione seguente

$$\varrho(x) = \begin{cases} k\, e^{-\frac{1}{1-|x|}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

dove la costante K è data da

$$K = \frac{1}{\displaystyle\int_{|x|<1} e^{-\frac{1}{1-|x|}}\,dx} \ .$$

Definiamo ora

$$\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

($\varepsilon > 0$). Le funzioni ϱ_ε sono tali che

$$1)\ \varrho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \qquad 2)\ \text{spt}\ \varrho_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0); \qquad 3) \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

Le prime due relazioni sono ovvie; per quanto riguarda la terza, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(y)\,\varepsilon^n dy = 1 \ .$$

Funzioni $\{\varrho_\varepsilon\}$ con queste caratteristiche sono dette *mollifiers*. Data una funzione $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ si chiama *regolarizzata* della u la funzione

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\,\varrho_\varepsilon(x-y)\,dy \ .$$

Come dimostrato per la prima volta da Friedrichs (che introdusse il concetto di mollifier) le funzioni u_ε sono di classe C^∞ e approssimano la u, dove il tipo di approssimazione dipende dal grado di regolarità della funzione u. Il prossimo lemma è un esempio in tal senso.

IV.49 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in C^0(\Omega)$; per ogni compatto $D \subset \Omega$, esiste una successione di funzioni $\{u_n\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che u_n converge uniformemente ad u in D.*

Fissiamo un compatto $D \subset \Omega$ e prendiamo un $0 < \varepsilon_0 < \mathrm{dist}(D, \partial\Omega)$. Per $\varepsilon > 0$, indichiamo con D_ε l'ε-intorno di D, ossia l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, D) \leq \varepsilon\}$.

Consideriamo la regolarizzata

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy$$

per $x \in D$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Risulta $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Essendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(t)\, dt = 1$$

si ha

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy - u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy \right| \leq$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(y) - u(x)|\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy = \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - u(x)|\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy\ .$$

Per l'uniforme continuità della u in D_{ε_0}, si ha:

$$\forall\ \sigma > 0,\ \exists\ \delta_\sigma > 0,\ :\forall\ x, y \in D_{\varepsilon_0},\ |x-y| < \delta_\sigma \Rightarrow |u(y) - u(x)| < \sigma.$$

Poiché $B_\varepsilon(x) \subset D_{\varepsilon_0}$ per $x \in D$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \sigma \int_{B_\varepsilon(x)} \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy = \sigma \qquad \forall\ x \in D,$$

non appena ε è anche minore di δ_σ. Questo prova che u_ε tende ad u (per $\varepsilon \to 0^+$) uniformemente in D.

11 Appendice C. La formula di Beltrami.

Supponiamo di avere un cambio di coordinate, ossia una funzione (vettoriale) $x = \varphi(y)$ definita in un campo $A \subset \mathbb{R}^n$ a valori nel campo $B \subset \mathbb{R}^n$ tale che

i) $\varphi \in C^1(A)$;

ii) φ pone una corrispondenza biunivoca tra A e B;

iii) $\det \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0$.

Indichiamo con (a_{ij}) la matrice jacobiana, ossia

$$(a_{ij}) = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j} \right).$$

Sotto le ipotesi predette esiste la trasformazione inversa $x = \psi(y)$, la relativa matrice jacobiana

$$(a^{ij}) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\right)$$

(attenzione agli indici in alto e in basso !) ha determinante non nullo e inoltre

$$(a_{ij})^{-1} = (a^{ij})$$

ossia [(23)]

$$a^{ij} a_{jk} = a_{ij} a^{jk} = \delta_{ik}. \tag{IV.11.1}$$

Consideriamo il *tensore fondamentale* (o *metrico*):

$$g_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i}\frac{\partial \varphi_s}{\partial y_j} = a_{si} a_{sj}.$$

Si noti che risulta $g_{ij} = g_{ji}$. La matrice (g^{ij}) dove

$$g^{ij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_s}\frac{\partial \psi_j}{\partial y_s} = a^{is} a^{js}$$

risulta essere la matrice inversa della (g_{ij}); infatti, in base alla (IV.11.1), si ha

$$g_{ij} g^{jp} = a_{si} a_{sj} a^{jt} a^{pt} = a_{si} \delta_{st} a^{pt} = a_{si} a^{ps} = \delta_{ip}.$$

Questo implica che $g = \det(g_{ij}) \neq 0$. D'altra parte possiamo provare facilmente che $g > 0$: infatti, per il teorema di Binet, si ha: $g = [\det(a_{ij})]^2$.

Osserviamo ora la seguente relazione che ci sarà utile tra poco:

$$g^{ij} a_{pj} = a^{is} a^{js} a_{pj} = a^{is} \delta_{sp} = a^{ip}. \tag{IV.11.2}$$

Supponiamo di avere una funzione $u(x)$ e di considerare la funzione $U(y) = u[\varphi(y)]$; vogliamo vedere come si esprime l'operatore di Laplace nelle nuove variabili y. Ovviamente si avrà $u(x) = U[\psi(x)]$ e quindi

$$\frac{\partial u}{\partial x_h} = \frac{\partial U}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_h} = \frac{\partial U}{\partial y_j} a^{jh}.$$

Riapplicando tale formula:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_h} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial U}{\partial y_j} a^{jh}\right) a^{ik} = \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j} a^{jh} a^{ik} + \frac{\partial U}{\partial y_j}\frac{\partial a^{jh}}{\partial y_i} a^{ik}$$

[(23)]Adottiamo in questo paragrafo la notazione sommatoria estesa , ossia ogniqualvolta in una formula compare un indice ripetuto due volte si sottointende la sommatoria da 1 ad n.

da cui si deduce

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j} a^{jh} a^{ih} + \frac{\partial U}{\partial y_j} \frac{\partial a^{jh}}{\partial y_i} a^{ih}. \tag{IV.11.3}$$

Inoltre, ricordando la (IV.11.2),

$$a^{ih} \frac{\partial a^{jh}}{\partial y_i} = a^{ih} \frac{\partial}{\partial y_i}(g^{jt} a_{ht}) = a^{ih} a_{ht} \frac{\partial g^{jt}}{\partial y_i} + a^{ih} g^{jt} \frac{\partial a_{ht}}{\partial y_i} = \delta_{it} \frac{\partial g^{jt}}{\partial y_i} + g^{is} a_{hs} g^{jt} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_t}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il teorema di Schwarz:

$$\left. \frac{\partial a_{ht}}{\partial y_i} = \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y_i \partial y_t} = \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y_t \partial y_i} = \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_t} \right) .$$

Essendo poi, nella seguente relazione, gli indici i ed s muti possiamo scrivere

$$g^{is} a_{hs} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_t} = g^{si} a_{hi} \frac{\partial a_{hs}}{\partial y_t} = g^{is} a_{hi} \frac{\partial a_{hs}}{\partial y_t}$$

(si ricordi la simmetria di g^{is} !) e quindi

$$g^{is} a_{hs} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_t} = \frac{1}{2} g^{is} \left(a_{hs} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_t} + a_{hi} \frac{\partial a_{hs}}{\partial y_t} \right) = \frac{1}{2} g^{is} \frac{\partial}{\partial y_t}(a_{hi} a_{hs}) = \frac{1}{2} g^{is} \frac{\partial g_{is}}{\partial y_t}.$$

In definitiva abbiamo

$$a^{ih} \frac{\partial a^{jh}}{\partial y_i} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial y_i} + \frac{1}{2} g^{jt} g^{is} \frac{\partial g_{si}}{\partial y_t}. \tag{IV.11.4}$$

D'altra parte, indicato con β^{is} il complemento algebrico dell'elemento g_{is} nella matrice (g_{ij}), risulta [24]

$$\frac{\partial g}{\partial y_t} = \beta^{is} \frac{\partial g_{is}}{\partial y_t}$$

ed essendo

$$g^{is} = g^{si} = \frac{\beta^{is}}{g},$$

si trae, tenendo presente che $g > 0$,

$$g^{is} \frac{\partial g_{is}}{\partial y_t} = \frac{\beta^{is}}{g} \frac{\partial g_{is}}{\partial y_t} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial y_t} = \frac{1}{g} \frac{\partial (\sqrt{g})^2}{\partial y_t} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y_t} .$$

Questa formula e la (IV.11.4) portano a

$$a^{ih} \frac{\partial a^{jh}}{\partial y_i} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial y_i} + g^{jt} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y_t} .$$

[24] Si ricordi la regola di derivazione di un determinante !

Ricordando che, per definizione, si ha $g^{ij} = a^{jh}a^{ih}$, la (IV.11.3) si scrive dunque

$$\Delta_2 u = g^{ij}\frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j} + \left[\frac{\partial g^{ij}}{\partial y_i} + \frac{g^{ij}}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y_i}\right]\frac{\partial U}{\partial y_j}$$

ossia

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\sqrt{g}\, g^{ij}\frac{\partial U}{\partial y_j}\right] \tag{IV.11.5}$$

È questa una celebre formula dovuta a Beltrami. Un aspetto notevole è che il laplaciano viene espresso in termini di g^{ij} (e quindi del tensore metrico) e questo fa sì che il secondo membro della (IV.11.5) abbia senso su una qualsiasi varietà riemanniana Σ e possa essere usato per definire un "laplaciano" su Σ. Tale generale operatore prende il nome di *operatore di Laplace-Beltrami*. Proprietà geometriche della varietà Σ si riflettono in proprietà analitiche di questo operatore.

Concludiamo questo paragrafo con qualche esempio. Introdotte le coordinate polari nel piano

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho\sin\vartheta \end{cases}$$

lo jacobiano è dato da

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varrho,\vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\varrho\sin\vartheta & \varrho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

e quindi il tensore metrico è

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}.$$

Sarà allora

$$\sqrt{g} = \varrho\ ; \qquad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho^2} \end{pmatrix}$$

La (IV.11.5), nel caso in esame, si scrive come

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial U}{\partial\varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)\right]$$

ossia

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial U}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} \tag{IV.11.6}$$

che fornisce l'espressione cercata del laplaciano in coordinate polari nel piano.

Consideriamo, come altro esempio, le coordinate polari nello spazio tridimensionale

$$\begin{cases} x = \varrho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \varrho\cos\varphi \end{cases}.$$

In questo caso si ha

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\varphi,\vartheta)} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi \\ \varrho\cos\varphi\cos\vartheta & \varrho\cos\varphi\sin\vartheta & -\varrho\sin\varphi \\ -\varrho\sin\varphi\sin\vartheta & \varrho\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho^2\sin^2\varphi \end{pmatrix} \quad ; \quad \sqrt{g} = \varrho^2\sin\varphi \ ; \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varrho^2\sin^2\varphi} \end{pmatrix} \ .$$

La (IV.11.5) si scrive allora al modo seguente

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\varrho^2\sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)\right]$$

ossia

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial U}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\varrho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} \ . \qquad \text{(IV.11.7)}$$

Come esercizio, lasciamo al lettore il compito di verificare che nel caso delle coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases}$$

il laplaciano si esprime così:

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial U}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \ .$$

La (IV.11.7) (così come la (IV.11.6) nel piano) permette di determinare facilmente quali sono le funzioni armoniche in tre variabili che dipendono solo da $|x|$, ossia da ϱ. Infatti u è una siffatta funzione se e solo se, in base alla (IV.11.7),

$$\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial U}{\partial\varrho}\right) = 0 \iff \varrho^2\frac{\partial U}{\partial\varrho} = C \iff U = -\frac{C}{\varrho} + K$$

e quindi le funzioni armoniche in tre variabili che dipendono solo da $|x|$ sono

$$u(x) = \frac{C_1}{|x|} + C_2$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie.

Infine, allo scopo di dare un'idea di come si possa definire un operatore di Laplace-Beltrami su varietà più generali di $\mathbb{R}^n$, consideriamo il caso della sfera unitaria Σ di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = \sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \cos\varphi \end{cases} .$$

Essendo

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

risulta

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi \end{pmatrix} , \quad \sqrt{g} = \sin\varphi , \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\varphi} \end{pmatrix} .$$

L'operatore dato dal secondo membro della (IV.11.5) è quindi

$$\Delta_\Sigma u = \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2}$$

che prende, appunto, il nome di operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera.

Capitolo V
L'equazione delle onde: un approccio classico.

1 Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde in una dimensione spaziale.

L'equazione (omogenea) delle onde in una dimensione spaziale (detta anche *equazione della corda vibrante*) è

$$u_{xx} - u_{tt} = 0. \tag{V.1.1}$$

Per risolverla è sufficiente porre

$$\xi = x + t, \qquad \eta = x - t.$$

Infatti, essendo

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad t = \frac{\xi - \eta}{2},$$

posto

$$U(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right) \tag{V.1.2}$$

ossia

$$u(x, t) = U(x + t, x - t),$$

risulta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta};\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta};
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2};\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Allora essendo

$$u_{xx} - u_{tt} = 4\, U_{\xi\eta}$$

avremo che u è soluzione di (V.1.1) se e solo se U soddisfa l'equazione

$$U_{\xi\eta} = 0.$$

Ma U è soluzione di quest'equazione se e solo se

$$U(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

con arbitrarie f, g. Allora la u è soluzione di (V.1.1) se e solo se

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) \tag{V.1.3}$$

con arbitrarie $f, g \in C^2$.

Consideriamo ora il problema di Cauchy per l'equazione (V.1.1).

V.1 *Siano $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$, $\beta \in C^1(\mathbb{R})$. Allora esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R}^2) \\ u_{tt} - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \alpha(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \beta(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ed è data da

$$u(x,t) = \frac{\alpha(x+t) + \alpha(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \beta(\xi)\, d\xi\ . \tag{V.1.4}$$

Si noti che, essendo le caratteristiche le rette $t = \pm x + c$, il problema di Cauchy che stiamo considerando è non caratteristico.

La u soluzione dell'equazione differenziale è necessariamente della forma (V.1.3); imponiamo le condizioni iniziali

$$u(x,0) \equiv f(x) + g(x) = \alpha(x), \qquad u_t(x,0) \equiv f'(x) - g'(x) = \beta(x).$$

Integrando la seconda equazione si ha

$$f(x) - g(x) = \int_0^x \beta(\xi)\, d\xi + c$$

che, messa a sistema con l'altra, porta a

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha(x) + \int_0^x \beta(\xi)\, d\xi + c\right]$$
$$g(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha(x) - \int_0^x \beta(\xi)\, d\xi - c\right]$$

La soluzione sarà quindi data da

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) = \frac{\alpha(x+t) + \alpha(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \beta(\xi)\, d\xi.$$

ossia la tesi.

La formula (V.1.4) prende in nome di *formula di D'Alembert.*

Si noti che, a differenza di quanto richiesto dal generale teorema di Cauchy-Kowalewsky, qui **non** è necessario supporre i dati analitici.

Ci si può chiedere da cosa dipenda il valore della soluzione in un certo punto (x,t). È chiaro dalla (V.1.4) che questo valore dipende unicamente dai valori che α assume agli estremi dell'intervallo $[x-t,x+t]$ e dai valori di β lungo il medesimo intervallo. Ecco perché l'intervallo $[x-t,x+t]$ prende il nome di *dominio di dipendenza* di (x,t).

Viceversa, dato un punto $(x,0)$ ci si può chiedere quali punti sono influenzati (anche se non completamente determinati !) dal valore dei dati nel punto stesso. È chiaro che quest'insieme, chiamato *dominio di influenza* di $(x,0)$ è costituito dal triangolo di vertice $(x,0)$ e lati le caratteristiche passanti per $(x,0)$.

2 Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione superiore.

Consideriamo il caso delle tre variabili spaziali; l'equazione delle onde è

$$\sum_{h=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{V.2.1}$$

V.2 *Sia $\mu\in C^2(I\!R^3)$; il potenziale*

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\int_{|y-x|=t}\frac{\mu(y_1,y_2,y_3)}{|y-x|}\,d\sigma_y \tag{V.2.2}$$

è una soluzione dell'equazione delle onde (V.2.1) per $t>0$.

Posto

$$\xi_i=\frac{y_i-x_i}{t}\qquad (i=1,2,3)$$

cambiando variabile nell'integrale a secondo membro della (V.2.2), si ottiene

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=t\int_{|\xi|=1}\mu(x_1+t\xi_1,x_2+t\xi_2,x_3+t\xi_3)\,d\sigma_\xi$$

dato che $|y-x|=t$ e $d\sigma_y=t^2d\sigma_\xi$. Derivando quest'espressione otteniamo

$$\sum_{h=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2}(x)=t\int_{|\xi|=1}\sum_{h=1}^{3}\frac{\partial^2 \mu}{\partial y_h^2}(x+t\xi)\,d\sigma_\xi\ . \tag{V.2.3}$$

D'altra parte

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{|\xi|=1} \mu(x+t\xi)\, d\sigma_\xi + t\int_{|\xi|=1} \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial y_h}(x+t\xi)\, \xi_h d\sigma_\xi = \frac{u}{t} + \frac{I}{t} \tag{V.2.4}$$

dove

$$I = t^2 \int_{|\xi|=1} \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial y_h}(x+t\xi)\, \xi_h d\sigma_\xi .$$

Derivando la (V.2.4) si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{I}{t^2} = \frac{1}{t}\left(\frac{u}{t} + \frac{I}{t}\right) - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{I}{t^2} = \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} \tag{V.2.5}$$

Tenendo presente che sulla sfera $|y-x| = t$ la normale esterna ν è data da $\nu_h = \frac{y_h - x_h}{t} = \xi_h$, si ha

$$I = \int_{|y-x|=t} \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_h} \nu_h \, d\sigma_y = \int_{|y-x|=t} \frac{\partial \mu(y)}{\partial \nu_y} d\sigma_y = \int_{|y-x|<t} \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu(y)}{\partial y_h^2}\, dy$$

per le formule di Gauss-Green. Introducendo delle coordinate polari

$$I = \int_0^t \varrho^2 d\varrho \int_{|\eta|=1} \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu(x+\varrho\eta)}{\partial y_h^2}\, d\sigma_\eta$$

da cui

$$\frac{\partial I}{\partial t} = t^2 \int_{|\eta|=1} \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu(x+t\eta)}{\partial y_h^2}\, d\sigma_\eta$$

e, tenendo presente la (V.2.5),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = t \int_{|\eta|=1} \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu(x+t\eta)}{\partial y_h^2}\, d\sigma_\eta . \tag{V.2.6}$$

La tesi segue da (V.2.3) e (V.2.6).

L'integrale

$$M(\mu) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|y-x|=t} \mu(y)\, d\sigma_y \tag{V.2.7}$$

prende il nome di *media sferica* della μ. Si noti che

$$\lim_{t\to 0} M(\mu) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \mu(x+t\eta) d\sigma_\eta = \mu(x) \tag{V.2.8}$$

e che questo limite risulta uniforme sui compatti di $\mathbb{R}^3$, come si verifica facilmente. Il teorema precedente afferma che, se μ è di classe C^2, allora la funzione

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = tM(\mu)$$

è una soluzione dell'equazione delle onde (V.2.1).

V.3 *Siano $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3), \psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. La funzione*

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = t\,M(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}[t\,M(\varphi)]\,, \tag{V.2.9}$$

dove M è l'operatore di media (V.2.7), è soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde (V.2.1)

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+}) & \\ \Delta_2 u - u_{tt} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2, x_3), & \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = \psi(x_1, x_2, x_3)\ . & \end{cases}$$

Abbiamo già osservato che $t\,M(\psi)$ è soluzione dell'equazione delle onde. Allora anche

$$\frac{\partial}{\partial t}[t\,M(\varphi)]$$

è soluzione della stessa equazione (si noti che φ è di classe C^3). Inoltre, essendo

$$u = t\,M(\psi) + M(\varphi) + t\frac{\partial M(\varphi)}{\partial t}$$

si ha (cfr. (V.2.8))

$$\lim_{t\to 0^+} u(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

e, per l'uniformità del limite, risulta $u \in C^0(\overline{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+})$. Inoltre, essendo

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}[t\,M(\psi)] + \frac{\partial^2}{\partial t^2}[t\,M(\varphi)] = M(\psi) + t\frac{\partial M(\psi)}{\partial t} + t\sum_{h=1}^{3}\frac{\partial^2 M(\varphi)}{\partial x_h^2}$$

(si ricordi che $t\,M(\varphi)$ è soluzione dell'equazione delle onde !) si trova

$$\lim_{t\to 0^+} u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = \psi(x_1, x_2, x_3)$$

ed il teorema è così dimostrato.

La formula (V.2.9) prende il nome di *formula di Kirchhoff.*

Come nel caso uni-dimensionale, qui **non** è richiesta l'analiticità dei dati.

Osserviamo anche che si ha

$$\frac{\partial t M(\varphi)}{\partial t} = M(\varphi) + t\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1}\varphi(x+t\eta)\,d\sigma_\eta\right] =$$

$$M(\varphi) + t\frac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1}\sum_{h=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial y_h}(x+t\eta)\,\eta_h d\sigma_\eta = M(\varphi) + \frac{1}{4\pi t}\int_{|x-y|=t}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu}d\sigma_y$$

e quindi la formula di Kirchhoff

$$u(x_1,x_2,x_3,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{|x-y|=t}\psi(y)\,d\sigma_y + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{|x-y|=t}\varphi(y)\,d\sigma_y + \frac{1}{4\pi t}\int_{|x-y|=t}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu}d\sigma_y$$

mostra che il valore assunto dalla soluzione del problema di Cauchy nel punto (x,t) è determinato dai valori che φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ e ψ assumono sulla sfera $(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_1)^3 = t^2$. La sfera di centro (x_1,x_2,x_3) e raggio t è quindi il dominio di dipendenza del punto (x,t). Questo fenomeno prende il nome di *principio di Huygens.*

Si noti la differenza col caso studiato nel paragrafo precedente, dove il dominio di dipendenza era tutto l'intervallo $[x-t,x+t]$ (e non solo la sua frontiera !).

Dal teorema V.3 si può dedurre la soluzione del problema di Cauchy anche per l'equazione in due variabili spaziali

$$\sum_{h=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{V.2.10}$$

Si noti, intanto, che se una funzione φ dipende solo da (y_1,y_2), allora la sua media $M(\varphi)$ non dipende dalla variabile x_3; infatti:

$$M(\varphi) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{|x-y|=t}\varphi(y_1,y_2)\,d\sigma_y = \frac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1}\varphi(x_1+t\eta_1,x_2+t\eta_2)\,d\sigma_\eta.$$

V.4 *Siano* $\varphi \in C^3(I\!\!R^2), \psi \in C^2(I\!\!R^2)$. *La funzione*

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|\le t}\frac{\psi(y_1,y_2)}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\,dy_1dy_2 + \\ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|y-x|\le t}\frac{\varphi(y_1,y_2)}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\,dy_1dy_2\ . \end{aligned} \tag{V.2.11}$$

è soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde (V.2.10)

$$\begin{cases} u \in C^2(I\!R^2 \times I\!R_+) \cap C^0(\overline{I\!R^2 \times I\!R_+}) \\ \Delta_2 u - u_{tt} = 0 & \text{in } I\!R^2 \times I\!R_+ \\ u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \\ u_t(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2) \ . \end{cases}$$

Se le funzioni φ e ψ nella (V.2.9) non dipendono dalla variabile x_3, allora, per l'osservazione fatta pocanzi, la u non dipende dalla x_3; inoltre u è soluzione dell'equazione differenziale (V.2.10) e soddisfa le condizioni iniziali dell'enunciato. La (V.2.9) fornisce quindi la soluzione cercata. Facciamo vedere che la formula così ottenuta si può scrivere come (V.2.11). Posto $y = (y_1, y_2)$, $\widetilde{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $x = (x_1, x_2)$, $\widetilde{x} = (x_1, x_2, 0)$, abbiamo

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\widetilde{y}-\widetilde{x}|=t} \psi(y_1, y_2)\, d\sigma_y + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|\widetilde{y}-\widetilde{x}|=t} \varphi(y_1, y_2)\, d\sigma_y \right]. \qquad \text{(V.2.12)}$$

Si noti che l'integrale è esteso alla sfera $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + y_3^2 = t^2$. Spezziamo questa sfera nelle due semisfere

$$y_3 = \pm\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}.$$

Prendendo y_1, y_2 come parametri per le due mezze sfere si ha su entrambe

$$d\sigma_y = \sqrt{1 + \frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\, dy_1 dy_2 =$$

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\, dy_1 dy_2$$

e il relativo dominio base è $|y - x| \le t$. Allora un integrale del tipo

$$\int_{|\widetilde{y}-\widetilde{x}|=t} f(y_1, y_2)\, d\sigma_y$$

si può scrivere come

$$2t \int_{|y-x|\le t} \frac{f(y_1, y_2)}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2$$

e quindi (V.2.11) non è altro che la (V.2.9).

La formula (V.2.11) è nota come *formula di Poisson*. Questa formula mostra che in questo caso il dominio di dipendenza del punto (x_1, x_2, t) è tutto il disco $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq t^2$. Quindi anche in dimensione 2, come per il caso uni-dimensionale, il principio di Huygens non è valido. Il disturbo in questo caso continuerà indefinitamente, come accade per le onde nell'acqua.

Il metodo che abbiamo usato per dedurre la formula risolutiva per il problema bi-dimensionale considerandolo come un caso particolare tri-dimensionale viene chiamato "method of descent" ed è dovuto ad Hadamard. Lasciamo al Lettore come esercizio di dedurre la formula di D'Alembert dalla formula di Poisson, riapplicando il "method of descent".

3 Il principio di Duhamel.

Consideriamo il problema [25]

$$\begin{cases} \Delta_2 u - u_{tt} = w(x_1, x_2, x_3, t) \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = \psi(x_1, x_2, x_3) \ . \end{cases}$$

È chiaro che u sarà uguale a $u_1 + u_2$ dove u_1 è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta_2 u - u_{tt} = 0 \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = \psi(x_1, x_2, x_3) \ . \end{cases}$$

e u_2 di

$$\begin{cases} \Delta_2 u - u_{tt} = w(x_1, x_2, x_3, t) \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = 0 \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = 0 \ . \end{cases} \tag{V.3.1}$$

Dato che u_1 sappiamo già come determinarla, basterà limitarsi a considerare il problema (V.3.1). Cominciamo a considerare il caso uni-dimensionale.

V.5 *Sia $w \in C^0(\mathbb{R}^2)$ tale che esiste w_x ed appartiene a $C^0(\mathbb{R}^2)$. La funzione*

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} w(\lambda, \tau)\, d\lambda \tag{V.3.2}$$

è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R}^2) \\ u_{xx} - u_{tt} = w(x,t) \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \ . \end{cases} \tag{V.3.3}$$

[25] Con Δ_2 intendiamo il laplaciano rispetto a una (cioè u_{xx}), due o tre variabili spaziali.

Ragionando come nel paragrafo 1, l'equazione

$$u_{xx} - u_{tt} = w(x,t)$$

è equivalente all'equazione

$$4\,U_{\xi\eta}(\xi,\eta) = W(\xi,\eta) \tag{V.3.4}$$

dove U è data dalla (V.1.2) e

$$W(\xi,\eta) = w\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$$

ossia

$$w(x,t) = W(x+t, x-t). \tag{V.3.5}$$

Inoltre le condizioni iniziali diventano

$$U(\xi,\xi) = 0, \quad U_\xi(\xi,\xi) - U_\eta(\xi,\xi) = 0\,;$$

ma $U(\xi,\xi) = 0$ implica

$$\frac{1}{\sqrt{2}} U_\xi(\xi,\xi) + \frac{1}{\sqrt{2}} U_\eta(\xi,\xi) = 0$$

e quindi le condizioni iniziali possono essere scritte come

$$U(\xi,\xi) = U_\xi(\xi,\xi) = U_\eta(\xi,\xi) = 0. \tag{V.3.6}$$

Integrando la (V.3.4) rispetto ad η troviamo

$$4\,U_\xi(\xi,\eta) = \int_0^\eta W(\xi,u)\,du + \alpha(\xi)$$

e, tenendo presente la (V.3.6),

$$0 = \int_0^\xi W(\xi,u)\,du + \alpha(\xi);$$

si ha dunque

$$4\,U_\xi(\xi,\eta) = \int_\xi^\eta W(\xi,u)\,du\,.$$

Ragionando in maniera analoga si trova:

$$4\,U(\xi,\eta) = \int_\eta^\xi ds \int_s^\eta W(s,u)\,du = -\int_\eta^\xi ds \int_\eta^s W(s,u)\,du = -\iint_{T_{\xi,\eta}} W(s,u)\,ds\,du$$

dove $T_{\xi,\eta}$ è il triangolo definito dalle limitazioni

$$\eta \leq u \leq s \leq \xi \tag{V.3.7}$$

(si noti che $\eta = x - t \leq x + t = \xi$). Ponendo $s = \lambda + \tau$, $u = \lambda - \tau$, le (V.3.7) si riscrivono

$$x - t \leq \lambda - \tau \leq \lambda + \tau \leq x + t$$

e queste condizioni sono equivalenti a

$$\tau \geq 0\,; \quad x - t + \tau \leq \lambda \leq x + t - \tau.$$

Inoltre si deve avere

$$\tau \leq \lambda - x + t \leq x + t - \tau - x + t \iff \tau \leq t\,.$$

In definitiva il triangolo $T_{\xi,\eta}$ diventa l'insieme $D_{x,t}$:

$$0 \leq \tau \leq t; \quad x - t + \tau \leq \lambda \leq x + t - \tau.$$

Essendo poi

$$\left|\det \frac{\partial(s,u)}{\partial(\lambda,\tau)}\right| = 2$$

e tenendo presente la (V.3.5), si ha

$$4\,u(x,t) = -2\iint_{D_{x,t}} W(\lambda+\tau,\lambda-\tau)\,d\lambda\,d\tau = -2\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} w(\lambda,\tau)\,d\lambda$$

ossia la tesi. La condizione sulla w_x assicura che la $u \in C^2(I\!R^2)$ (verificarlo !).

La funzione (V.3.2) può essere riscritta come

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau$$

dove

$$v(x,t,\tau) = -\frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} w(\lambda,\tau)\,d\lambda\ .$$

Ricordando la formula di D'Alembert, si riconosce immediatamente che $v(x,t,\tau)$ è, per ogni τ fissato, soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v_{xx} - v_{tt} = 0 & \text{per } t > \tau \\ v(x,\tau,\tau) = 0 \\ v_t(x,\tau,\tau) = -w(x,\tau)\ . \end{cases} \tag{V.3.8}$$

Abbiamo trovato, insomma, che per $n = 1$ una soluzione del problema (V.3.3) si ottiene integrando da 0 a t le soluzioni dei problemi (V.3.8). È questo un caso particolare del cosiddetto *principio di Duhamel*. Si ha infatti

V.6 *(Duhamel) Sia $x = (x_1, x_2)$ oppure $x = (x_1, x_2, x_3)$. Sia $v(x, t, \tau)$ soluzione del problema di Cauchy seguente per ogni fissato τ:*

$$\begin{cases} \Delta_2 v - v_{tt} = 0 & \text{per } t > \tau \\ v(x, \tau, \tau) = 0 & \\ v_t(x, \tau, \tau) = -w(x, \tau)\ . & \end{cases}$$

La funzione

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t, \tau)\, d\tau$$

è soluzione del problema (V.3.1).

È ovvio che

$$u(x, 0) = 0.$$

Inoltre, tenendo presente le condizioni iniziali, si ha

$$u_t(x, t) = v(x, t, t) + \int_0^t v_t(x, t, \tau)\, d\tau = \int_0^t v_t(x, t, \tau)\, d\tau$$

e quindi

$$u_t(x, 0) = 0.$$

Si ha anche

$$u_{tt}(x, t) = v_t(x, t, t) + \int_0^t v_{tt}(x, t, \tau)\, d\tau = -w(x, t) + \int_0^t v_{tt}(x, t, \tau)\, d\tau$$

ed essendo

$$\Delta_2 u(x, t) = \int_0^t \Delta_2 v(x, t, \tau)\, d\tau$$

risulta

$$\Delta_2 u(x, t) - u_{tt}(x, t) = w(x, t) + \int_0^t [\Delta_2 v - v_{tt}](x, t, \tau)\, d\tau = w(x, t)$$

ossia la tesi.

Si noti l'analogia del principio di Duhamel col metodo del nucleo risolvente per le equazioni differenziali ordinarie.

Osservazione. Indichiamo con $v^*(x, t, \tau)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \Delta_2 v^* - v^*_{tt} = 0 \\ v^*(x, 0, \tau) = 0 \\ v^*_t(x, 0, \tau) = -w(x, \tau)\,. \end{cases} \tag{V.3.9}$$

Allora la v considerata nel teorema precedente è data da

$$v(x, t, \tau) = v^*(x, t - \tau, \tau) \tag{V.3.10}$$

come si verifica immediatamente.

Se, in particolare, $n = 3$, unendo il principio di Duhamel e la formula di Kirchhoff abbiamo il seguente risultato.

V.7 *Sia $w(x,t) \in C^0(I\!R^4)$ e di classe C^2 rispetto alle variabili spaziali x. La soluzione del problema di Cauchy (V.3.1) è data da*

$$u(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_{|y-x|=t-\tau} \frac{w(y,\tau)}{t-\tau}\, d\sigma_y \ . \tag{V.3.11}$$

Per quanto detto in precedenza, dobbiamo determinare la funzione v^* soluzione di (V.3.9). Dalla § 2 sappiamo che

$$v^*(x,t,\tau) = -\frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x|=t} w(y,\tau)\, d\sigma_y$$

e, per l'osservazione fatta pocanzi, abbiamo

$$v(x,t,\tau) = v^*(x,t-\tau,\tau) = -\frac{1}{4\pi(t-\tau)}\int_{|y-x|=t-\tau} w(y,\tau)\, d\sigma_y \ .$$

La tesi si ottiene applicando il principio di Duhamel.

V.8 *La soluzione (V.3.11) può scriversi sotto forma di potenziale di volume "ritardato":*

$$u(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{|y-x|\le t} \frac{w(y,t-|y-x|)}{|y-x|^2}\, dy \ . \tag{V.3.12}$$

Se poniamo $s = t - \tau$ nell'integrale (V.3.11) otteniamo

$$u(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^t s\, ds \int_{|y-x|=s} \frac{w(y,t-s)}{s^2}\, d\sigma_y$$

ossia la (V.3.12). L'integrale che compare in questa formula è un potenziale di volume esteso alla palla $|y-x| \le t$ la cui densità è $w(y, t-|y-x|)$. Dato che in questo potenziale compaiono i valori che la funzione w assume all'istante $t-|y-x|$, ossia prima dell'istante t nel quale l'onda è osservata, il potenziale (V.3.12) prende il nome di *potenziale ritardato*.

Lasciamo al lettore il compito di dedurre risultati analoghi ai teoremi V.7 e V.8 nel caso $n = 2$.

4 Il teorema di unicità per il problema di Cauchy.

Nel precedente paragrafo abbiamo dimostrato l'esistenza della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \Delta_2 u - u_{tt} = w(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{V.4.1}$$

in questo paragrafo vogliamo dimostrare che la soluzione è unica.

V.9 *Sia u una soluzione dell'equazione*

$$\Delta_2 u - u_{tt} = 0$$

Consideriamo la seguente media sferica

$$M(x,\varrho,t) = \frac{1}{4\pi\varrho^2}\int_{|x-y|=\varrho} u(y,t)\,d\sigma_y. \tag{V.4.2}$$

Per ogni x fissato, la funzione ϱM soddisfa l'equazione delle onde uni-dimensionale:

$$\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}[\varrho M(x,\varrho,t)] - \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\varrho M(x,\varrho,t)] = 0.$$

Per ogni t fissato sappiamo che ϱM è soluzione dell'equazione

$$\Delta_2[\varrho M(x,\varrho,t)] = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}[\varrho M(x,\varrho,t)].$$

Inoltre abbiamo che

$$\Delta_2[\varrho M(x,\varrho,t)] = \Delta_2\left[\frac{1}{4\pi\varrho}\int_{|x-y|=\varrho} u(y,t)\,d\sigma_y\right] = \Delta_2\left[\frac{\varrho}{4\pi}\int_{|\eta|=1} u(x+\varrho\eta,t)\,d\sigma_\eta\right] =$$
$$\frac{\varrho}{4\pi}\int_{|\eta|=1}\Delta_2 u(x+\varrho\eta,t)\,d\sigma_\eta = \frac{1}{4\pi\varrho}\int_{|x-y|=\varrho}\Delta_2 u(y,t)\,d\sigma_y$$

e, poiché u è soluzione dell'equazione delle onde,

$$\Delta_2[\varrho M(x,\varrho,t)] = \frac{1}{4\pi\varrho}\int_{|x-y|=\varrho}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(y,t)\,d\sigma_y =$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{4\pi\varrho}\int_{|x-y|=\varrho} u(y,t)\,d\sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\varrho M(x,\varrho,t)].$$

Dalle relazioni ottenute segue subito la tesi.

V.10 *La soluzione del problema di Cauchy (V.4.1) è unica.*

Supponiamo che u_1 e u_2 siano due soluzioni del medesimo problema (V.4.1). Allora la funzione $u = u_1 - u_2$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta_2 u - u_{tt} = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Dimostrare l'unicità significa mostrare che $u \equiv 0$. Consideriamo le medie sferiche (V.4.2) della u. Risulta

$$\lim_{t\to 0^+} M(x,\varrho,t) = \frac{1}{4\pi\varrho^2}\int_{|x-y|=\varrho} u(y,0)\, d\sigma_y = 0$$
$$\lim_{t\to 0^+} M_t(x,\varrho,t) = \frac{1}{4\pi\varrho^2}\int_{|x-y|=\varrho} u_t(y,0)\, d\sigma_y = 0$$

e quindi la funzione ϱM è, per ogni x fissato, una soluzione del problema di Cauchy uni-dimensionale

$$\begin{cases} v_{\varrho\varrho} - v_{tt} = 0 \\ v(\varrho,0) = 0 \\ v_t(\varrho,0) = 0. \end{cases}$$

Ma nel teorema V.1 si è dimostrata non solo l'esistenza della soluzione, ma anche la sua unicità. Deve quindi essere $\varrho M \equiv 0$ e dato che

$$\lim_{\varrho\to 0^+} M(x,\varrho,t) = u(x,t)$$

si trae $u \equiv 0$, ossia la tesi.

5 La dipendenza continua dai dati.

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che il problema di Cauchy per l'equazione delle onde ammette un teorema di esistenza e di unicità (anzi, abbiamo trovato formule integrali esplicite per la soluzione). In questo paragrafo vogliamo indagare la questione della dipendenza continua dai dati. È ovvio che bisognerà specificare le norme usate; qui indagheremo le questioni relative alle norme uniforme sia per i dati che per le soluzioni.

Per $n = 1$, ossia per l'equazione uni-dimensionale delle onde, c'è dipendenza continua. Infatti la formula di D'Alembert (V.1.4) da' immediatamente

$$|u(x,t)| \leq \|\alpha\|_\infty + t\,\|\beta\|_\infty$$

dove $\|f\|_\infty$ denota l'estremo superiore di $|f|$ su tutto $\mathbb{R}$.

Invece, per $n = 2, 3$ le cose vanno diversamente. Ci convinceremo di ciò studiando un controesempio per $n = 3$. Intanto proviamo che

V.11 *Le soluzioni dell'equazione*

$$\Delta_2 u - u_{tt} = 0$$

che dipendono solo da $|x|$ *e* t *sono date da*

$$u(x,t) = \frac{\alpha(|x|+t) + \beta(|x|-t)}{|x|}$$

dove α *e* β *sono due arbitrarie funzioni di* $C^2(I\!R)$.

Ricordando l'espressione del laplaciano in coordinate polari, avremo che u è una soluzione del tipo cercato se e solo se

$$\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial U}{\partial\varrho}\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{V.5.1}$$

dove $U(\varrho,t) = u(x,t)$. Dato che

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial U}{\partial\varrho}\right) = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\cdot\varrho\,\frac{\partial U}{\partial\varrho}\right) = \varrho\frac{\partial U}{\partial\varrho} + \varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\,\frac{\partial U}{\partial\varrho}\right) = \varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{\partial(\varrho\,U)}{\partial\varrho} = \varrho\,\frac{\partial^2(\varrho\,U)}{\partial\varrho^2}$$

la (V.5.1) può essere riscritta come

$$\frac{\partial^2(\varrho\,U)}{\partial\varrho^2} - \frac{\partial^2(\varrho\,U)}{\partial t^2} = 0$$

ossia la (V.5.1) sussiste se e solo se la funzione $\varrho\,U$ è soluzione dell'equazione uni-dimensionale delle onde. Deve quindi essere (cfr. § 1):

$$\varrho\,U(\varrho,t) = \alpha(\varrho+t) + \beta(\varrho-t)$$

con α e β due funzioni arbitrarie di classe C^2, ossia la tesi.

Consideriamo ora una funzione $\Phi \in C^2(I\!R)$ pari (ossia tale che $\Phi(-s) = \Phi(s)$) e poniamo $\alpha(s) = \beta(s) = \frac{1}{2}s\,\Phi(s)$. Per il lemma appena dimostrato la funzione

$$u(x,t) = \frac{(|x|+t)\Phi(|x|+t) + (|x|-t)\Phi(|x|-t)}{2\,|x|}$$

è soluzione dell'equazione delle onde. Più precisamente, essendo

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\Phi(\varrho+t)+\Phi(\varrho-t)}{2}=\frac{\Phi(t)+\Phi(-t)}{2}=\Phi(t)$$

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\Phi(\varrho+t)-\Phi(\varrho-t)}{2\,\varrho}=\lim_{\varrho\to 0}\left(\frac{\Phi(\varrho+t)-\Phi(t)}{2\,\varrho}-\frac{\Phi(\varrho-t)-\Phi(-t)}{2\,\varrho}\right)=$$
$$\frac{\Phi'(t)-\Phi'(-t)}{2}=\Phi'(t)$$

(si tenga presente che Φ è pari), la funzione

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\Phi(|x|+t)+\Phi(|x|-t)}{2}+t\,\dfrac{\Phi(|x|+t)-\Phi(|x|-t)}{2\,|x|} & \text{se } x\neq 0\\ \Phi(t)+t\,\Phi'(t) & \text{se } x=0\end{cases}$$

è la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases}\Delta_2 u-u_{tt}=0\\ u(x,0)=\Phi(|x|)\\ u_t(x,0)=0\end{cases}$$

(l'ultima relazione segue dall'osservare che

$$u_t(x,t)=\frac{\Phi'(|x|+t)-\Phi'(|x|-t)}{2}+\frac{\Phi(|x|+t)-\Phi(|x|-t)}{2\,|x|}+t\,\frac{\Phi'(|x|+t)+\Phi'(|x|-t)}{2\,|x|}$$

e quindi

$$u_t(x,0)=\frac{\Phi'(|x|)-\Phi'(|x|)}{2}+\frac{\Phi(|x|)-\Phi(|x|)}{2\,|x|}=0\ ).$$

È allora evidente che in un insieme del tipo $|x|\geq c>0,\ 0\leq t\leq T$, c'è la dipendenza continua rispetto alla norma uniforme. Ma cosa succede in un intorno di $x=0$?

Consideriamo la seguente successione di funzioni pari

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{n}\sin[n^2(t^2-1)]\ ;$$

per quanto detto la funzione

$$u_n(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\Phi_n(|x|+t)+\Phi_n(|x|-t)}{2}+t\,\dfrac{\Phi_n(|x|+t)-\Phi_n(|x|-t)}{2\,|x|} & \text{se } x\neq 0\\ \Phi_n(t)+t\,\Phi_n'(t) & \text{se } x=0\end{cases}$$

è la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \Delta_2 u - u_{tt} = 0 \\ u(x,0) = \Phi_n(|x|) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

È ovvio che Φ_n converge uniformemente a 0 su tutto $I\!R$. Però, essendo

$$u_n(0,t) = \Phi_n(t) + t\,\Phi_n'(t) = \frac{1}{n}\sin[n^2(t^2-1)] + 2\,n\,t^2\cos[n^2(t^2-1)]$$

risulta

$$u_n\left(0, \sqrt{1+\frac{2\pi}{n^2}}\right) = 2\,n\,\left(1+\frac{2\pi}{n^2}\right) \to \infty$$

per $n \to \infty$ e quindi la successione $u_n(x,t)$ non solo non tende a zero uniformemente ma addirittura non si mantiene limitata in nessun intorno di $(0,1)$. Questo dimostra che non c'è dipendenza continua dai dati rispetto alle norme uniformi.

6 Una proprietà di media.

Consideriamo, nel piano (x,t), un quadrilatero di vertici consecutivi P_i, $(i = 1,2,3,4)$. Diremo che si tratta di un *quadrilatero caratteristico* se i suoi lati giacciono su rette caratteristiche, ossia su rette del tipo $t = \pm x + c$.

V.12 *Sia $u \in C^2(I\!R^2)$; u è soluzione dell'equazione*

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \tag{V.6.1}$$

se e solo se

$$u(P_1) + u(P_3) = u(P_2) + u(P_4) \tag{V.6.2}$$

per ogni quadrilatero caratteristico.

Posto $P_i = (x_i, t_i)$, essendo $t = \pm x + c$ le rette caratteristiche, il quadrilatero sarà caratteristico se e solo se abbiamo le seguenti relazioni

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = t_2 - t_1 \\ x_3 - x_2 = t_2 - t_3 \\ x_4 - x_3 = t_4 - t_3 \\ x_1 - x_4 = t_4 - t_1\ . \end{cases} \tag{V.6.3}$$

Sia ora u soluzione dell'equazione (V.6.1); sappiamo che esistono due funzioni di classe $C^2(I\!R)$ tali che

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) \ .$$

Avremo allora

$$\begin{aligned} u(P_1) + u(P_3) &= f(x_1+t_1) + g(x_1-t_1) + f(x_3+t_3) + g(x_3-t_3), \\ u(P_2) + u(P_4) &= f(x_2+t_2) + g(x_2-t_2) + f(x_4+t_4) + g(x_4-t_4); \end{aligned}$$

d'altra parte, tenendo presenti le (V.6.3), possiamo scrivere

$$u(P_2) + u(P_4) = f(x_3+t_3) + g(x_1-t_1) + f(x_1+t_1) + g(x_3-t_3)$$

e l'ultimo membro non è altro che $u(P_1) + u(P_3)$.

Viceversa, supponiamo di avere una funzione di classe C^2 soddisfacente la (V.6.2) per ogni quadrilatero caratteristico. Se poniamo $x_2 = x_1 + h,\ x_3 = x_1 + h + k$ (h, k numeri reali), in base alle (V.6.3), dovremo avere

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + x_2 - x_1 = t_1 + h, \\ t_3 &= t_2 + x_2 - x_3 = t_1 + h - k. \end{aligned}$$

Inoltre, sempre dalle (V.6.3), si evince che

$$(x_2-x_1)-(x_3-x_2)+(x_4-x_3)-(x_1-x_4) = (t_2-t_1)-(t_2-t_3)+(t_4-t_3)-(t_4-t_1) = 0$$

ossia $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$, da cui

$$x_4 = x_1 - x_2 + x_3 = x_1 - (x_1+h) + (x_1+h+k) = x_1 + k.$$

Ancora dalle (V.6.3) segue

$$t_4 = t_1 + x_1 - x_4 = t_1 + x_1 - (x_1+k) = t_1 - k$$

e quindi possiamo scrivere

$$P_1 = (x_1,t_1),\ P_2 = (x_1+h, t_1+h),\ P_3 = (x_1+h+k, t_1+h-k),\ P_4 = (x_1+k, t_1-k).$$

Allora la (V.6.2) non è altro che

$$u(x_1,t_1) + u(x_1+h+k, t_1+h-k) = u(x_1+h, t_1+h) + u(x_1+k, t_1-k)$$

ossia

$$[u(x_1+h,t_1+h)-u(x_1,t_1)]-[u(x_1+h+k,t_1+h-k)-u(x_1+k,t_1-k)]=0.$$

Derivando quest'espressione rispetto ad h, tenendo presente il teorema di derivazione delle funzioni composte, si trova (per $h=0$):

$$[u_x(x_1,t_1)+u_t(x_1,t_1)]-[u_x(x_1+k,t_1-k)+u_t(x_1+k,t_1-k)]=0.$$

Derivando ancora rispetto a k

$$u_{xx}(x_1,t_1)-u_{xt}(x_1,t_1)+u_{tx}(x_1,t_1)-u_{tt}(x_1,t_1)=0$$

ossia

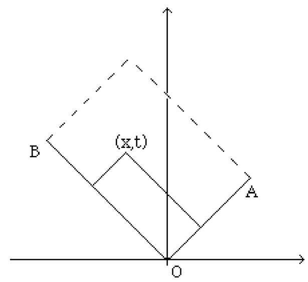
$$u_{xx}(x,t)-u_{tt}(x,t)=0$$

per ogni (x,t).

Si noti che, come si vede dalla prima parte della dimostrazione, la (V.6.2) è vera anche se le funzioni f, g di cui sopra non sono di classe C^2. Non possiamo quindi sperare che dal fatto che la (V.6.2) vale per una funzione u, ad esempio, continua, si possa dedurre che la u è una soluzione di classe C^2 dell'equazione (V.6.1).

7 Altri problemi.

Il problema di Cauchy non è l'unico problema interessante per l'equazione delle onde. In questo paragrafo ne vogliamo indicare qualche altro.
Un primo problema che vogliamo considerare è il cosiddetto problema di Goursat: consideriamo nel piano (x,t) due segmenti caratteristici $OA = \{(x,t) \mid x = t,\ 0 \leq x \leq a\}$, $OB = \{(x,t) \mid x = -t,\ -b \leq x \leq 0\}$ $(a,b > 0)$. Siano φ e ψ due funzioni assegnate di classe C^2 rispettivamente su OA e OB. Si vuole trovare una soluzione dell'equazione delle onde che coincide con le funzioni assegnate φ e ψ rispettivamente su OA e OB. Il problema in esame è quindi



$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0 & \\ u(x,x) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq a \\ u(x,-x) = \psi(x) & -b \leq x \leq 0 \end{cases} .$$

Si suppone ovviamente che $\varphi(0) = \psi(0)$. La formula ottenuta nel precedente paragrafo fornisce immediatamente la soluzione all'interno del quadrilatero caratteristico Q di vertici $(0,0), (a,a), (a-b, a+b), (-b, b)$. Infatti, preso un (x,t) in Q, consideriamo il nuovo quadrilatero caratteristico di vertici $(0,0), (\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}), (x,t), (\frac{x-t}{2}, \frac{t-x}{2})$. Per la proprietà di media, se esiste una soluzione, si ha necessariamente

$$u(x,t) = u\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right) + u\left(\frac{x-t}{2}, \frac{t-x}{2}\right) - u(0,0)$$

e quindi

$$u(x,t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \varphi(0). \qquad \text{(V.7.1)}$$

È immediato constatare che la (V.7.1) fornisce effettivamente la soluzione del problema.

Si osservi che, essendo la funzione u già determinata dai suoi valori su OA ed OB, il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0 & \text{in } Q \\ u = \Phi & \text{su } \partial Q \end{cases}$$

non sarebbe ben posto, in quanto non potremmo assegnare ad arbitrio il dato Φ sulla parte della frontiera $\partial Q - \{OA, OB\}$. Non deve neanche meravigliare che nel problema di Goursat la soluzione è determinata dai valori della funzione, mentre per il problema di Cauchy considerato nei precedenti paragrafi per la stessa equazione dobbiamo assegnare anche la derivata normale; infatti nel problema di Goursat, a differenza di quanto fatto per il problema di Cauchy, la varietà portante i dati è caratteristica.

Consideriamo ora il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0 & \text{in } I\!R_+ \times I\!R_+ \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \geq 0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x \geq 0 \\ u(0,t) = \alpha(t) & t \geq 0 \end{cases} . \tag{V.7.2}$$

V.13 *Assegnate $\varphi \in C^2(I\!R_+)$, $\psi \in C^1(I\!R_+)$, $\alpha \in C^2(I\!R_+)$ tali che*

$$\alpha(0) = \varphi(0), \quad \alpha'(0) = \psi(0), \quad \alpha''(0) = \varphi''(0) \tag{V.7.3}$$

esiste ed è unica la soluzione del problema (V.7.2) ed è data da

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\, d\xi & x \geq t \\ \alpha(t-x) + \dfrac{\varphi(x+t)-\varphi(t-x)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-x}^{t+x} \psi(\xi)\, d\xi & x \leq t \end{cases} \tag{V.7.4}$$

Sappiamo che la soluzione u si deve scrivere come

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

con f e g funzioni di classe C^2. Imponendo le condizioni per $x = 0$ e $t = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) & x \geq 0 \\ f'(x) - g'(x) = \psi(x) & x \geq 0 \\ f(t) + g(-t) = \alpha(t) & t \geq 0. \end{cases} \tag{V.7.5}$$

Ragionando come nella dimostrazione del teorema V.1, si trova

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) + \int_0^x \psi(\xi)\, d\xi + c\right]$$
$$g(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \int_0^x \psi(\xi)\, d\xi - c\right]$$

per $x \geq 0$. Se, allora, $x - t \geq 0$ si ha

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) = \frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\, d\xi \; .$$

Se, invece, $x - t \leq 0$ non possiamo ragionare allo stesso modo; d'altra parte l'ultima relazione delle (V.7.5) ci dice che

$$g(t) = \alpha(-t) - f(-t) \qquad t \leq 0.$$

Sarà quindi, per $x - t \leq 0$,

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) = \alpha(t-x) + \frac{\varphi(x+t) - \varphi(t-x)}{2} + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \psi(\xi)\,d\xi$$

ossia u è data da (V.7.4).

Un altro modo per ottenere la (V.7.4) è quello di osservare che per $x \geq t$ la soluzione è data dalla formula di D'Alembert, mentre per $x < t$ si deve avere

$$u(x,t) = u(0,t-x) + u\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right) - u\left(\frac{t-x}{2}, \frac{t-x}{2}\right)$$

per la proprietà di media. Essendo $u(0,t-x) = \alpha(t-x)$ e sostituendo negli altri termini la loro espressione data dalla formula di D'Alembert, si ottiene la (V.7.4) anche per $x < t$.

Resta da dimostrare che la funzione definita da (V.7.4) è di classe C^2. È ovvio che la funzione u è regolare fuori della bisettrice $x = t$; sarà, allora, continua in tutto $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ se e solo se

$$\frac{\varphi(2x) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{2x} \psi(\xi)\,d\xi = \alpha(0) + \frac{\varphi(2x) - \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{2x} \psi(\xi)\,d\xi$$

ossia se e solo se sussiste la prima delle (V.7.3). Appurato che la u è continua, la u_x è continua se e solo se

$$\frac{\varphi'(2x) + \varphi'(0)}{2} + \frac{\psi(2x) - \psi(0)}{2} = -\alpha'(0) + \frac{\varphi'(2x) + \varphi'(0)}{2} + \frac{\psi(2x) + \psi(0)}{2}$$

ossia se e solo se è soddisfatta la seconda delle (V.7.3). Analogamente si vede che la stessa condizione assicura la continuità della u_t. Infine, per quanto riguarda le derivate seconde, per avere la loro continuità occorrerà che sia soddisfatta l'ultima delle (V.7.3). Infatti la u_{xx} è continua se e solo se

$$\frac{\varphi''(2x) + \varphi''(0)}{2} + \frac{\psi'(2x) - \psi'(0)}{2} = \alpha''(0) + \frac{\varphi''(2x) - \varphi''(0)}{2} + \frac{1}{2}\frac{\psi'(2x) - \psi'(0)}{2};$$

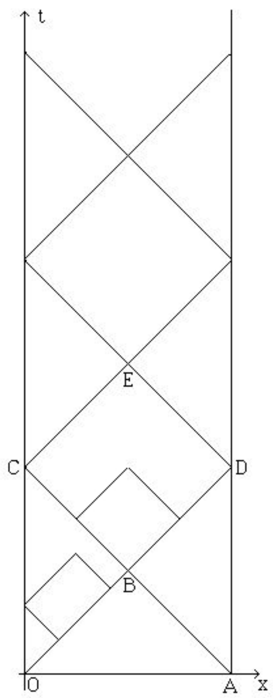
e analogamente si trattano le altre derivate seconde.

Si noti che se una delle (V.7.3) è violata, ossia se c'è una qualche singolarità nei dati nel punto $(0,0)$, la singolarità si "propaga" lungo la linea caratteristica $x = t$.

Un altro problema che vogliamo considerare è l'analogo del (V.7.2) su un intervallo di lunghezza finito:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0 & \text{in } (0,L) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x \in [0,L] \\ u(0,t) = \alpha(t) & t \geq 0 \\ u(L,t) = \beta(t) & t \geq 0 \end{cases} \tag{V.7.6}$$

Ci sono vari modi di affrontare il problema (V.7.2). Un primo, al quale accenniamo brevemente, si basa sulla formula di D'Alembert e sulla proprietà di media. Tracciamo a partire dai punti $(0,0)$ e $(L,0)$ le linee caratteristiche, proseguendole, una volta che incontrano le rette $x=0$, $x=L$, nel modo indicato in figura, sempre tracciando linee caratteristiche. Nel triangolo di vertici OAB la soluzione è determinata dai dati di Cauchy sull'intervallo $[0,L]$ (si ricordi la formula di D'Alembert !). Dopodiché nel triangolo OBC la soluzione si ottiene applicando la proprietà della media a quadrilateri caratteristici come indicato nella figura (si noti che per quanto appena detto la u è stata determinata anche sul segmento OB, mentre il valore della u sul vertice appartenente alla retta $x=0$ è dato dalla funzione assegnata α). Analogamente si determina la soluzione u nel triangolo ABD. Riapplicando la formula della media si ottiene la soluzione in tutto il quadrilatero $BCED$, considerando quadrilateri caratteristici del tipo indicato in figura. Iterando questo procedimento si può determinare (univocamente !) la u in tutta la striscia $[0,L]\times I\!R_+$.



Ovviamente bisognerà imporre condizioni del tipo (V.7.3) in 0 e in L per far sì che la soluzione u risulti di classe C^2.

Un altro modo di affrontare lo stesso problema, nel caso particolare $\alpha\equiv\beta\equiv 0$ è il cosiddetto metodo di riflessione. Considerato il problema

$$\begin{cases} u_{xx}-u_{tt}=0 & \text{in } (0,L)\times I\!R_+ \\ u(x,0)=\varphi(x) & x\in[0,L] \\ u_t(x,0)=\psi(x) & x\in[0,L] \\ u(0,t)=0 & t\geq 0 \\ u(L,t)=0 & t\geq 0 \end{cases} \tag{V.7.7}$$

si prolungano i dati φ e ψ nel seguente modo

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases} \varphi(x-2hL) & 2hL\leq x<(2h+1)L \\ -\varphi(2hL-x) & (2h-1)L\leq x<2hL \end{cases}$$
$$\widetilde{\psi}(x)=\begin{cases} \psi(x-2hL) & 2hL\leq x<(2h+1)L \\ -\psi(2hL-x) & (2h-1)L\leq x<2hL \end{cases}$$

(per ogni h intero relativo). Le funzioni $\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}$ risultano dispari rispetto all'origine e rispetto al punto L. La funzione

$$u(x,t) = \frac{\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \widetilde{\psi}(\xi)\, d\xi \tag{V.7.8}$$

è soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \widetilde{\varphi}(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \widetilde{\psi}(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e quindi, in particolare, è soluzione dell'equazione delle onde in $[0,L] \times \mathbb{R}_+$ e sono soddisfatte le condizioni riguardanti $u(x,0)$ e $u_t(x,0)$ per $x \in [0,L]$. Osserviamo poi che la funzione u data da (V.7.8) risulta essere una funzione dispari della variabile x; infatti si ha, tenendo presente che $\widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi}$ sono dispari

$$u(-x,t) = \frac{\widetilde{\varphi}(-x+t) + \widetilde{\varphi}(-x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-x-t}^{-x+t} \widetilde{\psi}(\xi)\, d\xi \ = \frac{-\widetilde{\varphi}(x-t) - \widetilde{\varphi}(x+t)}{2} -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x+t}^{x-t} \widetilde{\psi}(-u)\, du = -\frac{\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \widetilde{\psi}(u)\, du = -u(x,t)$$

e quindi si ha necessariamente $u(0,t) = 0$. Essendo poi, sia $\widetilde{\varphi}$ che $\widetilde{\psi}$ dispari anche rispetto ad L (ossia $\widetilde{\varphi} - x + L) = -\widetilde{\varphi}(x+L)$ ecc.) si trova, con ragionamento analogo, che $u(L,t) = 0$. La u è dunque soluzione del problema (V.7.7).

8 Il metodo di separazione delle variabili.

Illustreremo *il metodo di separazione delle variabili* risolvendo il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0 & \text{in } (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(L,t) = 0 & t \geq 0\ . \end{cases} \tag{V.8.1}$$

Cominciamo col cercare una soluzione non identicamente nulla dell'equazione

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \tag{V.8.2}$$

della forma particolare

$$u(x,t) = v(x)w(t). \tag{V.8.3}$$

Una siffatta funzione è soluzione di (V.8.1) se e solo se

$$v''(x)w(t) - v(x)w''(t) = 0$$

ossia (supponendo v e w non nulli)

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} .$$

Dato che i due membri di quest'ultima uguaglianza sono uno funzione della sola x e l'altro funzione della sola t, avremo che u è soluzione della (V.8.2) se e solo se esiste una costante λ tale che

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} = -\lambda$$

ossia si deve avere

$$\begin{gathered} v''(x) + \lambda v(x) = 0 \\ w''(t) + \lambda w(t) = 0 \end{gathered}$$

per la stessa costante λ. Dovendo essere poi

$$u(0,t) = v(0)w(t) = 0, \qquad u(\pi,t) = v(\pi)w(t) = 0$$

per ogni $t \geq 0$ ed essendo w non identicamente nulla, si trae $v(0) = v(\pi) = 0$, ossia v deve essere una soluzione non identicamente nulla, ossia quella che si dice un'*autosoluzione*, del problema

$$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0 \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases} . \tag{V.8.4}$$

Si tratta di determinare per quali valori λ questo problema non ammette soltanto la soluzione banale ($v \equiv 0$), ossia di determinare gli *autovalori* del problema (V.8.4).

Se $\lambda = 0$, si deve avere $v(x) = ax + b$; imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \phantom{a\pi +{}} b = 0 \\ a\pi + b = 0 \end{cases} .$$

si trae $a = b = 0$, ossia $v \equiv 0$, e quindi $\lambda = 0$ non è un autovalore. Sia ora $\lambda < 0$; posto $\mu = \sqrt{-\lambda}$, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$v(x) = ae^{-\mu x} + be^{\mu x} ;$$

imponendo le condizioni ai limiti si trova

$$\begin{cases} a & + & b & = & 0 \\ ae^{-\mu\pi} & + & be^{\mu\pi} & = & 0 \end{cases} .$$

Questo sistema ammette autosoluzioni se e solo se il determinante del sistema si annulla, ossia se e solo se $e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi} = 0$; ma questo è impossibile per $\mu \neq 0$ e quindi anche i $\lambda < 0$ non sono autovalori del problema (V.8.4).

Sia ora $\lambda > 0$ e poniamo $\mu = \sqrt{\lambda}$. L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$v(x) = a\sin(\mu x) + b\cos(\mu x)$$

e le condizioni ai limiti diventano

$$\begin{cases} & & b & = & 0 \\ a\sin(\mu\pi) & + & b\cos(\mu\pi) & = & 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} b = 0 \\ a\sin(\mu\pi) = 0 \end{cases}$$

È allora evidente che se μ non è un intero relativo, l'ultima equazione implica $a = 0$ e quindi non ci sono autosoluzioni, mentre se μ è un intero relativo, allora ci sono le autosoluzioni $a\sin(\mu x)$, con a costante arbitraria.

Abbiamo in definitiva ottenuto che gli autovalori del problema (V.8.4) sono tutti e soli $\lambda_n = n^2$ con n intero positivo (è sufficiente considerare gli n positivi, dato che le autofunzioni $\sin(nx)$ sono funzioni dispari). Osserviamo che, in corrispondenza di λ_n, si deve anche avere $w''(t) + n^2 w(t) = 0$, ossia $w(t) = a\cos(nt) + b\sin(nt)$ con a, b costanti arbitrarie. Abbiamo insomma trovato che le soluzioni dell'equazione (V.8.2) della forma (V.8.3) soddisfacenti le condizioni $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ sono necessariamente del tipo

$$u_n(x,t) = \sin(nx)\,(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)) \qquad \text{(V.8.5)}$$

con le costanti a_n, b_n arbitrarie. Queste funzioni prendono il nome di *oscillazioni naturali* o *armoniche*. Ovviamente non si potrà sperare che una funzione del tipo (V.8.5) possa essere soluzione del problema (V.8.1) con φ e ψ assegnate ad arbitrio. Però possiamo cercare la soluzione di (V.8.1) formando una serie i cui termini sono le u_n, ossia

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\,(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)) \ . \qquad \text{(V.8.6)}$$

Ragionando per un momento formalmente (ossia supponendo che la serie sia convergente e siano lecite tutte le derivazioni per serie e i passaggi al limite necessari) si ha che u è soluzione dell'equazione (V.8.1) e soddisfa le condizioni $u(0,t) = u(\pi,0) = 0$. Per avere la soluzione cercata basterà che

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = \varphi(x) \tag{V.8.7}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n \sin(nx) = \psi(x)\ . \tag{V.8.8}$$

Condizioni sotto le quali il ragionamento precedente diventa rigoroso sono date dal seguente teorema

V.14 *Siano $\varphi \in C^2([0,\pi])$, $\psi \in C^1([0,\pi])$ tali che*

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0\ .$$

Allora, posto

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(nx)\,dx, \qquad b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \psi(x)\sin(nx)\,dx,$$

la serie (V.8.6) e le serie derivate prime convergono uniformemente in $[0,\pi]\times I\!R_+$ e sono soddisfatte le condizioni

$$u(0,t) = u_t(\pi,t) = 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x)\ . \tag{V.8.9}$$

Se, inoltre, si ha $\varphi \in C^3([0,\pi]), \psi \in C^2([0,\pi])$ e

$$\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0 \tag{V.8.10}$$

allora la serie (V.8.6) può essere derivata termine a termine due volte ed è quindi la soluzione del problema (V.8.1).

Dimostriamo la prima parte dell'enunciato. Prolungate la φ e la ψ al modo seguente:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x-2h\pi) & x \in [2h\pi,(2h+1)\pi) \\ -\varphi(2h\pi - x) & x \in [(2h-1)\pi, 2h\pi) \end{cases}$$
$$\widetilde{\psi(x)} = \begin{cases} \psi(x-2h\pi) & x \in [2h\pi,(2h+1)\pi) \\ -\psi(2h\pi - x) & x \in [(2h-1)\pi, 2h\pi) \end{cases}$$

(per ogni h intero relativo), cosicché $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$ sono funzioni dispari periodiche, le serie che compaiono nelle (V.8.7), (V.8.8) non sono altro che le serie di Fourier (ristrette all'intervallo $[0,\pi]$) delle funzioni $\widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi}$ rispettivamente. Le funzioni $\widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi}$ sono di classe C^1 in tutto

$I\!R$. La continuità è ovvia, così come la derivabilità nei punti $x \neq k\pi$. Per quanto riguarda questi ultimi punti esistono certamente le derivate destre e sinistre e inoltre, tenendo presente che $\widetilde{\varphi}$ è dispari rispetto a ogni $k\pi$,

$$\widetilde{\varphi}'_-(k\pi) = \lim_{t\to 0^-} \frac{\widetilde{\varphi}(k\pi + t) - \widetilde{\varphi}(k\pi)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\widetilde{\varphi}(k\pi - t)}{-t} =$$
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\widetilde{\varphi}(k\pi + t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\widetilde{\varphi}(k\pi + t) - \widetilde{\varphi}(k\pi)}{t} = \widetilde{\varphi}'_+(k\pi)$$

e quindi la $\widetilde{\varphi}$ (e analogamente la $\widetilde{\psi}$) è derivabile in tutto $I\!R$.

Per il teorema di Dirichlet-Jordan sulle serie di Fourier (cfr., ad es., il Picone-Fichera, Corso di Analisi Matematica, Vol. II, p.151), si ha che le serie nelle (V.8.7), (V.8.8) convergono uniformemente in tutto $I\!R$ e, in particolare, convergono rispettivamente alle φ e ψ in $[0, \pi]$. Inoltre, essendo la φ di classe C^2, possiamo derivare termine a termine la serie (V.8.7) nell'intervallo $[0, \pi]$. Essendo poi

$$\sin(nx)\cos(nt) = \frac{1}{2}\sin(n(x+t)) + \frac{1}{2}\sin(n(x-t))$$

si può scrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)\cos(nt) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n(x+t)) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n(x-t))$$

e quindi questa serie converge uniformemente e può essere derivata termine a termine. Per quanto riguarda la ψ si osservi che, essendo

$$\sin(nx)\sin(nt) = \frac{1}{2}\cos(n(x-t)) - \frac{1}{2}\cos(n(x+t)) = \frac{1}{2}\, n \int_{x-t}^{x+t} \sin(nu)\, du$$

si ha che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\sin(nt)$$

converge uniformemente e può essere derivata termine a termine, essendo le serie derivate uniformemente convergenti. Tutto ciò implica che le condizioni (V.8.9) sono soddisfatte.

Veniamo ora alla seconda parte dell'enunciato. Se $\varphi \in C^3([0, \pi])$ ed è soddisfatta la (V.8.10), tenendo conto di quanto già dimostrato, si ha che $\widetilde{\varphi} \in C^3(I\!R)$. Analogamente si deduce che $\widetilde{\psi} \in C^2(I\!R)$ e quindi la tesi.

9 Le vibrazioni di una membrana.

Vediamo ora come il metodo di separazione delle variabili possa essere utile anche in dimensione superiore. Consideriamo il seguente problema che rappresenta le vibrazioni di una membrana incastrata al bordo

$$\begin{cases} \Delta_2 u - u_{tt} = 0 & \text{in } D \times I\!R_+ \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y) & (x,y) \in D \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y) & (x,y) \in D \\ u(x,y,t) = 0 & (x,y) \in \partial D,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{V.9.1}$$

dove D è un dominio regolare del piano. Cerchiamo, analogamente a quanto fatto prima, una soluzione (non identicamente nulla) dell'equazione

$$\Delta_2 u - u_{tt} = 0 \tag{V.9.2}$$

della forma

$$u(x,y,t) = v(x,y) w(t). \tag{V.9.3}$$

Questa funzione è soluzione dell'equazione (V.9.2) se e solo se

$$w\,\Delta_2 v - v\,w'' = 0$$

ossia se e solo se esiste una costante λ tale che

$$\frac{\Delta_2 v(x,y)}{v(x,y)} = \frac{w''(t)}{w(t)} = -\lambda\ .$$

La condizione $u(x,y,t) = v(x,y)w(t) = 0$ sulla ∂D, per ogni $t \geq 0$ implica (dato che u non è identicamente nulla) $v(x,y) = 0,\ (x,y) \in \partial D$. Quindi siamo condotti alla ricerca degli autovalori del problema

$$\begin{cases} \Delta_2 v(x,y) + \lambda v(x,y) = 0 & (x,y) \in D \\ v(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial D\ . \end{cases} \tag{V.9.4}$$

L'equazione $\Delta_2 v + \lambda v = 0$ prende il nome di *equazione di Helmholtz*. Osserviamo che gli autovalori devono essere necessariamente positivi; infatti, per le formule di Gauss-Green, si ha

$$\int_D |\operatorname{grad} v|^2\, dxdy = \int_{\partial D} v\,\frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma - \int_D v\,\Delta_2 v\, dxdy = \lambda \int_D v^2 dxdy\ .$$

Si può dimostrare che, sotto opportune ipotesi per il dominio D, esiste una successione di autovalori λ_n a cui corrispondono le autofunzioni $v_n(x,y)$. Inoltre ad autovalori distinti corrispondono autofunzioni ortogonali rispetto al prodotto scalare di $L^2(D)$; infatti, se v_n

e v_m sono autofunzioni corrispondenti agli autovalori λ_n e λ_m rispettivamente ($\lambda_n \neq \lambda_m$), si ha

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_D v_n v_m dxdy = \int_D (v_n \Delta_2 v_m - v_m \Delta_2 v_n)\, dxdy =$$
$$\int_{\partial D} \left(v_n \frac{\partial v_m}{\partial \nu} - v_m \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \right) d\sigma = 0$$

È lecito quindi supporre che il sistema $\{v_n\}$ sia ortonormale (rispetto al prodotto scalare di $L^2(D)$). Ragionando come nel caso unidimensionale, si considera la serie

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y) \left(a_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \right) ; \qquad \text{(V.9.5)}$$

si ha che $u(x,y,t) = 0$, $(x,y) \in \partial D$ e si dimostra che è possibile determinare le costanti a_n e b_n in guisa tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x,y) = \varphi(x,y)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n v_n(x,y) = \psi(x,y)$$

nel dominio D, ossia in modo tale che siano soddisfatte tutte le condizioni del problema. Ovviamente bisognerà giustificare tutte le affermazioni che qui sono state fatte solo "formalmente". L'analisi rigorosa di tali questioni è piuttosto difficile e non la svilupperemo in generale. Nei prossimi paragrafi studieremo i casi particolarissimi nei quali D è un rettangolo oppure un disco.

10 La membrana rettangolare.

Sia $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. Per determinare gli autovalori e le autofunzioni dell'equazione di Helmholtz (V.9.4) usiamo ancora il metodo di separazione delle variabili, ossia cerchiamo le soluzioni di (V.9.4) del tipo

$$v(x,y) = X(x)Y(y).$$

L'equazione di Helmholtz diventa

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0$$

ossia

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda\ .$$

Dovranno quindi esistere due costanti p e q tali che

$$X''(x) + pX(x) = 0, \qquad Y''(y) + qY(y) = 0, \qquad p + q = \lambda.$$

Tenendo presente le condizioni ai limiti, vediamo che si tratta di trovare gli autovalori p e q dei seguenti problemi

$$\begin{cases} X''(x) + pX(x) = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y''(y) + qY(y) = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}.$$

Ragionando come nel caso del problema (V.8.4) si vede che gli autovalori sono

$$p_n = \pi^2 \frac{n^2}{a^2}, \qquad q_m = \pi^2 \frac{m^2}{b^2}$$

e le relative autofunzioni

$$\sin\left(\frac{n}{a}\pi x\right), \qquad \sin\left(\frac{m}{b}\pi y\right).$$

Gli autovalori della membrana rettangolare (ossia del problema (V.9.4)) sono quindi

$$\lambda_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$

e le relative autofunzioni

$$v_{n,m}(x, y) = c_{n,m} \sin\left(\frac{n}{a}\pi x\right) \sin\left(\frac{m}{b}\pi y\right).$$

In corrispondenza ad ogni scelta dei numeri interi positivi n, m, la funzione

$$u_{n,m}(x, y, t) = v_{n,m}(x, y) \left(a_{n,m} \cos(\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t) + b_{n,m} \sin(\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t)\right) \tag{V.10.1}$$

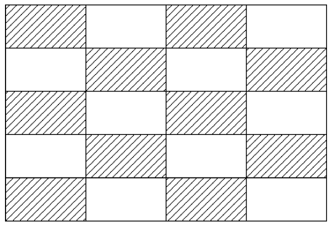
($a_{n,m}$ e $b_{n,m}$ costanti arbitrarie) è soluzione del problema (V.9.1) e verifica la condizione $u_{n,m}(x, y, t) = 0$ sulla $\partial D \times I\!R_+$.

Un suono si dice *puro* se è relativo ad una frequenza sola; le soluzioni (V.10.1) rappresentano quindi dei suoni puri. È interessante osservare che per queste particolare soluzioni, esistono delle curve piane, dette *linee nodali* sulle quali $v_{n,m}(x, y) = 0$ e quindi $u_{n,m}(x, y, t) = 0$ per ogni t. Le linee nodali si ottengono, evidentemente, richiedendo che

$$\sin\left(\frac{n}{a}\pi x\right) \equiv 0 \qquad \text{oppure} \qquad \sin\left(\frac{m}{b}\pi y\right) \equiv 0$$

e quindi sono date da

$$x = \frac{ha}{n} \qquad h = 0, \ldots, n; \qquad\qquad y = \frac{kb}{m} \qquad k = 0, \ldots, m.$$



Nella figura a fianco sono rappresentate le linee nodali relative alla $u_{4,5}$; le parti tratteggiate vibrano in opposizione di fase rispetto a quelle non tratteggiate. La membrana risulta così divisa in $n\times m$ rettangoli, in ognuno dei quali la membrana vibra come se avesse il bordo incastrato.

È bene avvisare che (V.10.1) non sono, in generale, gli unici suoni puri possibili. Consideriamo, infatti, la membrana quadrata $a = b = 1$; lo stesso $\lambda_{n,m}$ (e quindi la stessa frequenza) può provenire da diversi valori di n ed m. Ad esempio, le funzioni $\sin(2\pi x)\,\sin(\pi y)$ e $\sin(\pi x)\,\sin(2\pi y)$ generano entrambe suoni che vibrano alla stessa frequenza, dato che $\lambda_{2,1} = \lambda_{1,2} = 5\pi^2$. Lo stesso sarà per una loro combinazione lineare $\sin(2\pi x)\,\sin(\pi y) + \mu\sin(\pi x)\,\sin(2\pi y)$. Proponiamo al lettore di studiare quali sono le relative linee nodali al variare della costante reale μ.

11 La membrana circolare.

In questo § vogliamo studiare il problema (V.9.1) supponendo D il disco unitario. Allo scopo di determinare la soluzione del problema (V.9.1) sotto forma della serie (V.9.5) dobbiamo determinare gli autovalori e le autofunzioni dell'equazione di Helmholtz (V.9.4). Introduciamo le coordinate polari (ϱ,ϑ) nel piano; la funzione $v(\varrho,\vartheta)$ dovrà essere soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\,\dfrac{\partial v}{\partial\varrho}\right) + \dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\vartheta^2} + \lambda\, v = 0 \\ v(1,\vartheta) = 0 \end{cases} .$$

Cerchiamo di risolvere questo problema separando ancora una volta le variabili, ossia cercando la v della forma

$$v(\varrho,\vartheta) = R(\varrho)\,\Theta(\vartheta)\,. \tag{V.11.1}$$

Dovremo avere

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}[\varrho\,R'(\varrho)]\Theta(\vartheta) + \frac{R(\varrho)}{\varrho^2}\Theta''(\vartheta) + \lambda\,R(\varrho)\,\Theta(\vartheta) = 0$$

ossia

$$-\frac{\Theta''(\vartheta)}{\Theta(\vartheta)} = \frac{\varrho^2 R''(\varrho) + \varrho\,R'(\varrho) + \lambda\,\varrho^2 R(\varrho)}{R(\varrho)}.$$

Deve quindi esistere una costante ω tale che

$$-\frac{\Theta''(\vartheta)}{\Theta(\vartheta)} = \frac{\varrho^2 R''(\varrho) + \varrho\,R'(\varrho) + \lambda\,\varrho^2 R(\varrho)}{R(\varrho)} = \omega\,.$$

Osserviamo che, come si deduce dalla (V.11.1), la funzione Θ deve essere periodica e quindi si deve avere

$$\begin{cases} \Theta''(\vartheta) + \omega\,\Theta(\vartheta) = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases} .$$

Ragionando come nel caso del problema (V.8.4), si vede facilmente che gli unici autovalori sono $\omega_n = n^2$ $(n = 0, 1, \ldots)$ e le relative autofunzioni sono

$$\alpha_n \cos(n\vartheta) + \beta_n \sin(n\vartheta)$$

con α_n e β_n costanti arbitrarie. Dobbiamo allora cercare, se ci sono, le funzioni $R(\varrho)$ autosoluzioni del problema

$$\begin{cases} \varrho^2 R''(\varrho) + \varrho\, R'(\varrho) + (\lambda\,\varrho^2 - n^2)R(\varrho) = 0 \\ R(1) = 0 \end{cases} \tag{V.11.2}$$

(l'ultima condizione traduce il fatto che $v(1,\vartheta) = 0$). Se poniamo $t = \sqrt{\lambda}\,\varrho$ (sappiamo che $\lambda > 0$, cfr. § 9), l'equazione precedente diventa

$$\frac{t^2}{\lambda} R''\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{t}{\sqrt{\lambda}} R'\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + (t^2 - n^2) R\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

e ancora, se poniamo

$$J(t) = R\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) ,$$

il problema (V.11.2) diventa

$$\begin{cases} t^2 J''(t) + tJ'(t) + (t^2 - n^2)J(t) = 0 \\ J\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \end{cases} .$$

Dobbiamo quindi dapprima determinare le soluzioni regolari dell'equazione

$$t^2 J''(t) + tJ'(t) + (t^2 - n^2)J(t) = 0\,, \tag{V.11.3}$$

la quale è detta *equazione di Bessel di ordine* n. Per risolverla poniamo $J(t) = t^n y(t)$; risulta

$$\begin{gathered} t^2 J''(t) + tJ'(t) + (t^2 - n^2)J(t) = \\ t^2[n(n-1)t^{n-2}y + 2nt^{n-1}y' + t^n y''] + t(nt^{n-1}y + t^n y') + (t^2 - n^2)t^n y = \\ t^{n+2}y'' + (2n+1)t^{n+1}y' + t^{n+2}y \end{gathered}$$

e quindi J è soluzione dell'equazione di Bessel se e solo se y è soluzione della seguente (più semplice !) equazione

$$ty'' + (2n+1)y' + ty = 0 \ . \tag{V.11.4}$$

Integriamo per serie, ossia cerchiamo le soluzioni analitiche:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \ ;$$

sostituendo nell'equazione otteniamo

$$t\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} + (2n+1)\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} + t\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k =$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-1} + (2n+1)\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} t^{k-1} =$$

$$(2n+1)a_1 + \sum_{k=2}^{\infty}[(k(k-1)a_k + (2n+1)k a_k + a_{k-2}]\, t^{k-1} = 0 \ .$$

Abbiamo quindi che y è soluzione della (V.11.4) se e solo se

$$\begin{cases} (2n+1)a_1 = 0 \\ k(2n+k)a_k + a_{k-2} = 0 \quad k = 2, 3, \dots \end{cases} \tag{V.11.5}$$

Dato che stiamo supponendo n intero non negativo, dalla prima delle (V.11.5) si trae $a_1 = 0$ che, insieme alla seconda considerata per $k = 2h+1$, implica che $a_{2h+1} = 0$ $(h = 0, 1, 2, \dots)$. Per quanto riguarda gli indici pari, abbiamo

$$a_{2h} = -\frac{a_{2h-2}}{4h(n+h)}$$

da cui, ponendo $a_0 = 1$, si trova, procedendo per induzione,

$$a_{2h} = \frac{(-1)^h}{4^h h!(n+h)(n+h-1)\dots(n+1)} = \frac{(-1)^h n!}{4^h h!(n+h)!}.$$

Allora una soluzione della (V.11.4) è

$$y(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h n!}{4^h h!(n+h)!} t^{2h}$$

e quindi una soluzione della (V.11.3) è

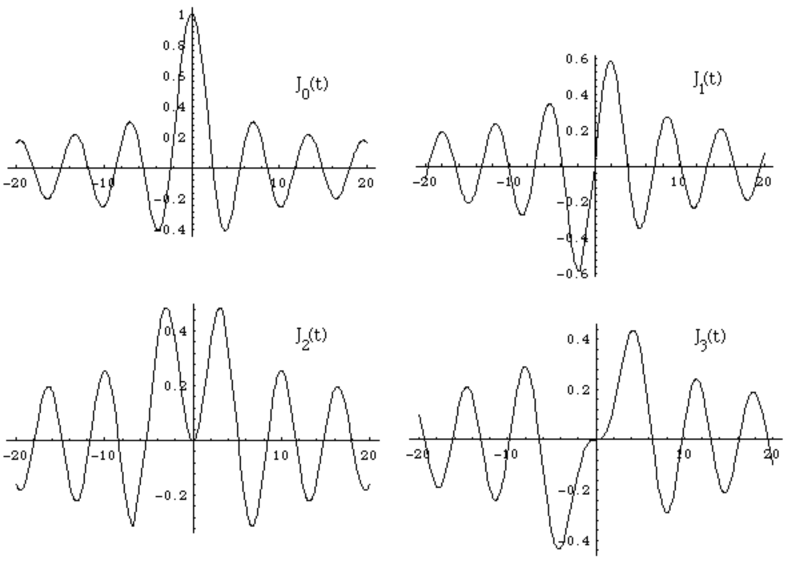
$$J(t) = t^n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h n!}{4^h h!(n+h)!} t^{2h}.$$

La *funzione di Bessel di prima specie di ordine n* è quella che si ottiene dividendo la funzione appena ottenuta per $2^n n!$ (la quale, ovviamente, è ancora soluzione della (V.11.3)):

$$J_n(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!(n+h)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2h} \tag{V.11.6}$$

Si verifica facilmente che il raggio di convergenza di questa serie è infinito e quindi essa definisce una soluzione analitica dell'equazione di Bessel. È questa l'unica soluzione regolare in tutto $\mathbb{R}$ dell'equazione di Bessel (V.11.3) [26].

Le funzioni di Bessel sono un esempio delle cosiddette *funzioni speciali* e delle quali si conoscono molte proprietà. Ecco i grafici delle funzioni di Bessel di prima specie di ordine $n = 0, 1, 2, 3$:



Si dimostra che J_n possiede una successione di zeri reali che indichiamo con $\pm\sigma_{n,m}$ (si osservi che le funzioni di Bessel di ordine pari sono funzioni pari e quelle di ordine dispari sono dispari). Nella seguente tabella sono riportati i primi zeri non negativi delle funzioni di Bessel di prima specie di ordine $n = 0, 1, 2, 3$

$J_0(t)$	–	2.40483	5.52008	8.65373	11.7915	14.9309	18.0711
$J_1(t)$	0	3.83171	7.01559	10.1735	13.3237	16.4706	19.6159
$J_2(t)$	0	5.13562	8.41724	11.6198	14.796	17.9598	21.117
$J_3(t)$	0	6.38016	9.76102	13.0152	16.2235	19.4094	22.5827

[26] Avvisiamo, comunque, che se n non è intero, allora un'altra soluzione linearmente indipendente dalla J_n si ottiene esprimendo il fattoriale $(n+h)!$ mediante la funzione Γ di Eulero e sostituendo n con $-n$. Un'operazione analoga potremmo farla anche nel caso in esame (n intero) e ottenere ancora una soluzione dell'equazione di Bessel, la quale, però, risulta linearmente dipendente da J_n.

(si noti come la differenza tra due radici consecutivi è circa 3.14; si può dimostrare, in effetti, che la differenza $\sigma_{n,m+1} - \sigma_{n,m}$ tende a π per $m \to \infty$).

Tornando all'equazione (V.11.3) (con n intero), per ottenerne l'integrale generale bisogna considerare le cosiddette *funzioni di Bessel di seconda specie* (dette anche *funzioni di Neumann*), le quali sono funzioni del tipo seguente

$$K_n(t) = J_n(t) \log t + t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

e quindi non sono interessanti per la nostra discussione, poiché sono singolari per $t = 0$. Si noti che ciò non contrasta con la teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie lineari, perché l'equazione (V.11.3) **non** è di forma normale.

Abbiamo così ottenuto che gli autovalori λ si ottengono tutti dagli zeri delle funzioni di Bessel, dovendo essere $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$. Quindi, per ogni n, esistono infiniti autovalori del problema (V.9.4) $\lambda_{n,m} = \sigma^2_{n,m}$ e le corrispondenti autosoluzioni sono date da $J_n(\sigma_{n,m}\varrho)$. Le *oscillazioni naturali* della membrana saranno allora le funzioni

$$\begin{aligned} u_{n,m}(x,y,t) = \\ J_n(\sigma_{n,m}\varrho)\,(\alpha_{n,m}\cos(n\vartheta) + \beta_{n,m}\sin(n\vartheta))\,(a_{n,m}\cos(\sigma_{n,m}t) + b_{n,m}\sin(\sigma_{n,m}t)) \end{aligned} \tag{V.11.7}$$

$(n = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots)$.

Per queste oscillazioni si presenta ancora il fenomeno delle *linee nodali*, ossia delle linee del piano sulle quali si ha $v(x,y) = 0$, e quindi $u(x,y,t) = 0$ per ogni t. La (V.11.7) mostra che ci sono due tipi di linee nodali: quelle per cui $J_n(\sigma_{n,m}\varrho) = 0$ e quelle per cui $\alpha_{n,m}\cos(n\vartheta) + \beta_{n,m}\sin(n\vartheta) = 0$. Le prime sono delle circonferenze che si ottengono per

$$\varrho = \frac{\sigma_{n,m'}}{\sigma_{n,m}} \qquad m' = 1, \ldots, m.$$

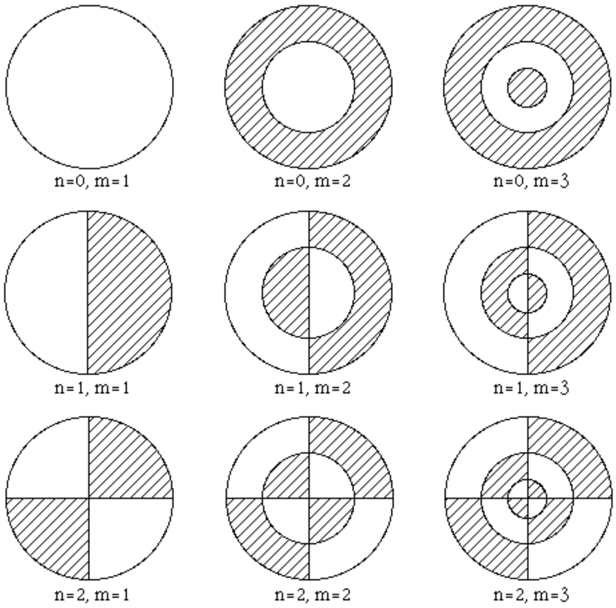
Per quanto riguarda le altre, osserviamo che si può scrivere

$$\alpha_{n,m}\cos(n\vartheta) + \beta_{n,m}\sin(n\vartheta) = \gamma \sin(n\vartheta - \xi)$$

(γ e ξ dipendendo da n, $\alpha_{n,m}$ e $\beta_{n,m}$) dove $\gamma = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} > 0$ e ξ è una soluzione (certamente esistente) del sistema

$$\begin{cases} \gamma \sin \xi = -\alpha_{n,m} \\ \gamma \cos \xi = \beta_{n,m} \end{cases}.$$

e quindi sarà $\alpha_{n,m}\cos(n\vartheta) + \beta_{n,m}\sin(n\vartheta) = 0$ se e solo se $\gamma\sin(n\vartheta - \xi) = 0$ ossia $n\vartheta - \xi = k\pi$, $(k = 1, \ldots, 2n)$ e questo rappresenta $2n$ raggi che dividono il cerchio in parti uguali. La prossima figura rappresenta le linee nodali in alcuni casi. Le parti tratteggiate sono quelle che vibrano in opposizione di fase rispetto a quelle non tratteggiate.



La soluzione generale del problema (V.9.1) si otterrà sovrapponendo le soluzioni (V.11.7):

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(x,y,t).$$

Le costanti $\alpha_{n,m}, \beta_{n,m}, a_{n,m}, b_{n,m}$ possono essere determinate in modo tale da soddisfare le condizioni iniziali. In generale non ci saranno linee nodali. Ciò riflette il fatto che il suono prodotto dalla membrana non è puro, ma contiene tanti *suoni parziali* (quelli dati da (V.11.7), appunto).

12 L'energia.

Consideriamo il problema (V.9.1); si definisce *energia* del sistema all'istante t il seguente integrale:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right] dx \; .$$

È interessante osservarne alcune proprietà. Partiamo dalla seguente identità:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_2 u \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]$$

Se u è soluzione del problema (V.9.1), allora per ogni fissato $T > 0$:

$$0 = \frac{1}{2}\int_{D\times[0,T]} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right)\right] dxdt - \int_{D\times[0,T]} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] dxdt \ .$$

D'altra parte

$$\int_{D\times[0,T]} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] dxdt = \int_0^T dt \int_D \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] = \int_0^T dt \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0$$

dato che $u(x,t) = 0$ per $x \in \partial D$ implica $u_t(x,t) = 0$ $(x \in \partial D)$. Inoltre

$$\frac{1}{2}\int_{D\times[0,T]} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right)\right] dxdt = \int_0^T \mathcal{E}'(t)\, dt = \mathcal{E}(T) - \mathcal{E}(0).$$

In definitiva, se u è soluzione del problema (V.9.1) si ha che

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) \qquad \forall\, t \geq 0$$

ossia l'energia si conserva. Se, in particolare, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, allora

$$\mathcal{E}(t) = 0 \qquad \forall\, t \geq 0$$

e quindi $u(x,t)$ è costante in $D \times [0,T]$; ma $u(x,0) = 0$ per $x \in D$ e quindi deve essere $u(x,t) = 0$ per $(x,t) \in D \times [0,T]$. Ciò dimostra il teorema di unicità per il problema (V.9.1) nella classe delle funzioni che hanno finito l'integrale dell'energia.

Capitolo VI
L'equazione del calore: un approccio classico.

1 L'equazione del calore. Il principio del massimo.

In questo capitolo studieremo la tipica equazione parabolica

$$\Delta_2 u - u_t = 0 \tag{VI.1.1}$$

detta *equazione del calore* dato che i problemi di propagazione del calore sono governati da tale equazione.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$; con Ω_T indichiamo l'aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$ dato da $\Omega \times (0,T)$. Indichiamo con $\mathcal{H}(\Omega_T)$ lo spazio delle funzioni definite e continue in Ω_T che sono di classe C^1 rispetto alla variabile t e di classe C^2 rispetto alle variabili spaziali $(x_1,\ldots,x_n)$.

La *frontiera parabolica* di Ω_T è data da $\partial_*\Omega_T = \partial\Omega_T - (\Omega \times \{T\})$, ossia è la frontiera del "cilindro" Ω_T privata della "base superiore (aperta)". L'interesse della frontiera parabolica è messo bene in evidenza dal seguente principio di massimo

VI.1 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $u \in \mathcal{H}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ tale che*

$$\Delta_2 u(x,t) - u_t(x,t) \geq 0 \qquad \forall\ (x,t) \in \Omega_T. \tag{VI.1.2}$$

Allora

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\partial_*\Omega_T} u\ .$$

Dato un $0 < \varepsilon < T$, consideriamo la seguente funzione

$$v^{(\varepsilon)}(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$$

in $\Omega_{T-\varepsilon}$. Essendo $v^{(\varepsilon)} \in C^0(\overline{\Omega}_{T-\varepsilon})$, essa assumerà il massimo in un punto $(x^*,t^*) \in \overline{\Omega}_{T-\varepsilon}$. Se (x^*,t^*) è interno a $\Omega_{T-\varepsilon}$, allora la $v_t^{(\varepsilon)}$ è nulla in tale punto, mentre la forma quadratica i cui coefficienti sono le derivate seconde della u calcolate in (x^*,t^*) è semi-definita negativa e questo implica $\Delta_2 v^{(\varepsilon)}(x^*,t^*) \leq 0$. Deve quindi essere

$$\Delta_2 v^{(\varepsilon)}(x^*,t^*) - v_t^{(\varepsilon)}(x^*,t^*) \leq 0\,; \tag{VI.1.3}$$

d'altra parte, dalla definizione di $v^{(\varepsilon)}$ e dalla (VI.1.2) si trae

$$\Delta_2 v^{(\varepsilon)}(x^*,t^*) - v_t^{(\varepsilon)}(x^*,t^*) = \Delta_2 u(x^*,t^*) - u_t(x^*,t^*) + \varepsilon \geq \varepsilon > 0$$

ossia un assurdo. Deve quindi essere $(x^*, t^*) \in \partial\Omega_{T-\varepsilon}$; se, però, $x^* \in \Omega$, $t^* = T - \varepsilon$, si ha $v_t^{(\varepsilon)}(x^*, t^*) \geq 0$, $\Delta_2 v^{(\varepsilon)}(x^*, t^*) \leq 0$ e si perviene ancora alla (VI.1.3) e quindi ad un assurdo (si osservi che per $x^* \in \Omega$, $t^* < T$ la (VI.1.2) è certamente soddisfatta). Deve quindi essere $(x^*, t^*) \in \partial_*\Omega_{T-\varepsilon}$ e dunque, essendo $v^{(\varepsilon)} \leq u$:

$$v^{(\varepsilon)}(x,t) \leq \max_{\partial_*\Omega_{T-\varepsilon}} v^{(\varepsilon)} \leq \max_{\partial_*\Omega_{T-\varepsilon}} u \leq \max_{\partial_*\Omega_T} u \qquad \forall\ (x,t) \in \Omega_{T-\varepsilon}$$

ossia

$$u(x,t) \leq \max_{\partial_*\Omega_T} u + \varepsilon t \qquad \forall\ (x,t) \in \Omega_{T-\varepsilon}. \tag{VI.1.4}$$

Fissiamo un $(x,t) \in \Omega_T$; la (VI.1.4) sussiste per ogni $0 < \varepsilon < T - t$ e allora, passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$, si trae

$$u(x,t) \leq \max_{\partial_*\Omega_T} u$$

ossia la tesi.

Il seguente risultato è un'ovvia conseguenza del precedente

VI.2 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $u \in \mathcal{H}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ una soluzione dell'equazione (VI.1.1) in Ω_T. Allora*

$$\min_{\partial_*\Omega_T} u \leq u(x,t) \leq \max_{\partial_*\Omega_T} u \qquad \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega}_T.$$

Una proprietà analoga vale anche in domini illimitati, purché si sappia a priori che la funzione è limitata. Dimostriamo infatti il seguente risultato

VI.3 *Sia $\Omega_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Se $u \in \mathcal{H}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$ è soluzione dell'equazione (VI.1.1) in Ω_T, allora*

$$\inf_{\partial_*\Omega_T} u \leq u(x,t) \leq \sup_{\partial_*\Omega_T} u \qquad \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{VI.1.5}$$

dove $\partial_*\Omega_T = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Sia $\varepsilon > 0$ e consideriamo la funzione

$$v^\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon(|x|^2 + 2nt).$$

Risulta

$$\Delta_2 v^\varepsilon - v_t^\varepsilon = -\varepsilon(\Delta_2|x|^2 - 2n) = 0.$$

Sia $M = \sup_{\overline{\Omega}_T} u$; per dimostrare l'ultima disuguaglianza di (VI.1.5), dobbiamo far vedere che $M = N$, dove $N = \sup_{\partial_* \Omega_T} u$. È ovvio che $M \geq N$; supponiamo che sia $M > N$. Allora si ha

$$\begin{cases} v^\varepsilon(x,0) = u(x,0) - \varepsilon|x|^2 \leq \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} u(\xi,0) = N & \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\ v^\varepsilon(x,t) \leq M - \varepsilon|x|^2 \leq N \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \ :\ |x| \geq \sqrt{\dfrac{M-N}{\varepsilon}}\,, \forall\, t \in [0,T]\,. \end{cases} \tag{VI.1.6}$$

Consideriamo allora il dominio limitato $B \times (0,T)$, dove B è la palla di centro l'origine e raggio $\sqrt{\frac{M-N}{\varepsilon}}$; le (VI.1.6) implicano che sulla sua frontiera parabolica risulta $v^\varepsilon \leq N$ e quindi, per il principio di massimo VI.2, si ha

$$v^\varepsilon(x,t) \leq N \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \ :\ |x| \leq \sqrt{\frac{M-N}{\varepsilon}}\,, \forall\, t \in [0,T]$$

da cui deduciamo

$$v^\varepsilon(x,t) \leq N \qquad \forall\, (x,t) \in \Omega_T$$

ossia

$$u(x,t) = v^\varepsilon(x,t) + \varepsilon(|x|^2 + 2nt) \leq N + \varepsilon(|x|^2 + 2nt) \qquad \forall\, (x,t) \in \Omega_T. \tag{VI.1.7}$$

Fissato un $(x,t) \in \Omega_T$ e passando al limite nella (VI.1.7) per $\varepsilon \to 0^+$, si trae $u(x,t) \leq N$, che, per l'arbitrarietà di (x,t), implica $M \leq N$. Deve quindi essere $M = N$, ossia la tesi. Analogamente si ragiona per l'inf.

Il teorema appena dimostrato implica il seguente teorema di unicità per il problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{VI.1.8}$$

(con $0 < T \leq +\infty$) detto *problema di Cauchy-Dirichlet*, dato che la condizione $u(x,0) = \varphi(x)$ può essere tanto interpretata come condizione iniziale rispetto a t che come condizione di Dirichlet assegnata sulla frontiera parabolica della striscia. Si ha infatti

VI.4 *Sia $\Omega_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Se $u_1, u_2 \in \mathcal{H}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$ sono due soluzioni del medesimo problema (VI.1.8), allora $u_1 \equiv u_2$.*

Posto $u = u_1 - u_2$, la u appartiene a $\mathcal{H}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$, è soluzione dell'equazione (VI.1.1) in Ω_T e inoltre $u(x,0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. La (VI.1.5) implica quindi che $u \equiv 0$.

Si badi che la condizione che u è limitata non può essere eliminata, come dimostra il controesempio discusso nel prossimo § . Tale condizione può, però, essere indebolita, imponendo alla u un certo comportamento all'infinito. Non ci soffermeremo su questo.

2 La non unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet: il controesempio di Tichonoff.

Prima di illustrare il controesempio, facciamo alcuni conti. Fissato un $t > 0$, consideriamo nel piano complesso la circonferenza γ_t:

$$z = t + \frac{t}{2}\, e^{i\vartheta} = \frac{t}{2}\,(2 + \cos\vartheta) + i\,\frac{t}{2}\sin\vartheta \qquad\qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Vogliamo minorare la $Re\ z^{-2}$. Risulta

$$|z|^2 = \frac{t^2}{4}(2+\cos\vartheta)^2 + \frac{t^2}{4}\sin^2\vartheta = \frac{t^2}{4}(4 + 4\cos\vartheta + \cos^2\vartheta) + \frac{t^2}{4}\sin^2\vartheta = \frac{t^2}{4}(5 + 4\cos\vartheta)$$

e quindi

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\overline{z}^2}{|z|^4} = \frac{\frac{t^2}{4}[(2+\cos\vartheta) - i\sin\vartheta]^2}{\left(\frac{t^2}{4}\right)^2 (5+4\cos\vartheta)^2}.$$

Si ha dunque

$$Re\ \frac{1}{z^2} = \frac{4}{t^2}\frac{(2+\cos\vartheta)^2 - \sin^2\vartheta}{(5+4\cos\vartheta)^2} = \frac{4}{t^2}\frac{3 + 4\cos\vartheta + 2\cos^2\vartheta}{(5+4\cos\vartheta)^2}$$

Per minorare questa quantità consideriamo la funzione

$$f(\vartheta) = \frac{3 + 4\cos\vartheta + 2\cos^2\vartheta}{(5+4\cos\vartheta)^2}\ ;$$

abbiamo

$$f'(\vartheta) = \frac{(-4\sin\vartheta - 4\cos\vartheta\sin\vartheta)(5+4\cos\vartheta)^2 + (3+4\cos\vartheta+2\cos^2\vartheta)2(5+4\cos\vartheta)4\sin\vartheta}{(5+4\cos\vartheta)^4}$$

e $f'(\vartheta) = 0$ se e solo se

$$4\sin\vartheta[-(1+\cos\vartheta)(5+4\cos\vartheta) + 2(3 + 4\cos\vartheta + 2\cos^2\vartheta)] = 0$$

ossia $4\sin\vartheta[1-\cos\vartheta] = 0$. I punti estremali contenuti nell'intervallo $[0, 2\pi]$ sono quindi $\vartheta = 0, \pi, 2\pi$; essendo $f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{9}$ e $f(\pi) = 1$ si ha che $f(\vartheta) \geq \frac{1}{9}$ per ogni ϑ. Abbiamo così dimostrato che

$$Re\ \frac{1}{z^2} \geq \frac{4}{9}\,\frac{1}{t^2} \qquad \forall\ z \in \gamma_t. \tag{VI.2.1}$$

Il controesempio in questione è dato dalla seguente funzione:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{VI.2.2}$$

dove

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}.$$

Non è difficile mostrare che $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che $\varphi^{(n)}(0) = 0$ per ogni n.

La funzione data da (VI.2.2) è soluzione (evidentemente non indenticamente nulla) del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}. \tag{VI.2.3}$$

Per dimostrare ciò, cominciamo col considerare la funzione $\varphi(z)$ che si ottiene permettendo a t di assumere valori complessi z. Si tratta di una funzione olomorfa in $\mathbb{C} - \{0\}$ e quindi, per t reale non nullo, la derivata n-sima complessa $\varphi^{(n)}$ coincide con la derivata n-sima rispetto alla variabile reale t. Perciò le indicheremo entrambe con lo stesso simbolo $\varphi^{(n)}$. Fissato un $t > 0$ e considerata la circonferenza γ_t prima introdotta, si ha, in base al secondo teorema integrale di Cauchy,

$$\varphi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\gamma_t} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \qquad\qquad |z - t| < \frac{t}{2}$$

da cui

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma_t} \frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta - t|^{n+1}} ds_\zeta \leq \frac{n!}{2\pi} \left(\frac{2}{t}\right)^{n+1} \int_{\gamma_t} |\varphi(\zeta)|\, ds_\zeta\,.$$

Essendo

$$|\varphi(\zeta)| = |e^{-\frac{1}{\zeta^2}}| = e^{-Re\frac{1}{\zeta^2}}$$

la (VI.2.1) implica

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{2\pi} \left(\frac{2}{t}\right)^{n+1} e^{-\frac{4}{9}\frac{1}{t^2}} \int_{\gamma_t} ds_\zeta = n! \left(\frac{2}{t}\right)^{n} e^{-\frac{4}{9}\frac{1}{t^2}}. \tag{VI.2.4}$$

Se consideriamo una palla $|x| \leq K$, allora il termine n-simo della serie (VI.2.2) può essere maggiorato da

$$n! \left(\frac{2}{t}\right)^{n} e^{-\frac{4}{9}\frac{1}{t^2}} \frac{K^{2n}}{(2n)!}.$$

D'altra parte si ha

$$\frac{2^n n!}{(2n)!} = \frac{(2n)!!}{(2n)!} = \frac{1}{(2n-1)!!} \leq^{(27)} \frac{1}{n!} \tag{VI.2.5}$$

[27] La disuguaglianza $n! \leq (2n-1)!!$ si prova facilmente per induzione: è evidentemente vera per $n = 1$ e, supponendola vera per n, si trae $(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)(2n-1)!! \leq (2n+1)(2n-1)!! = (2n+1)!!$.

da cui

$$|\varphi^{(n)}(t)|\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq n!\left(\frac{2}{t}\right)^n e^{-\frac{4}{9}\frac{1}{t^2}}\frac{K^{2n}}{(2n)!} \leq e^{-\frac{4}{9}\frac{1}{t^2}}\frac{1}{n!}\left(\frac{K^2}{t}\right)^n$$

per $t > 0$, $|x| \leq K$. Ciò dimostra che i termini della serie (VI.2.2) sono maggiorati dai termini della serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{K^2}{t}\right)^n e^{-\frac{4}{9}\frac{1}{t^2}} = e^{-\frac{4}{9}\frac{1}{t^2}+\frac{K^2}{t}} \tag{VI.2.6}$$

e quindi, fissato un $x \in I\!R$ ed un $t > 0$, la serie (VI.2.2) risulta totalmente convergente in un intorno di (x,t). La (VI.2.6) mostra anche che

$$|u(x,t)| \leq e^{-\frac{4}{9}\frac{1}{t^2}+\frac{K^2}{t}}$$

e quindi

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = 0$$

uniformemente per $|x| \leq K$. Ciò dimostra che la funzione

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

è continua (cfr. l'osservazione più avanti). Inoltre, per ogni fissato $t > 0$, la (VI.2.2) è una serie di potenze il cui raggio di convergenza è $+\infty$. La (VI.2.2) può essere allora derivata termine a termine rispetto alla variabile x per ogni $x \in I\!R$, $t > 0$ e si ha quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi^{(n)}(t)2n(2n-1)\frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{(n)}(t)\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\varphi^{(m+1)}(t)\frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Per quanto riguarda la derivata rispetto a t, osserviamo che, in base alle (VI.2.4) e (VI.2.5) si ha per $|x| \leq K$, $t \geq t_0 > 0$:

$$|\varphi^{(n+1)}(t)|\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq (n+1)!\left(\frac{2}{t}\right)^{n+1}\frac{K^{2n}}{(2n)!} = 2(n+1)\frac{2^n n!}{(2n)!}\left(\frac{K^2}{t_0}\right)^n \leq$$
$$2(n+1)\frac{1}{n!}\left(\frac{K^2}{t_0}\right)^n$$

che mostra la totale convergenza negli insiemi indicati della serie derivata rispetto a t. È quindi lecito derivare per serie anche rispetto alla variabile t e si ha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi^{(n+1)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

da cui

$$u_{xx} - u_t = 0$$

per ogni $x \in I\!R$ e ogni $t > 0$. Si è così dimostrato che (VI.2.2) è soluzione del problema (VI.2.3).

Osservazione. Sia $u(x,t)$ una funzione definita e continua per $x \in I\!R^n$ e $t > 0$. Supponiamo di sapere che

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x) \tag{VI.2.7}$$

per ogni $x \in I\!R^n$, con $f \in C^0(I\!R^n)$. Possiamo concludere che la funzione

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{per } t > 0 \\ f(x) & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

è continua fin su $t = 0$? Se la relazione (VI.2.7) è uniforme sui compatti di $I\!R^n$ la risposta è sì. Infatti, sia K una palla compatta di $I\!R^n$ e sia τ_ε tale che

$$|u(x,t) - f(x)| < \varepsilon \qquad x \in K,\ 0 < t < \tau_\varepsilon\,.$$

Allora, fissato un x_0 interno a K, risulta

$$|u(x,t) - f(x_0)| \le |u(x,t) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon$$

per $0 < t < \tau_\varepsilon$ e $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, dove δ_ε è il modulo di continuità della f in K. Ciò mostra l'asserita continuità.

Se, invece, la relazione di limite (VI.2.7) non è uniforme sui compatti, la funzione $\tilde{u}$ potrebbe non essere continua. Si consideri, ad esempio, in $I\!R \times I\!R_+$, la funzione

$$u(x,t) = \frac{xt}{(x^2+t^2)^2}\ .$$

È subito visto che per ogni $x \in I\!R$ si ha

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = 0$$

ma la funzione

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{xt}{(x^2+t^2)^2} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

non è continua in $(0,0)$, dato che è addirittura illimitata in ogni intorno di $(0,0)$.

3 La soluzione fondamentale.

Per arrivare a determinare la soluzione fondamentale dell'equazione del calore seguiremo un ragionamento formale, senza preoccuparci di precisare le ipotesi sotto le quali alcuni passaggi sono validi. Dopo che avremo determinato la soluzione fondamentale, faremo alcune verifiche rigorose. Il procedimento che seguiremo nella prima parte è comunque interessante, perché mostra come l'utilizzo della trasformata di Fourier possa essere utile per risolvere problemi relativi ad equazioni a derivate parziali.

Ricordiamo che la trasformata di Fourier della funzione f è

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)\, dy$$

e che, sotto opportune ipotesi per la f, vale la formula di inversione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y} \widehat{f}(y)\, dy \ . \tag{VI.3.1}$$

Osserviamo che, fissato un $y \in \mathbb{R}^n$, la funzione di (x,t):

$$e^{ix\cdot y - t|y|^2}$$

è soluzione dell'equazione del calore. Infatti si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_h} e^{ix\cdot y - t|y|^2} = i y_h e^{ix\cdot y - t|y|^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} e^{ix\cdot y - t|y|^2} = -|y|^2 e^{ix\cdot y - t|y|^2}$$

e quindi

$$\Delta_2 e^{ix\cdot y - t|y|^2} = i^2 |y|^2 e^{ix\cdot y - t|y|^2} = \frac{\partial}{\partial t} e^{ix\cdot y - t|y|^2}$$

Allora la funzione

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y - t|y|^2} \widehat{f}(y)\, dy$$

è soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_2 u - u_t = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{VI.3.2}$$

dato che soddisfa l'equazione differenziale e la condizione per $t = 0$ è soddisfatta in base alla (VI.3.1). Volendo ottenere un'espressione esplicita in termini della f vediamo che si può scrivere

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y - t|y|^2} dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot w} f(w)\, dw =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(w)\, dw \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(w-x)\cdot y - t|y|^2} dy \ .$$

Ci serve dunque di calcolare il seguente integrale (per $t > 0$)

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ix\cdot y - t|y|^2}\,dy$$

che non è altro (a meno di un fattore costante) che la trasformata di Fourier della funzione $e^{-t|y|^2}$. Essendo

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ix\cdot y - t|y|^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1y_1 - ty_1^2}\,dy_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_ny_n - ty_n^2}\,dy_n$$

sarà sufficiente calcolare la trasformata uni-dimensionale. Poiché

$$-ixy - ty^2 = -\left(\sqrt{t}y + i\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2 - \frac{x^2}{4t}$$

possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy - ty^2}\,dy = e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{t}y + i\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2}\,dy = e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2}\,dy.$$

L'ultima uguaglianza viene dal primo teorema integrale di Cauchy data l'olomorfia della funzione della variabile complessa e^{-z^2}. D'altra parte è ben noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \tag{VI.3.3}$$

e quindi

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ix\cdot y - t|y|^2}\,dy = \sqrt{\left(\frac{\pi}{t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

In definitiva si ha che la soluzione del problema (VI.3.2) si scrive come

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sqrt{\left(\frac{\pi}{t}\right)^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} f(w)\, e^{-\frac{|x-w|^2}{4t}}\,dw = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(w)\, K(x-w,t)\,dw$$

dove

$$K(x-w,t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} e^{-\frac{|x-w|^2}{4t}} \tag{VI.3.4}$$

La funzione (VI.3.4) è detta *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore. Dimostriamo ora direttamente che, per $t > 0$, soddisfa l'equazione del calore. Infatti si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\,\frac{-2x_h}{4t}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) =$$

$$-\frac{\delta_{hk}}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\,\frac{1}{2t}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\,\frac{4x_hx_k}{(4t)^2}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

da cui

$$\Delta_2\left(\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) = -\frac{n}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\,\frac{1}{2t}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\,\frac{|x|^2}{4t^2}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

ed essendo inoltre

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) = -\frac{2n\pi}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\,\frac{1}{4\pi t}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\,\frac{|x|^2}{4t^2}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

si ha che la soluzione fondamentale soddisfa l'equazione (VI.1.1) per ogni $t > 0$ e per ogni x.

4 L'esistenza della soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet.

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet in $\Omega_T = I\!R^n \times (0, T)$ $(0 < T \le +\infty)$:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{H}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T) \cap L^\infty(\Omega_T) & \\ \Delta_2 u - u_t = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u(x,0) = f(x) & x \in I\!R^n \end{cases} \tag{VI.4.1}$$

Abbiamo già dimostrato l'unicità nella classe delle funzioni limitate; per quanto riguarda l'esistenza abbiamo il seguente risultato

VI.5 *Sia $f \in C^0(I\!R^n) \cap L^\infty(I\!R^n)$; la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet (VI.4.1) è data da*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\int_{\mathbf{R}^n} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy\ . \tag{VI.4.2}$$

Dimostriamo subito che risulta

$$\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy = 1 \tag{VI.4.3}$$

per ogni $t > 0$. Infatti, ricordando la (VI.3.3):

$$\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}d\xi = 1$$

Si ha dunque

$$\left|\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\int_{\mathbf{R}^n} f(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy\right| \le \|f\|_\infty \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy = \|f\|_\infty$$

e quindi l'integrale nella (VI.4.2) esiste finito per ogni $t > 0$. È facile vedere che si può derivare sotto il segno di integrale quante volte si vuole e quindi la u appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$. Poiché la soluzione fondamentale soddisfa l'equazione del calore (cfr. § precedente) si deduce che la u data da (VI.4.2) è soluzione dell'equazione (VI.1.1) in Ω_T nella classe funzionale richiesta.

Rimane da verificare la condizione per $t = 0$. Fissiamo un $x \in \mathbb{R}^n$; per la continuità della f, dato un $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|y - x| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ |f(y) - f(x)| < \varepsilon. \tag{VI.4.4}$$

Tenendo presente la (VI.4.3) possiamo scrivere

$$u(x,t) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy - f(x) \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy =$$
$$\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{|y-x|<\delta_\varepsilon} [f(y) - f(x)]\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy + \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{|y-x|>\delta_\varepsilon} [f(y) - f(x)]\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy\,.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, ricordando (VI.4.3) e (VI.4.4), si ha

$$\left| \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{|y-x|<\delta_\varepsilon} [f(y) - f(x)]\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \right| \leq$$
$$\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{|y-x|<\delta_\varepsilon} |f(y) - f(x)|\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy < \varepsilon\, \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{|y-x|<\delta_\varepsilon} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy <$$
$$\varepsilon\, \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy = \varepsilon\ .$$

L'altro integrale, invece, si può maggiorare così:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{|y-x|>\delta_\varepsilon} [f(y) - f(x)]\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \right| \leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{|y-x|>\delta_\varepsilon} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

ed essendo

$$\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{|y-x|>\delta_\varepsilon} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} \varrho^{n-1} d\varrho \int_{|\eta|=1} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}} d\sigma_\eta =$$
$$\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \omega_n \int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}} \varrho^{n-1} d\varrho = \frac{\omega_n}{\pi^n} \int_{\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{4t}}}^{\infty} e^{-u^2} u^{n-1} du \to 0,\ (t \to 0^+)$$

risulta

$$\limsup_{t\to 0^+} |u(x,t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε,

$$\lim_{t\to 0^+} [u(x,t) - f(x)] = 0.$$

È evidente dalla dimostrazione eseguita che, per x che varia in un compatto, la relazione di limite è uniforme. Questo implica che la funzione definita da (VI.4.2) per $t > 0$ ed uguale a $f(x)$ per $t = 0$ è continua fin su $t = 0$ (cfr. l'Osservazione alla fine della § 2, p.153).

Si noti che il principio di massimo dimostrato precedentemente mostra che per il problema qui considerato c'è anche la dipendenza continua dai dati e quindi il problema di Cauchy-Dirichlet è ben posto nella classe delle funzioni continue e limitate.

5 Il principio di Duhamel.

Come per l'equazione delle onde, il problema non omogeneo può essere trattato per mezzo del principio di Duhamel. Vediamolo rapidamente. Sia $v(x,t,\tau)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta_2 v - v_t = 0 \\ v(x,\tau,\tau) = -w(x,\tau) \; . \end{cases} \tag{VI.5.1}$$

Allora la funzione

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)\, d\tau$$

è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta_2 u - u_t = w \\ u(x,0) = 0 \; . \end{cases}$$

Infatti, è ovvio che si ha $u(x,0) = 0$, mentre

$$u_t(x,t) = v(x,t,t) + \int_0^t v_t(x,t,\tau)\, d\tau = -w(x,t) + \int_0^t v_t(x,t,\tau)\, d\tau$$

e quindi

$$\Delta_2 u - u_t = \int_0^t [\Delta_2 v - v](x,t,\tau)\, d\tau + w(x,t) = w(x,t).$$

Se poi indichiamo con $v^*(x,t,\tau)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta_2 v^* - v_t = 0 \\ v^*(x,0,\tau) = -w(x,\tau) \end{cases}$$

risulta $v(x,t,\tau) = v^*(x, t-\tau, \tau)$. Allora, tenendo presente i risultati della § 4, abbiamo che

$$v^*(x,t,\tau) = -\frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} w(y,\tau)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \ .$$

e quindi

$$v(x,t,\tau) = v^*(x,t-\tau,\tau) = -\frac{1}{\sqrt{(4\pi(t-\tau))^n}} \int_{\mathbb{R}^n} w(y,\tau)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} dy \ .$$

In definitiva la soluzione del problema (VI.5.1) è data da

$$u(x,t) = -\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(4\pi(t-\tau))^n}} \int_{\mathbb{R}^n} w(y,\tau)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} dy \ .$$

6 Il problema di Dirichlet.

Consideriamo ora il seguente problema dove Ω è un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ e $0 < T < \infty$:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{H}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T) & \\ \Delta_2 u - u_t = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u(x,t) = f(x,t) & \text{su } \partial_* \Omega_T \end{cases}$$

dove f è una funzione continua assegnata sulla frontiera parabolica di Ω_T. È evidente dal principio di massimo che non possiamo assegnare la f su tutta la frontiera $\partial\Omega_T$. Inoltre lo stesso principio fornisce il teorema di unicità per questo problema. Per quanto riguarda l'esistenza, ci limiteremo a discuterla nel caso particolare in cui $n = 1$ e $\Omega_T = (0,\pi)\times(0,T)$

$$\begin{cases} u \in \mathcal{H}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T) & \\ u_{xx} - u_t = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & 0 \le t \le T \\ u(\pi,t) = 0 & 0 \le t \le T \end{cases} \tag{VI.6.1}$$

dove $\varphi \in C^0([0,\pi])$ e inoltre $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Useremo il metodo di separazione delle variabili, che abbiamo già impiegato nello studio dell'equazione delle onde. Cerchiamo quindi una soluzione dell'equazione $u_{xx} - u_t$ del tipo

$$u(x,t) = v(x)\, w(t) \,.$$

Dovrà essere

$$v''(x)\, w(t) - v(x)\, w'(t) = 0$$

da cui, col solito ragionamento, si deduce l'esistenza di una costante λ tale che

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)} = -\lambda \,.$$

Dalle condizioni $u(0,t) = v(0)\,w(t) = 0$, $u(\pi,t) = v(\pi)\,w(t) = 0$ si trae poi che λ deve essere un autovalore del problema seguente

$$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0 \\ v(0) = v(\pi) = o \end{cases}$$

e quindi $\lambda_n = n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. In corrispondenza a ciascun λ_n si ha $w' + n^2 w = 0$, ossia $w(t) = e^{-n^2 t}$. Le soluzioni a variabili separabili sono quindi

$$u_n(x,t) = e^{-n^2 t} \sin(nx) \ .$$

Cercheremo la soluzione di (VI.6.1) sotto forma di serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx). \tag{VI.6.2}$$

Dovendo essere $u(x,0) = \varphi(x)$, si dovrà avere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = \varphi(x) \ . \tag{VI.6.3}$$

Supponiamo, allora, che la funzione φ, oltre ad essere continua e nulla agli estremi, soddisfi una di quelle condizioni che assicurano la convergenza uniforme della serie di Fourier (VI.6.3) (ad esempio φ sia di classe C^1 o soddisfi una condizione di Hölder uniforme ecc.). Osserviamo che si ha

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi)\, \sin(n\xi)\, d\xi \ . \tag{VI.6.4}$$

Dimostriamo che la funzione (VI.6.2) dove gli a_n sono dati da (VI.6.4) è effettivamente soluzione di (VI.6.1). Intanto si ha

$$|a_n| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\varphi(\xi)|\, d\xi \ \equiv C$$

e quindi, per $t \geq t_0 > 0$, risulta

$$\left| a_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \right| \leq C\, e^{-n^2 t_0}$$

che mostra la totale convergenza della (VI.6.2) in $[0,\pi]\times[t_0,+\infty)$. Analogamente si prova la convergenza totale delle serie derivate negli stessi insiemi, dato che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} e^{-n^2 t_0}$$

converge per ogni β reale. Si può quindi derivare la (VI.6.2) termine a termine; la u risulta di classe C^∞ ed è soluzione dell'equazione del calore in Ω_T. Inoltre si può scambiare il limite per $x\to 0$ con la serie e quindi $u(0,t)=0$; analogamente $u(\pi,t)=0$. Per quanto riguarda la condizione $u(x,0)=\varphi(x)$, sia n_ε tale che per ogni $n>n_\varepsilon$ e per ogni $p>0$ si abbia

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \sin(kx)\right| < \varepsilon \qquad \forall\, x\in[0,\pi]$$

(si badi che stiamo supponendo la convergenza uniforme della (VI.6.3)). Osservando che $e^{-(k+1)^2 t} < e^{-k^2 t}$ e applicando la disuguaglianza di Brunacci-Abel[(28)], si ha

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e^{-k^2 t}\sin(kx)\right| \le e^{-(n+1)^2 t}\varepsilon \le \varepsilon \qquad \forall\, x\in[0,\pi],\ t\ge 0$$

e questo mostra che la serie (VI.6.2) converge uniformemente in $[0,\pi]\times[0,\infty)$. È quindi lecito scambiare il limite con la serie:

$$\lim_{t\to 0}\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t}\sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) = \varphi(x)$$

e tale limite risulta uniforme rispetto a $x\in[0,\pi]$ (verificarlo !). La $u(x,t)$ appartiene quindi a $C^0(\overline{\Omega}_T)$ e questo completa la dimostrazione.

[(28)]Ricordiamo la *disuguaglianza di Brunacci-Abel*: siano $z_1,\dots,z_n$ dei numeri complessi e siano $c_1,\dots,c_n$ numeri reali tali che $c_1\ge c_2\ge\dots\ge c_n\ge 0$. Allora, se M è tale che $|\sum_{k=1}^{m} z_k|\le M$ (per $m=1,\dots,n$), risulta

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k z_k\right| \le M\, c_1 .$$

Per la dimostrazione cfr., ad esempio, Picone-Fichera, Corso di Analisi Matematica, Vol. II, p.26-27.

Capitolo VII
Il principio di Dirichlet.

1 L'idea di Riemann e le critiche di Weierstrass e di Hadamard.

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \\ \Delta_2 u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{su } \Sigma \end{cases} \tag{VII.1.1}$$

dove Ω è un dominio limitato di $I\!R^n$ e f è una assegnata funzione di $C^0(\Sigma)$. L'osservazione di base dalla quale Riemann partiva per dimostrare l'esistenza della soluzione del problema (VII.1.1) era la seguente. Indichiamo con

$$\mathcal{U} = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \ \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx < \infty \mid u = f \text{ su } \Sigma\};$$

e sia u_0 la soluzione del problema (VII.1.1). Allora per ogni $u \in \mathcal{U}$ si ha

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx = \int_\Omega |\operatorname{grad} u_0 + (u - u_0)|^2 dx =$$
$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u_0|^2 dx + 2\int_\Omega \operatorname{grad} u_0 \cdot \operatorname{grad}(u - u_0)\, dx + \int_\Omega |\operatorname{grad}(u - u_0)|^2 dx =$$
$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u_0|^2 dx + \int_\Omega |\operatorname{grad}(u - u_0)|^2 dx$$

dato che, per le formule di Green, si ha

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u_0 \cdot \operatorname{grad}(u - u_0)\, dx = \int_\Sigma (u - u_0) \frac{\partial u_0}{\partial \nu} d\sigma - \int_\Omega (u - u_0)\, \Delta_2 u_0 dx = 0$$

essendo u_0 armonica e risultando $u = u_0 = f$ su Σ. Abbiamo, insomma, che per ogni $u \in \mathcal{U}$ risulta

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx \geq \int_\Omega |\operatorname{grad} u_0|^2 dx$$

ossia che la soluzione u_0 del problema di Dirichlet (VII.1.1) fornisce il minimo del funzionale

$$D(u) = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

(detto *integrale di Dirichlet*) nella classe $\mathcal{U}$. Viceversa Riemann dimostrava che se u_0 era il "punto" di minimo del funzionale $D(u)$ nella classe $\mathcal{U}$, allora u_0 era la soluzione del problema (VII.1.1).

Si pensava così di aver ottenuto l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet. Tuttavia il ragionamento che abbiamo sunteggiato si prestò ad alcune critiche severe.

La prima critica fu fatta da Weierstrass, il quale notò che non è affatto assicurata a priori l'esistenza del minimo del funzionale D nella classe $\mathcal{U}$. Per rendere il ragionamento corretto occorre dimostrare che tale minimo esiste. Oggi, con l'aiuto dell'Analisi Funzionale moderna, come vedremo, abbiamo a disposizione un teorema di esistenza del minimo molto generale, il quale permette di dimostrare l'esistenza del minimo in questione.

La seconda critica fu di Hadamard. Egli osservò che perché il ragionamento seguito da Riemann fosse corretto, occorreva assicurarsi che la classe $\mathcal{U}$ fosse non vuota, e a dimostrazione che tale richiesta è tutt'altro che superflua, portò un esempio di una funzione continua f per la quale si ha $\mathcal{U} = \emptyset$! L'esempio in questione è il seguente: sia $\Omega = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ e consideriamo sulla circonferenza $\partial\Omega$ la funzione

$$f(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos(2^{2k}\vartheta) \ .$$

È ovvio che, essendo la serie totalmente convergente in $[0, 2\pi]$, la funzione f risulta continua. Introdotte le solite coordinate polari, consideriamo i polinomi armonici [29]

$$v_k = \frac{1}{2^k\sqrt{\pi}}\, \varrho^{2^{2k}} \cos(2^{2k}\vartheta).$$

Si ha

$$\int_\Omega \operatorname{grad} v_h \cdot \operatorname{grad} v_k dx = \delta_{hk}; \tag{VII.1.2}$$

infatti, per le formule di Green, risulta

$$\int_\Omega \operatorname{grad} v_h \cdot \operatorname{grad} v_k dx = \int_\Sigma v_h \frac{\partial v_k}{\partial \nu} d\sigma - \int_\Omega v_h \Delta_2 v_k dx =$$
$$\frac{1}{2^h\sqrt{\pi}}\, \frac{2^{2k}}{2^k\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos(2^{2h}\vartheta)\, \cos(2^{2k}\vartheta)\, d\vartheta = \frac{2^k}{2^h\pi}\delta_{hk}\pi = \delta_{hk}$$

dato che, come si verifica subito,

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\vartheta)\, \cos(n\vartheta)\, d\vartheta = \delta_{mn}\pi \ .$$

[29] Che tali funzioni siano polinomi armonici segue dal fatto che, per ogni intero m, si ha $z^m = \varrho^m(\cos m\vartheta + i \sin m\vartheta)$ e quindi $\varrho^m \cos m\vartheta$, non essendo altro che la parte reale di z^m, è un polinomio armonico.

Supponiamo che la classe $\mathcal{U}$ sia non vuota, ossia che esista una funzione $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tale che $u = f$ su Σ ed inoltre

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx < \infty \tag{VII.1.3}$$

Poniamo

$$a_k = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v_k dx\,.$$

Tenendo presente la relazione di ortogonalità (VII.1.2) si ottiene

$$0 \leq \int_\Omega |\operatorname{grad} u - \sum_{k=1}^n a_k \operatorname{grad} v_k|^2 dx = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx - \sum_{k=1}^n a_k^2$$

ossia

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx\,. \tag{VII.1.4}$$

Calcoliamoci ora gli a_k; utilizzando ancora la formula di Green, si ha

$$a_k = \int_\Sigma u \frac{\partial v_k}{\partial \nu} d\sigma = \frac{2^{2k}}{2^k\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\ \cos(2^{2k}\vartheta)\, d\vartheta$$

e, tenendo presente che la serie che definisce la f converge totalmente in $[0, 2\pi]$ e che quindi possiamo integrare per serie:

$$a_k = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{h=1}^\infty \frac{1}{2^h} \cos(2^{2h}\vartheta)\ \cos(2^{2k}\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$\sum_{h=1}^\infty \frac{2^k}{2^h\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos(2^{2h}\vartheta)\ \cos(2^{2k}\vartheta)\, d\vartheta = \sum_{h=1}^\infty \frac{2^k}{2^h\sqrt{\pi}} \delta_{hk}\pi = \sqrt{\pi}.$$

La (VII.1.4) si scrive

$$n\pi \leq \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

che, dovendo sussistere per ogni intero n, porta ad un assurdo non appena la si confronti con la (VII.1.3). Si è così dimostrato che $\mathcal{U} = \emptyset$.

La questione messa in luce da Hadamard è quindi la seguente: come deve essere fatta la f per essere certi che la classe $\mathcal{U}$ è non vuota ? La risposta a questa domanda ha impegnato i matematici per diverso tempo e una risposta esauriente può essere data, come vedremo nella § 4, con l'aiuto della teoria degli spazi di Sobolev.

2 Il lemma di Caccioppoli-Weyl.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Consideriamo il potenziale di dominio

$$u(x) = \int_\Omega f(y)\, s(x,y)\, dy$$

dove $s(x,y)$ è la soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace. Dimostriamo il seguente lemma, avvertendo che alcuni dei risultati sussistono per funzioni molto più generali di quelle qui considerate. Con $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ indichiamo lo spazio delle funzioni di classe C^∞ il cui supporto è compatto e contenuto in Ω.

VII.1 *Sia $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$; allora, indicato con u il relativo potenziale di dominio, si ha*
1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2) è lecita la derivazione sotto il segno di integrale:

$$u_{x_h}(x) = \int_\Omega f(y)\, s_{x_h}(x,y)\, dy \ ; \tag{VII.2.1}$$

3) sussiste la formula di Poisson:

$$\Delta_2 u(x) = f(x) \qquad \forall\ x \in \Omega.$$

È ovvio che u è continua, dato che la funzione $s(x,y)$ è localmente sommabile e $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$. Per analogo motivo è lecito derivare sotto il segno di integrale e sussiste la (VII.2.1). Essendo poi $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ possiamo scrivere

$$u_{x_h}(x) = \int_\Omega f(y)\, s_{x_h}(x,y)\, dy = -\int_\Omega f(y)\, s_{y_h}(x,y)\, dy = \int_\Omega f_{y_h}(y)\, s(x,y)\, dy$$

(nell'ultimo passaggio si è integrato per parti su un dominio regolare D contenuto in Ω e contenente al suo interno il supporto di f). Iterando questo procedimento si vede che

$$D^\alpha u(x) = \int_\Omega D^\alpha_y f(y)\, s(x,y)\, dy \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

per ogni multi-indice α e quindi $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. In particolare, per il laplaciano, si ha

$$\Delta_2 u(x) = \int_\Omega \Delta_2 f(y)\, s(x,y)\, dy\,, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{VII.2.2}$$

Per la formula di rappresentazione di Stokes applicata al dominio D di cui sopra, si ha

$$f(x) = \int_D \Delta_2 f(y)\, s(x,y)\, dy = \int_\Omega \Delta_2 f(y)\, s(x,y)\, dy\,, \qquad \forall\ x \in D. \tag{VII.2.3}$$

La (VII.2.2), la (VII.2.3) e l'arbitrarietà di D provano la formula di Poisson.

Dimostriamo ora una proprietà dei mollifiers che ci sarà utile.

VII.2 *Sia $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, con $\Omega \subset I\!R^n$ aperto e $1 \le p < \infty$. Posto*

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy \qquad (0 < \varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega))$$

dove ϱ_ε è un "mollifier" [30]*, risulta $u_\varepsilon \to u$ in $L^p(A)$ per ogni $A \subset\subset \Omega$* [31]*.*

Sia $0 < \varepsilon_0 < \text{dist}(A, \partial\Omega)$. Cominciamo col dimostrare che, se u è una qualsiasi funzione di $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, si ha

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(A)} \le \|u\|_{L^p(A_\varepsilon)} \tag{VII.2.4}$$

per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Infatti, per un tale ε, possiamo scrivere

$$u_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy\ .$$

Si ha dunque

$$|u_\varepsilon(x)|^p = \left| \int_{B_\varepsilon(x)} u(y)\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy \right|^p \le \left(\int_{B_\varepsilon(x)} |u(y)|\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy \right)^p =$$
$$\left(\int_{B_\varepsilon(x)} |u(y)|\, \varrho_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\, dy \right)^p \le$$
$$\int_{B_\varepsilon(x)} |u(y)|^p\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \varrho_\varepsilon(x-s)\, ds \right)^{\frac{p}{q}} = \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y)|^p\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy$$

da cui

$$\int_A |u_\varepsilon(x)|^p dx \le \int_A dx \int_{A_\varepsilon} |u(y)|^p\, \varrho_\varepsilon(x-y)\, dy =$$
$$\int_{A_\varepsilon} |u(y)|^p dy \int_A \varrho_\varepsilon(x-y)\, dx \le \int_{A_\varepsilon} |u(y)|^p dy$$

ossia la (VII.2.4). Fissato un $\sigma > 0$, sia $v \in C^0(I\!R^n)$ tale che

$$\|u - v\|_{L^p(A_{\varepsilon_0})} < \sigma.$$

Tenendo presente questa relazione e la (VII.2.4) abbiamo

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(A)} \le \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^p(A)} + \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(A)} + \|v - u\|_{L^p(A)} \le$$
$$2\,\|v - u\|_{L^p(A_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(A)} < 2\,\sigma + \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(A)}\ .$$

(30) Cfr. l'appendice B, p.102.

(31) Scrivendo $A \subset\subset \Omega$ is intende che la chiusura di A è compatta e contenuta in Ω.

Essendo v continua si ha che $v_\varepsilon \to v$ uniformemente in A [32] e quindi

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(A)} \leq 2\,\sigma$$

ossia la tesi per l'arbitrarietà di σ.

Il prossimo lemma è chiamato *il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni*:

VII.3 *Sia Ω un aperto di $I\!R^n$ e sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega u\,\varphi\,dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega). \tag{VII.2.5}$$

Allora $u = 0$ q.o. in Ω.

Sia $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ e sia $0 < \varepsilon_0 < \mathrm{dist}(\overline{\Omega}_0, \partial\Omega)$. Fissato un $x \in \Omega_0$ la funzione della y: $\varrho_\varepsilon(x-y)$ appartiene a $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. La (VII.2.5) implica

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\,\varrho_\varepsilon(x-y)\,dy = 0 \qquad \forall\ x \in \Omega_0.$$

D'altra parte, per il lemma VII.2, $\|u_\varepsilon - u\|_{L^1(\Omega_0)} \to 0$. Si ha dunque $\|u\|_{L^1(\Omega_0)} = 0$ e quindi $u = 0$ q.o. in Ω_0. Per l'arbitrarietà di Ω_0 si ha la tesi.

Una funzione $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è detta *soluzione debole* (o anche *soluzione nel senso delle distribuzioni*) dell'equazione $\Delta_2 u = 0$ se accade che

$$\int_\Omega u\,\Delta_2\varphi\,dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega). \tag{VII.2.6}$$

È ovvio che se $u \in C^2(\Omega)$ è una funzione armonica, allora soddisfa (VII.2.6). Il viceversa è tutt'altro che ovvio ed è esattamente l'enunciato del lemma di Caccioppoli-Weyl:

VII.4 *Sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che sussiste la (VII.2.6). Allora $u \in C^2(\Omega)$ (nel senso che u coincide q.o. con una funzione di classe C^2) e u risulta armonica.*

[32] Cfr. loc. cit. in [30].

Sia $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Consideriamo una funzione $\psi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\Omega)$ tale che $\psi(x) = 1$ per ogni $x \in \Omega_0$[33] . Presa una qualsiasi $f \in \overset{\circ}{C}^\infty(\Omega)$, consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = \psi(x) \int_\Omega f(y)\, s(x,y)\, dy \ .$$

Essendo $\varphi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\Omega)$ (cfr. lemma VII.1), avremo per la (VII.2.6)

$$\int_\Omega u\, \Delta_2 \varphi\, dx = 0 \ . \tag{VII.2.7}$$

D'altra parte, ricordando la formula di Poisson, abbiamo

$$\Delta_2\varphi(x) = \Delta_2\psi(x) \int_\Omega f(y)\, s(x,y)\, dy + 2\sum_{h=1}^n \psi_{x_h}(x) \int_\Omega f(y)\, s_{x_h}(x,y)\, dy + \psi(x)\, f(x).$$

Riscrivendo la (VII.2.7) tenendo presente i teoremi di Tonelli e Fubini (verificare!), si perviene a

$$\int_\Omega f(y)\, dy \int_\Omega u(x)\, \Delta_2\psi(x)\, s(x,y)\, dx + 2\sum_{h=1}^n \int_\Omega f(y)\, dy \int_\Omega u(x)\, \psi_{x_h}(x)\, s_{x_h}(x,y)\, dx +$$
$$\int_\Omega u(y)\, \psi(y)\, f(y)\, dy = 0 \ .$$

Dovendo sussistere tale relazione per ogni $f \in \overset{\circ}{C}^\infty(\Omega)$, il lemma VII.3 implica

$$u(y)\,\psi(y) + \int_\Omega u(x)\, \Delta_2\psi(x)\, s(x,y)\, dx + 2\sum_{h=1}^n \int_\Omega u(x)\, \psi_{x_h}(x)\, s_{x_h}(x,y)\, dx = 0 \qquad \text{q.o. } y \text{ in } \Omega.$$

Se ci limitiamo a considerare $y \in \Omega_0$, essendo $\psi(y) = 1$, $\forall\ y \in \Omega_0$, risulta

$$u(y) = -\int_{\Omega-\Omega_0} u(x)\, \Delta_2\psi(x)\, s(x,y)\, dx -$$
$$2\sum_{h=1}^n \int_{\Omega-\Omega_0} u(x)\, \psi_{x_h}(x)\, s_{x_h}(x,y)\, dx\,, \qquad \text{q.o. } y \text{ in } \Omega_0.$$

La funzione a secondo membro è armonica in Ω_0 e quindi, per l'arbitrarietà di Ω_0, si ha la tesi.

---

(33) Sia $A \subset\subset \Omega$ e fissiamo un δ tale che $0 < 2\delta < \mathrm{dist}(A, \partial\Omega)$. La funzione

$$\psi(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \chi_{A_\delta}(y)\, \varrho_\delta(x-y)\, dy$$

appartiene a $\overset{\circ}{C}^\infty(\Omega)$ e inoltre, per ogni $x \in A$, si ha

$$\psi(x) = \int_{B_\delta(x)} \chi_{A_\delta}(y)\, \varrho_\delta(x-y)\, dy = \int_{B_\delta(x)} \varrho_\delta(x-y)\, dy = 1.$$

3 Il teorema di traccia.

È ovvio cosa significhi la traccia di u su $\Sigma = \partial\Omega$ se $u \in C^0(\overline{\Omega})$; è altrettanto ovvio che se $u \in L^p(\Omega)$, non ha senso parlare di traccia su Σ, dato che Σ ha misura di Lebesgue n-dimensionale nulla ed essendo u una funzione definita q.o., u può essere modificata a piacere su Σ (si ricordi che le funzioni di $L^p(\Omega)$ sono in realtà classi di equivalenza rispetto all'uguaglianza quasi ovunque).

Accade, però, che se u, oltre ad essere in $L^p(\Omega)$, ha anche le derivate (definite in qualche modo) in $L^p(\Omega)$, allora u possiede una traccia su Σ. Alla dimostrazione di questo riultato piuttosto delicato è dedicato questo § e il seguente.

Cominciamo con qualche definizione. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e Σ la sua frontiera. Se Σ è una varietà orientabile di classe C^1 a pezzi, diremo che Ω è *regolare*. Osserviamo che, per un campo regolare, possiamo supporre di avere una rappresentazione parametrica della frontiera Σ del tipo $x = f(t)$, dove $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ varia nel dominio base $D = \cup_{h=1}^m D_h$, con i D_h domini regolari disgiunti a due a due.

Diremo che Ω è *propriamente regolare* se è regolare e inoltre sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) è possibile definire su Σ un versore $\mu(\xi)$ continuo su Σ, il quale sia sempre penetrante e, indicato con $\omega(\xi)$ la misura dell'angolo che ω forma con la normale interna ν nei punti regolari di Σ, risulta

$$0 \leq \omega(\xi) \leq \omega_0 < \frac{\pi}{2}\,; \tag{VII.3.1}$$

2) $\mu[f(t)] \in C^1(D)$;

3) esiste un $\varrho_0 > 0$ tale che, per ogni fissato $0 < \varrho \leq \varrho_0$, il luogo Σ_ϱ descritto da

$$x = \xi + \varrho\,\mu(\xi) \qquad \xi \in \Sigma$$

risulta interamente contenuto in Ω ed è la frontiera di un dominio regolare Ω_ϱ tale che, per $0 < \varrho < \varrho' \leq \varrho_0$ risulta $\overline{\Omega}_{\varrho'} \subset \Omega_\varrho$, $\overline{\Omega}_\varrho \subset \Omega$.

Se Σ risulta di classe C^2, allora si può prendere $\mu = \nu$, mentre se Σ è di classe C^1 si può dimostrare l'esistenza di un versore μ con le caratteristiche richieste (cfr. Fichera-De Vito, Funzioni analitiche di una variabile complessa, Ed. Veschi, p.273-275). Esistono, comunque, campi che non sono di classe C^1 che sono propriamente regolari. Si può dimostrare che, nel caso $n = 2$, un campo è propriamente regolare se e solo se la sua frontiera è di classe C^1 a pezzi e priva di cuspidi (una dimostrazione dovuta a De Vito si trova nell'appendice del lavoro di M. P. Colautti, Teoremi di completezza in spazi hilbertiani connessi con l'equazione di Laplace in due variabili, Rend. Sem. Matem. di Padova, 31, 1961, 114–164).

Il teorema fondamentale che permetterà di definire la traccia di funzioni in spazi di

Sobolev è il seguente, dove

$$\mathcal{H}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in C^1(\Omega) \mid \int_\Omega (|u|^p + |\operatorname{grad} u|^p)\, dx < \infty \right\} \qquad (1 \leq p < \infty).$$

VII.5 *Sia Ω un campo propriamente regolare e sia $u \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$. Per quasi ogni $\xi \in \Sigma$ esiste finito il limite*

$$\lim_{\varrho \to 0^+} u[\xi + \varrho\mu(\xi)] = U(\xi)\,.$$

La funzione $U(\xi)$ così ottenuta è misurabile ed appartiene a $L^p(\Sigma)$. Se $\mu'(\xi)$ è un altro versore definito su Σ che gode delle proprietà 1), 2), 3) di cui sopra, si ha

$$\lim_{\varrho \to 0^+} u[\xi + \varrho\mu'(\xi)] = U(\xi)$$

q.o. su Σ. Per ogni $u \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ sussiste la seguente disuguaglianza

$$\int_\Sigma |U|^p d\sigma \leq K \int_\Omega (|u|^p + |\operatorname{grad} u|^p)\, dx \tag{VII.3.2}$$

dove K dipende solo da Ω e da p.

Consideriamo la trasformazione

$$x = f(t) + \varrho\mu[f(t)] \equiv F(\varrho, t) \tag{VII.3.3}$$

per (ϱ, t) che varia in $[0, \varrho_0] \times D$. Sia $J(\varrho, t)$ il modulo del determinante jacobiano di questa trasformazione. Tale jacobiano è dato da

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & \mu_n \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \varrho\frac{\partial \mu_1}{\partial t_1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial t_1} + \varrho\frac{\partial \mu_n}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_{n-1}} + \varrho\frac{\partial \mu_1}{\partial t_{n-1}} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial t_{n-1}} + \varrho\frac{\partial \mu_n}{\partial t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

e quindi, indicati con L_h i minori di ordine massimo della matrice jacobiana della trasformazione $x = f(t)$ e posto $\sigma'(t) = \sqrt{L_1^2 + \dots L_n^2}$, risulta (cfr. (VII.3.1))

$$J(0,t) = \sum_{h=1}^n \mu_h L_h = \sum_{h=1}^n \mu_h \nu_h \sqrt{L_1^2 + \dots L_n^2} = \sigma'(t)\, \cos\omega[f(t)] \geq \sigma'(t)\, \cos\omega_0 > 0$$

e si può quindi supporre che ϱ_0 sia tanto piccolo da risultare

$$J(\varrho, t) \geq m_0 > 0 \qquad t \in D,\ 0 < \varrho \leq \varrho_0\ . \tag{VII.3.4}$$

Sia S "la striscia" ottenuta al variare del punto x dato da (VII.3.3) quando $\varrho \in [0, \varrho_0]$ e $t \in D$. Per $x \in B - \Sigma$, ossia per $0 < \varrho \leq \varrho_0$, consideriamo

$$g(x) \equiv g(\varrho, t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_h} u[F(\varrho, t)]\, \mu_h[f(t)]\,.$$

Essendo la $u \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ ed essendo $|g| \leq |\operatorname{grad} u|$, la g risulta sommabile in B e si ha (per il teorema di Tonelli)

$$\int_B |g(x)|\, dx = \int_0^{\varrho_0} d\varrho \int_D |g(\varrho, t)|\, J(\varrho, t)\, dt = \int_D dt \int_0^{\varrho_0} |g(\varrho, t)|\, J(\varrho, t)\, d\varrho\,.$$

Allora per quasi ogni $t \in D$ esiste finito l'integrale

$$\int_0^{\varrho_0} |g(\varrho, t)|\, J(\varrho, t)\, d\varrho$$

e quindi, ricordando la (VII.3.4), per quasi ogni $t \in D$ esiste finito l'integrale

$$\int_0^{\varrho_0} |g(\varrho, t)|\, d\varrho\ .$$

D'altra parte, essendo g la derivata direzionale della u rispetto a μ, si ha che

$$u[\xi + \varrho_0 \mu(\xi)] - u[\xi + \varrho \mu(\xi)] = \int_{\varrho}^{\varrho_0} g(r, t)\, dr \tag{VII.3.5}$$

e resta così dimostrata l'esistenza q.o. della U:

$$U(\xi) = \lim_{\varrho \to o^+} u[\xi + \varrho \mu(\xi)] = u[\xi + \varrho_0 \mu(\xi)] - \int_0^{\varrho_0} g(r, t)\, dr\ .$$

È ovvio che la U risulta misurabile. Per dimostrare che la U non dipende dalla scelta del versore μ, osserviamo che dalla (VII.3.5) segue

$$|u[\xi + \varrho \mu(\xi)]| \leq |u[\xi + \varrho_0 \mu(\xi)]| + \int_0^{\varrho_0} |g(r, t)|\, dr \tag{VII.3.6}$$

e che la funzione a secondo membro è certamente sommabile in D (il primo addendo è una funzione continua, mentre il secondo risulta sommabile giacché

$$\int_D dt \int_0^{\varrho_0} |g(r, t)|\, dr \leq \frac{1}{m_0} \int_D dt \int_0^{\varrho_0} |g(r, t)|\, J(r, t)\, dr = \frac{1}{m_0} \int_B |g(x)|\, dx\ ).$$

Sia ora v una qualsiasi funzione continua in $\overline{\Omega}$; si ha

$$\int_{\Sigma_\varrho} u\, v\, d\sigma_\varrho = \int_D u[\xi + \varrho \mu(\xi)]\, v[\xi + \varrho \mu(\xi)]\, H(\varrho, t)\, dt$$

dove $H(\varrho, t)$ denota, per ogni ϱ fissato, la radice della somma dei quadrati dei minori di ordine massimo della matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \varrho \frac{\partial \mu_1}{\partial t_1} & . \; . \; . & \frac{\partial f_n}{\partial t_1} + \varrho \frac{\partial \mu_n}{\partial t_1} \\ . & . \; . \; . & . \\ . & . \; . \; . & . \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_{n-1}} + \varrho \frac{\partial \mu_1}{\partial t_{n-1}} & . \; . \; . & \frac{\partial f_n}{\partial t_{n-1}} + \varrho \frac{\partial \mu_n}{\partial t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Poiché la $H(\varrho, t)$ è continua in $[0, \varrho_0] \times D$ e $H(0, t) = \sigma'(t)$ si ha

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \int_{\Sigma_\varrho} u \, v \, d\sigma_\varrho = \int_\Sigma U \, v \, d\sigma \tag{VII.3.7}$$

in virtù del teorema della convergenza dominata (cfr. (VII.3.6)).

Sia ψ una qualsiasi funzione di classe $C^1(\overline{\Omega})$; risulta, per ogni $h = 1, \dots, n$,

$$\int_{\Sigma_\varrho} u \, \psi \, \nu_h^{(\varrho)} \, d\sigma_\varrho = \int_{\Omega_\varrho} \left(\psi \, \frac{\partial u}{\partial x_h} + u \, \frac{\partial \psi}{\partial x_h} \right) dx$$

e quindi, tenendo presente la (VII.3.7) e il fatto che $u \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ è sommabile insieme alle sue derivate prime in Ω,

$$\int_\Sigma U \, \psi \, \nu_h \, d\sigma = \int_\Omega \left(\psi \, \frac{\partial u}{\partial x_h} + u \, \frac{\partial \psi}{\partial x_h} \right) dx \; . \tag{VII.3.8}$$

Sia ora U' l'analoga della U ottenuta a partire da una altro versore μ'; dovrà essere

$$\int_\Sigma U' \, \psi \, \nu_h \, d\sigma = \int_\Omega \left(\psi \, \frac{\partial u}{\partial x_h} + u \, \frac{\partial \psi}{\partial x_h} \right) dx$$

e, per la (VII.3.8),

$$\int_\Sigma (U - U') \, \psi \, \nu_h \, d\sigma = 0 \qquad \forall \; \psi \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad h = 1, \dots, n. \tag{VII.3.9}$$

Dimostriamo che questo è possibile se e solo se $U = U'$ q.o. su Σ. Sia $\varphi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(I\!\!R^{n-1})$ tale che $\operatorname{spt} \varphi \subset D_k$, dove D_k è uno dei domini regolare che decompongono D. Poniamo in B: $\Phi(x) \equiv \Phi[f(t) + \varrho \mu[f(t)]] = \varphi(t)$. La funzione Φ risulta di classe C^1 in B e coincide con la φ su Σ. Prolunghiamola ad una funzione di classe C^1 in tutto $\overline{\Omega}$. Per fare ciò, si considerino ϱ_1, ϱ_2 tali che $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_0$ e sia $K \in C^\infty(I\!\!R^n)$ tale che $K(x) = 0$ per $x \in \Omega_{\varrho_2}$ e $K(x) = 1$ per $x \in I\!\!R^n - \Omega_{\varrho_1}$. Allora la funzione

$$\psi(x) = \begin{cases} K(x) \, \Phi(x) & \text{per } x \in \overline{\Omega} - \Omega_{\varrho_0} \\ 0 & \text{per } x \in \Omega_{\varrho_0} \end{cases}$$

risulta di classe $C^1(\overline{\Omega})$ e coincide con la φ su Σ. Per la (VII.3.9), deve essere

$$\int_{D_k} \{U[f(t)] - U'[f(t)]\}\, \varphi(t)\, \nu_h[f(t)]\, \sigma'(t)\, dt = 0 \qquad h = 1, \ldots, n\ .$$

Dovendo questo valere per ogni funzione $\varphi \in \mathring{C}^\infty(D_k)$, si deve avere (per il lemma VII.3): $\{U[f(t)] - U'[f(t)]\}\, \nu_h[f(t)]\, \sigma'(t) = 0$ q.o. su D_k, per $h = 1, \ldots, n$. Essendo $\nu_1^2 + \ldots \nu_n^2 = 1$ e $\sigma'(t) > 0$, questo è possibile se e solo se $U = U'$ q.o. in D_k. Per l'arbitrarietà di D_k segue $U = U'$ q.o. su Σ.

Analogamente alla (VII.3.5) possiamo scrivere

$$u[\xi + \varrho'\mu(\xi)] = u[\xi + \varrho\mu(\xi)] - \int_{\varrho'}^{\varrho} g(r,t)\, dr$$

per ogni $0 < \varrho' < \varrho \le \varrho_0$ e quindi, quasi ovunque,

$$U(\xi) = u[\xi + \varrho\mu(\xi)] - \int_0^{\varrho} g(r,t)\, dr\ . \qquad \text{(VII.3.10)}$$

Allora [(34)]

$$\begin{aligned} |U(\xi)|^p \le 2^{p-1} &\left(|u[\xi + \varrho\mu(\xi)]|^p + \left| \int_0^{\varrho} g(r,t)\, dr \right|^p \right) \le \\ 2^{p-1} &\left(|u[\xi + \varrho\mu(\xi)]|^p + \left[\int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|\, dr \right]^p \right) \le \\ 2^{p-1} &\left(|u[\xi + \varrho\mu(\xi)]|^p + \varrho_0^{p-1} \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p\, dr \right) \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \int_\Sigma |U(\xi)|^p\, d\sigma = \int_D |U[f(t)]|^p\, \sigma'(t)\, dt \le \\ 2^{p-1} \int_D |u[F(\varrho,t)]|^p\, \sigma'(t)\, dt + \varrho_0^{p-1} \int_D \sigma'(t)\, dt \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p\, dr\ . \end{aligned} \qquad \text{(VII.3.11)}$$

D'altra parte, posto $M = \max_D \sigma'(t)$ e ricordando la (VII.3.4), si ha

$$\sigma'(t) = \frac{\sigma'(t)}{J(\varrho,t)}\, J(\varrho,t) \le \frac{M}{m_0}\, J(\varrho,t)$$

(34) Se $a, b \ge 0$, allora

$$(*) \qquad (a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Infatti, fissiamo un $b \ge 0$ e consideriamo la funzione $f(x) = (x+b)^p - 2^{p-1}(x^p + b^p)$ per $x \ge 0$. Si ha $f'(x) = p(x+b)^{p-1} - p2^{p-1}x^{p-1}$ da cui $f'(x) > 0$ se e solo se $0 < x < b$ e quindi $f(x) \le f(b) = (2b)^p - 2^{p-1}2b^p = 0$, per ogni $x \ge 0$, ossia la $(*)$.

da cui

$$\int_D \sigma'(t)\, dt \int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p\, dr \leq \frac{M}{m_0} \int_D dt \int_0^{\varrho_0} |\operatorname{grad} u|^p\, J(\varrho,t)\, dr \leq \frac{M}{m_0} \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx$$

Analogamente si ha

$$\int_D |u[F(\varrho,t)|^p\, \sigma'(t)\, dt \leq \frac{M}{m_0} \int_D |u[F(\varrho,t)|^p\, J(\varrho,t)\, dt$$

e quindi dalla (VII.3.11) si trae

$$\int_\Sigma |U(\xi)|^p\, d\sigma \leq 2^{p-1} \frac{M}{m_0} \int_D |u[F(\varrho,t)|^p\, J(\varrho,t)\, dt + 2^{p-1} \varrho_0^{p-1} \frac{M}{m_0} \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx$$

per ogni $0 < \varrho \leq \varrho_0$. Integrando tra 0 e ϱ_0:

$$\begin{gathered} \varrho_0 \int_\Sigma |U(\xi)|^p\, d\sigma \leq \\ 2^{p-1} \frac{M}{m_0} \int_0^{\varrho_0} d\varrho \int_D |u[F(\varrho,t)|^p\, J(\varrho,t)\, dt + 2^{p-1} \varrho_0^p \frac{M}{m_0} \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx \leq \\ 2^{p-1} \frac{M}{m_0} \int_\Omega |u|^p dx + 2^{p-1} \varrho_0^p \frac{M}{m_0} \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx \end{gathered}$$

ossia la (VII.3.2).

Osserviamo che se Ω non è propriamente regolare il teorema di traccia può essere falso. Sia, ad esempio, $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^4\}$ e $u(x,y) = \frac{1}{x}$. Risulta $u \in \mathcal{H}^{1,2}(\Omega)$ dato che

$$\int_\Omega u^2(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx \int_0^{x^4} dy = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3};$$

$$\int_\Omega u_x^2(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \frac{1}{x^4}\, dx \int_0^{x^4} dy = \int_0^1 dx = 1;\ \int_\Omega u_y^2(x,y)\, dxdy = 0\ .$$

Ma la traccia $U = \frac{1}{x}$ non appartiene neanche a $L^1(\partial\Omega)$.

Prima di andare avanti dimostriamo un paio di lemmi tecnici che ci saranno utili in seguito.

VII.6 *Con le stesse notazioni del teorema precedente, esiste una costante C tale che*

$$\int_{\Sigma_\varrho} |u|^p d\sigma_\varrho \leq C \left(\int_\Sigma |U|^p d\sigma + \varrho^{p-1} \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx \right). \tag{VII.3.12}$$

Ricordando la (VII.3.10) possiamo scrivere

$$u[\xi + \varrho\mu(\xi)] = U(\xi) + \int_0^\varrho g(r,t)\,dr$$

da cui segue

$$|u[\xi + \varrho\mu(\xi)]|^p \leq 2^{p-1}\left(|U(\xi)|^p + \int_0^\varrho |g(r,t)|\,dr\right) \leq$$
$$2^{p-1}|U(\xi)|^p + 2^{p-1}\varrho^{p-1}\int_0^\varrho |g(r,t)|^p dr \ .$$

Si ha dunque

$$\int_{\Sigma_\varrho} |u|^p d\sigma_\varrho = \int_D |u[\xi + \varrho\mu(\xi)]|^p H(\varrho,t)\,dt \leq 2^{p-1}\int_D |U(\xi)|^p H(\varrho,t)\,dt +$$
$$2^{p-1}\varrho^{p-1}\int_D H(\varrho,t)\,dt\int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p dr \qquad \text{(VII.3.13)}$$

Essendo $H(\varrho,t)$ continua in $[0,\varrho_0]\times D$, esiste una costante H_0 tale che $|H(\varrho,t)| \leq H_0$. Possiamo allora scrivere

$$H(\varrho,t) = \frac{H(\varrho,t)}{J(r,t)}\,J(r,t) \leq \frac{H_0}{m_0}\,J(r,t) \qquad \text{(VII.3.14)}$$

e quindi

$$\int_D H(\varrho,t)\,dt\int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p dr \leq \frac{H_0}{m_0}\int_D dt\int_0^{\varrho_0} |g(r,t)|^p J(r,t)\,dr \leq \frac{H_0}{m_0}\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx \ . \qquad \text{(VII.3.15)}$$

Sempre dalla (VII.3.14) abbiamo

$$H(\varrho,t) \leq \frac{H_0}{m_0}\,J(0,t) = \frac{H_0}{m_0}\,\sigma'(t)\,\cos\omega[f(t)] \leq \frac{H_0}{m_0}\,\sigma'(t)$$

da cui

$$\int_D |U(\xi)|^p H(\varrho,t)\,dt \leq \frac{H_0}{m_0}\int_D |U(\xi)|^p\sigma'(t)\,dt = \frac{H_0}{m_0}\int_\Sigma |U|^p d\sigma \ .$$

Da questa relazione e dalle (VII.3.13) e (VII.3.15) segue la tesi.

VII.7 *Sia $w \in L^p(\Omega)$. Risulta*

$$\liminf_{\varrho\to 0^+} \varrho\int_{\Sigma_\varrho} |w|^p d\sigma_\varrho = 0 \ .$$

Supponiamo che la tesi non sia vera. Esiste, allora, un $\overline{\varrho} > 0$ tale che

$$\varrho \int_{\Sigma_\varrho} |w|^p d\sigma_\varrho \geq c > 0 \qquad \forall\ \varrho\ : 0 < \varrho < \overline{\varrho}. \tag{VII.3.16}$$

Siano $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \overline{\varrho}$ e sia B' la "striscia" $\Omega_{\varrho_1} - \Omega_{\varrho_2}$. Si ha

$$\int_\Omega |w|^p dx \geq \int_{B'} |w|^p dx = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \int_D |w[\xi + \varrho\mu(\xi)|^p J(\varrho, t)\, dt \tag{VII.3.17}$$

Essendo

$$\int_{\Sigma_\varrho} |w|^p d\sigma_\varrho = \int_D |w[\xi + \varrho\mu(\xi)|^p H(\varrho, t)\, dt$$

ed inoltre

$$J(\varrho, t) = \frac{J(\varrho, t)}{H(\varrho, t)}\, H(\varrho, t) \geq \frac{m_0}{H_0}\, H(\varrho, t)$$

dalla (VII.3.17) segue

$$\int_\Omega |w|^p dx \geq \frac{m_0}{H_0} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \int_D |w[\xi + \varrho\mu(\xi)|^p H(\varrho, t)\, dt = \frac{m_0}{H_0} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \int_{\Sigma_\varrho} |w|^p d\sigma_\varrho\ .$$

Infine la (VII.3.16) porta a

$$\int_\Omega |w|^p dx \geq c\, \frac{m_0}{H_0} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{\varrho} = c\, \frac{m_0}{H_0} \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

e questo è assurdo, dato che l'ultimo membro tende a $+\infty$ per $\varrho_1 \to 0^+$, mentre il primo membro è finito per ipotesi.

4 Gli spazi di Sobolev $H^{1,p}(\Omega)$ e $H^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.

Sia $1 \leq p < \infty$; ricordiamo che lo spazio di Sobolev $H^{1,p}(\Omega)$ viene definito come il completamento di $\mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u|^p + |\operatorname{grad} u|^p)\, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{VII.4.1}$$

In altri termini $u \in H^{1,p}(\Omega)$ se e solo se esiste una successione $v^k \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ e delle funzioni $\gamma_h \in L^p(\Omega)$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |v^k - v|\, dx = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |v^k_{x_h} - \gamma_h|\, dx = 0,\ (h = 1, \ldots, n). \tag{VII.4.2}$$

Si definisce, invece, lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ come lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ dotate di derivate deboli prime appartenenti a L^p, ossia delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali che esistono $\psi_1, \ldots, \psi_n \in L^p(\Omega)$ tali che

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} dx = - \int_\Omega \psi_h \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega) .$$

La ψ_h viene appunto chiamata *derivata debole* della u rispetto ad x_h e si indica ancora come u_{x_h}.

È facile vedere che $H^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$; infatti, se $u \in H^{1,p}(\Omega)$ e sussistono le (VII.4.2), si ha

$$\int_\Omega v^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} dx = - \int_\Omega \frac{\partial v^k}{\partial x_h} \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$$

da cui, passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} dx = - \int_\Omega \gamma_h \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$$

ossia le γ_h sono le derivate deboli della u e appartengono a $L^p(\Omega)$.

Una domanda naturale è se questi spazi coincidono in generale oppure no. Un teorema dovuto a Meyers e Serrin ($H = W$, Proc. Nat. Ac. Sci., 51, 1964) mostra che i due spazi coincidono, ossia che $H^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$ per ogni Ω. (35)

Data una funzione $u \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$, chiameremo *traccia* di u su Σ la funzione U determinata dal teorema VII.5. È ovvio che se u, oltre ad appartenere a $\mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ è anche continua in $\overline{\Omega}$, allora la traccia di u che abbiamo appena definito è proprio la traccia di u nel senso usuale.

La disuguaglianza (VII.3.2) è importante, perché permette di definire la traccia negli spazi di Sobolev $H^{1,p}(\Omega)$. Infatti, tale disuguaglianza mostra che l'operatore (lineare) di traccia $\tau : \mathcal{H}^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ è continuo, dove $\mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ è munito della norma (VII.4.1) e $L^p(\partial\Omega)$ di quella usuale. Essendo, per definizione, $\mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ denso in $H^{1,p}(\Omega)$, abbiamo che l'operatore τ si estende per continuità in modo unico ad un operatore lineare e continuo $\tau : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$. Tale operatore continua a chiamarsi operatore di traccia. Così facendo ad ogni $u \in H^{1,p}(\Omega)$ rimane associata una ben determinata funzione $U \in L^p(\partial\Omega)$ tale che la (VII.3.2) sussiste e, nel caso $u \in C^0(\overline{\Omega})$, τu è la traccia classica. Dimostriamo i seguenti lemmi che mostrano come le formule di Gauss-Green continuino a valere in $H^{1,p}(\Omega)$.

(35) È bene avvisare che alcuni Autori definiscono lo spazio $H^{1,p}(\Omega)$ come la chiusura nella norma (VII.4.1) dello spazio $C^1(\overline{\Omega})$ (e non di $\mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$). In questo caso si ha sempre $H^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$, ma, in generale, i due spazi non coincidono. Si consideri, ad esempio, la corona circolare "tagliata" $\Omega = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 1 < \varrho < 2, \, 0 < \vartheta < 2\pi\}$ (ϱ, ϑ sono le usuali coordinate polari). La funzione $u(x, y) = \arg(x + iy)$ appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ ma non ad $H^{1,p}(\Omega)$. Se Ω è abbastanza regolare (ad es. propriamente regolare), allora i due spazi coincidono.

VII.8 *Sia* $u \in H^{1,p}(\Omega)$*. Per ogni* $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *con* $\Delta_2 v \in L^q(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ *si ha (*ν *è la normale esterna):*

$$\int_\Sigma U \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma = \int_\Omega u \, \Delta_2 v \, dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \ . \tag{VII.4.3}$$

Dimostriamo la (VII.4.3) supponendo $u \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$. Per ogni $0 < \varrho \leq \varrho_0$ abbiamo

$$\int_{\Sigma_\varrho} u \frac{\partial v}{\partial \nu^{(\varrho)}} d\sigma_\varrho = \int_{\Omega_\varrho} u \, \Delta_2 v \, dx + \int_{\Omega_\varrho} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \ ;$$

passando al limite per $\varrho \to 0^+$, ricordando la (VII.3.7) e osservando che tutti gli integrandi relativi ad integrali estesi ad Ω sono sommabili in Ω, otteniamo la (VII.4.3). Sia ora $u \in H^{1,p}(\Omega)$; esiste una successione $u_n \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ nella norma (VII.4.1). Per quanto appena dimostrato si ha

$$\int_\Sigma U_n \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma = \int_\Omega u_n \, \Delta_2 v \, dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} v \, dx \ .$$

e, passando al limite per $n \to \infty$ (l'operatore di traccia è continuo !) si ottiene la tesi.

VII.9 *Sia* $u \in H^{1,p}(\Omega)$ *con* $p > 1$*. Se* $\tau u = 0$*, per ogni* $v \in H^{1,q}(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ *con* $\Delta_2 v \in L^q(\Omega)$ *si ha*

$$0 = \int_\Omega u \, \Delta_2 v \, dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \ . \tag{VII.4.4}$$

Essendo $v \in H^{1,q}(\Omega)$ avremo che $\operatorname{grad} v \in L^q(\Omega)$. Per il lemma VII.7 risulta

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \varrho \int_{\Sigma_\varrho} |\operatorname{grad} v|^q d\sigma_\varrho = 0$$

ed esiste perciò una successione di numeri positivi ϱ_k tale che

$$\lim_{k \to \infty} \varrho_k = 0, \qquad \lim_{k \to \infty} \varrho_k \int_{\Sigma_{\varrho_k}} |\operatorname{grad} v|^q d\sigma_{\varrho_k} = 0. \tag{VII.4.5}$$

Sia $u_n \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$. Poiché l'operatore di traccia τ è continuo e la traccia di u è nulla per ipotesi, abbiamo

$$\lim_{n \to \infty} \|\tau u_n\|_{L^p(\Sigma)} = 0$$

e quindi esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ (ossia una successione crescente di indici n_k) tale che

$$\|\tau u_{n_k}\|_{L^p(\Sigma)} \leq \varrho_k^{\frac{1}{q}} \ . \tag{VII.4.6}$$

Essendo le u_n di classe $C^1(\Omega)$ e v di classe $C^2(\Omega)$, si ha

$$\int_{\Sigma_{\varrho_k}} u_{n_k} \frac{\partial v}{\partial \nu^{(\varrho_k)}} \, d\sigma_{\varrho_k} = \int_{\Omega_{\varrho_k}} u_{n_k} \Delta_2 v \, dx + \int_{\Omega_{\varrho_k}} \operatorname{grad} u_{n_k} \cdot \operatorname{grad} v \, dx \ .$$

È facile convincersi che gli integrali a secondo membro di questa ultima formula tendono ai corrispondenti integrali a secondo membro della (VII.4.4) e quindi la tesi sarà acquisita se facciamo vedere che

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Sigma_{\varrho_k}} u_{n_k} \frac{\partial v}{\partial \nu^{(\varrho_k)}} \, d\sigma_{\varrho_k} = 0 \ . \tag{VII.4.7}$$

Tenendo presenti le (VII.3.12) e (VII.4.6) ed osservando che

$$\frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1,$$

si ha

$$\left| \int_{\Sigma_{\varrho_k}} u_{n_k} \frac{\partial v}{\partial \nu^{(\varrho_k)}} \, d\sigma_{\varrho_k} \right| \leq$$

$$\int_{\Sigma_{\varrho_k}} \left| u_{n_k} \frac{\partial v}{\partial \nu^{(\varrho_k)}} \right| d\sigma_{r_k} \leq \left(\int_{\Sigma_{\varrho_k}} |u_{n_k}|^p d\sigma_{\varrho_k} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Sigma_{\varrho_k}} |\operatorname{grad} v|^q d\sigma_{\varrho_k} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$C^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Sigma} |U_{n_k}|^p d\sigma + \varrho_k^{p-1} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u_{n_k}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Sigma_{\varrho_k}} |\operatorname{grad} v|^q d\sigma_{\varrho_k} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$C^{\frac{1}{p}} \left(1 + \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u_{n_k}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\varrho_k \int_{\Sigma_{\varrho_k}} |\operatorname{grad} v|^q d\sigma_{\varrho_k} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Poiché la convergenza di $\{u_n\}$ in $H^{1,p}$ implica che

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} u_{n_k}|^p dx \longrightarrow \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^p dx \, ,$$

ricordando la (VII.4.5), si trae la (VII.4.7), ossia la tesi.

Una domanda interessante è se ogni funzione $f \in L^p(\partial\Omega)$ è traccia di una qualche funzione $u \in H^{1,p}(\Omega)$, ossia se l'operatore τ è suriettivo. La risposta è no, come segue subito dall'esempio di Hadamard discusso nella § 1; infatti la funzione f trovata da Hadamard è una funzione continua su $\partial\Omega$ e quindi appartenente a $L^2(\partial\Omega)$, ma non esiste alcuna funzione $u \in H^{1,2}(\Omega)$ di cui f è la traccia (veramente nella § 1 abbiamo fatto vedere che non esiste alcuna $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{H}^{1,2}(\Omega)$ di cui f è la traccia, ma il ragionamento seguito può ripetersi in $H^{1,2}(\Omega)$).

Si definisce allora lo spazio delle tracce $H^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ lo spazio delle $f \in L^p(\partial\Omega)$ tali che esiste una funzione $u \in H^{1,p}(\Omega)$ per la quale $\tau u = f$, ossia $H^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) = \tau\,(H^{1,p}(\Omega))$. Possiamo normare lo spazio delle tracce con la seguente norma

$$\|f\|_{H^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{u\in H^{1,p}(\Omega)\\ \tau u = f}} \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}. \tag{VII.4.8}$$

Lo spazio $H^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ normato in tal modo risulta essere uno spazio di Banach. Infatti, se indichiamo con $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega)$ lo spazio delle $u \in H^{1,p}(\Omega)$ tali che $\tau u = 0$, si riconosce immediatamente che tale spazio è chiuso (per la (VII.3.2)) e $H^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ si può identificare con lo spazio quoziente $H^{1,p}(\Omega)/\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega)$. Essendo la norma (VII.4.8) proprio la norma quoziente, la completezza di $H^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ è assicurata da un teorema generale di Analisi Funzionale.

Le definizioni che abbiamo dato si estendono poi agli spazi $H^{k,p}(\Omega)$, con k intero maggiore di 1, ma non svilupperemo queste considerazioni, dato che useremo esclusivamente tali spazi per $k = 1$. Nel caso $p = 2$ lo spazio di Sobolev $H^{1,p}(\Omega)$ viene indicato con $H^1(\Omega)$, mentre il relativo spazio delle tracce con $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Il problema di caratterizzare in qualche modo "intrinseco" gli spazi di traccia ha interessato molti Matematici. Qui ci limitiamo a citare il fatto che la teoria degli spazi di traccia può essere inquadrata nella teoria degli spazi di Sobolev frazionari (ossia ad esponenti non interi), con la quale si spiega anche il perché del simbolo $H^{1-\frac{1}{p},p}$. Le funzioni di questi spazi possono essere caratterizzate mediante trasformate di Fourier (cfr., ad es., L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, p.45 e seguenti) oppure mediante una particolare norma, come indicato per $p = 2$ da Slobodetskij e Babich (Della limitazione dell'integrale di Dirichlet, Dokl. Acad., N. SSSR, 1956) ed esteso poi da Gagliardo per p qualunque (Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rend. Sem. Mat. Padova, 1957).

Le condizioni necessarie e sufficienti che si ottengono mediante queste teorie, pur essendo estremamente importanti dal punto di vista teorico, sono piuttosto difficili da verificare in pratica. Ricordiamo qui un paio di condizioni, che pur essendo soltanto sufficienti, hanno il pregio di essere verificabili in pratica.

Un primo risultato è dovuto a C. Miranda (Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana, Rend. Acc. Sc. Fis. e Matem. di Napoli, 1948), il quale dimostrò che se f è uniformemente hölderiana con esponente $\lambda > \frac{1}{2}$, allora $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Tale risultato è stato poi completato da De Vito (Sulle funzioni ad integrale di Dirichlet finito, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, 1958), il quale ha mostrato che se f è uniformemente hölderiana con esponente $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ ed è in più a variazione limitata, allora risulta $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Inoltre la condizione di Hölder può essere sostituita da una condizione del Dini. Mediante esempi ha mostrato anche che l'ipotesi di variazione limitata non può essere tolta (per $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$) e che, d'altra parte, tale ipotesi, da sola, non è sufficiente a garantire l'appartenenza di f a $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

5 Il teorema fondamentale del Calcolo delle Variazioni sull'esistenza del minimo.

Il classico teorema di Weierstrass afferma che una funzione continua F su un compatto di $\mathbb{R}^n$ ammette minimo (e massimo). Se si è interessati soltanto all'esistenza del minimo, allora il teorema è ancora vero per una funzione F che sia soltanto *semicontinua inferiormente*, ossia tale che
$$F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n)$$
per ogni successione $x_n \to x$. Tale risultato si estende senza difficoltà a spazi topologici più generali di $\mathbb{R}^n$, ad esempio agli spazi di Banach. Purtroppo, però, il teorema di Weierstrass in queste ipotesi non ci sarà utile. Bisogna, come vedremo, introdurre una topologia diversa da quella "naturale", la cosiddetta "topologia debole", e considerare gli insiemi compatti e i funzionali semicontinui rispetto a questa nuova topologia.

Premettiamo alcuni richiami sulle topologie deboli. Si dice che una successione di elementi $\{x_n\}$ di uno spazio di Banach B *converge debolmente* all'elemento $x \in B$, e scriveremo $x_n \rightharpoonup x$, se accade che
$$\lim_{n\to\infty} < f, x_n > = < f, x > \qquad \forall\ f \in B^*$$
dove B^* denota il duale (topologico) di B. Si noti che una successione $\{x_n\}$ convergente ad x in B, converge anche debolmente a x dato che
$$| < f, x_n > - < f, x > | = | < f, x_n - x > | \leq \|f\| \, \|x_n - x\| \ .$$
Non è vero, però, il viceversa. Si consideri, ad esempio, in ℓ^2 la successione $\{e_n\}$ data da $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ dove "1" figura all'n-simo posto. Risulta, come si verifica subito, $e_n \rightharpoonup 0$, ma, essendo $\|e_n\| = 1$ per ogni n, $\{e_n\}$ non tende a 0 in ℓ^2.

Una successione $\{x_n\}$ è detta di *Cauchy debole* se per ogni funzionale $f \in B^*$ la successione numerica $\{< f, x_n >\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Lo spazio B è detto *debolmente completo* se ogni successione di Cauchy debole risulta debolmente convergente ad un elemento $x \in B$.

Un insieme U di uno spazio debolmente completo B si dice *debolmente chiuso* se ogni successione di Cauchy debole contenuta in U converge debolmente a un elemento x che appartiene ancora ad U.

Un insieme U si dice *debolmente pre-compatto* se da ogni successione di elementi di U si può estrarre una sottosuccessione di Cauchy debole.

Infine U si dice *debolmente compatto* se da ogni successione di elementi di U si può estrarre una sottosuccessione convergente debolmente ad un elemento di U.

È ovvio che se B è debolmente completo, allora un suo sottoinsieme U è debolmente compatto se e solo se U è debolmente pre-compatto e debolmente chiuso.

Dimostriamo il seguente risultato

VII.10 *Se U è debolmente pre-compatto in B, allora U è limitato. Se, inoltre, B^* è separabile, allora vale anche il viceversa, ossia U è debolmente pre-compatto se e solo se U è limitato.*

Ricordiamo che uno spazio di Banach è detto *separabile* se esiste un suo sottoinsieme denso numerabile.

Sia U debolmente pre-compatto e non limitato; esiste allora una successione $\{u_n\} \subset U$ tale che $\|u_n\| > n$. D'altra parte, per la debole pre-compattezza, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ di Cauchy debole, ossia tale che per ogni $f \in B^*$, la successione numerica $\{< f, u_{n_k} >\}$ è di Cauchy in $I\!R$. Poniamo, per ogni $f \in B^*$,

$$T_k f = < f, u_{n_k} > \quad .$$

Poiché $|T_k f| \leq \|f\| \, \|u_{n_k}\|$, la T_k risulta una trasformazione lineare e continua di B^* in $I\!R$. Essendo la successione $\{< f, u_{n_k} >\}$ limitata in $I\!R$ (essendo di Cauchy), possiamo dire che per ogni $f \in B^*$ esiste una costante $L(f)$ tale che

$$|T_k f| \leq L(f) \qquad \forall\ k.$$

Per il teorema dell'uniforme limitatezza segue che $\|T_k\| \leq C$. D'altra parte, non è difficile verificare (con l'aiuto del teorema di Hahn-Banach) che $\|T_k\| = \|u_{n_k}\|$. Si ha quindi l'assurdo: $n_k < \|T_k\| \leq C$ e questo mostra che l'insieme U deve essere limitato.

Dimostriamo ora il viceversa, supponendo B^* separabile. Indichiamo con $\{f_k\}$ una base numerabile di B^*. Sia U un insieme limitato di B^* e sia $\{u_n\}$ una successione di elementi di U. Dobbiamo far vedere che è possibile estrarre da $\{u_n\}$ una sottosuccessione di Cauchy debole. Otterremo ciò usando il cosiddetto *procedimento diagonale*.

Essendo $\{< f_1, u_n >\}$ limitata in $I\!R$ esisterà una sottosuccessione $\{u_n^{(1)}\}$ tale che $\{< f_1, u_n^{(1)} >\}$ è convergente. Allo stesso modo si può estrarre da $\{u_n^{(1)}\}$ una ulteriore sottosuccessione $\{u_n^{(2)}\}$ tale che $\{< f_2, u_n^{(2)} >\}$ converge. Procedendo in questo modo si determinano delle successioni $\{u_n^{(k)}\}$ tali che $\{u_n^{(k)}\}$ è una sottosuccessione di $\{u_n^{(k-1)}\}$ e $\{< f_k, u_n^{(k)} >\}$ converge.

Consideriamo allora la successione "diagonale" $\{u_n^{(n)}\}$ e mostriamo che è di Cauchy debole. Intanto si ha che $\{< f_k, u_n^{(n)} >\}$ converge per ogni k, dato che, una volta fissato

k, $\{u_n^{(n)}\}$ è contenuta in $\{u_n^{(k)}\}$ per $n \geq k$. Consideriamo ora un qualsiasi $f \in B^*$. Preso un $\varepsilon > 0$, fissiamo un k tale che $\|f - f_k\| < \varepsilon$. Si ha

$$\begin{gathered} | < f, u_m^{(m)} > - < f, u_n^{(n)} > | \leq | < f, u_m^{(m)} > - < f_k, u_m^{(m)} > |+ \\ | < f_k, u_m^{(m)} > - < f_k, u_n^{(n)} > | + | < f_k, u_n^{(n)} > - < f, u_n^{(n)} > | \leq \\ \|f - f_k\| \, \|u_m\| + | < f_k, u_m^{(m)} > - < f_k, u_n^{(n)} > | + \|f - f_k\| \, \|u_n\| \leq \\ 2 \, L \, \varepsilon + | < f_k, u_m^{(m)} > - < f_k, u_n^{(n)} > | \end{gathered}$$

(si ricordi che $\{u_n\}$ è limitata!). Poiché la successione $\{< f_k, u_m^{(m)} >\}$ è convergente - e quindi di Cauchy - in $I\!R$, si ha che

$$\forall \, \varepsilon > 0, \; \exists \, n_\varepsilon \mid \forall \, m, n > n_\varepsilon \implies | < f_k, u_m^{(m)} > - < f_k, u_n^{(n)} > | < \varepsilon.$$

Allora, per ogni $m, n > n_\varepsilon$ risulta

$$| < f, u_m^{(m)} > - < f, u_n^{(n)} > | \leq 2 \, L \, \varepsilon + \varepsilon$$

ossia la tesi.

In generale uno spazio di Banach non è detto che sia debolmente completo. Sussiste però il seguente importante teorema

VII.11 *Se B è uno spazio di Banach riflessivo, allora B è debolmente completo e ogni suo sottospazio chiuso risulta debolmente chiuso.*

Sia $\{u_n\} \subset B$ una successione di Cauchy debole. Per la prima parte del teorema precedente risulta $\|u_n\| \leq M$.

Essendo $\{< f, u_n >\}$ una successione convergente (per ogni fissato $f \in B^*$), possiamo porre

$$< U, f >= \lim_{n \to \infty} < f, u_n > \qquad \forall \, f \in B^*.$$

L'operatore U così definito risulta evidentemente lineare ed è anche continuo, dato che

$$| < U, f > | \leq M \, \|f\| \; .$$

In altri termini: $U \in B^{**}$. Poiché lo spazio B è riflessivo, esiste un elemento $u \in B$ che corrisponde ad U mediante l'isomorfismo canonico, cioè esiste $u \in B$ tale che $< U, f >=< f, u >$ per ogni $f \in B^*$. Sarà quindi

$$< f, u >= \lim_{n \to \infty} < f, u_n > \qquad \forall \, f \in B^*$$

ossia $u_n \rightharpoonup u$.

Sia ora V un sottospazio chiuso di B e sia $\{u_n\} \subset V$ una successione di Cauchy debole. Per quanto dimostrato esiste $u \in B$ tale che $u_n \rightharpoonup u$; dobbiamo far vedere che $u \in V$. Supponiamo che ciò non accada, ossia che $u \notin V$. Essendo V chiuso, per una conseguenza del teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale $f \in B^*$ tale che $< f, v >= 0$, $\forall\, v \in V$; $< f, u >= 1$. Ma ciò porta all'assurdo

$$1 =< f, u >= \lim_{n\to\infty} < f, u_n >= 0$$

e quindi deve essere $u \in V$, ossia la tesi.

Si noti che, in base a questo teorema, ogni spazio di Hilbert, così come ogni suo sottospazio chiuso, è debolmente completo.

Una trasformazione tra due spazi di Banach $T : B \to B'$, è detta *debolmente continua* se è continua per la topologia debole, ossia se $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ in B' ogniqualvolta $x_n \rightharpoonup x$ in B. Osserviamo che se il funzionale $T : B \to I\!\!R$ è debolmente continuo, allora T è anche continuo, mentre è chiaro che il viceversa è in generale falso. Tuttavia per le trasformazioni lineari si ha:

VII.12 *Sia $T : B \to B'$ una trasformazione lineare e continua. Allora T è debolmente continua.*

Sia $x_n \rightharpoonup x$; allora, per ogni $f \in B'^*$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} < f, Tx_n >= \lim_{n\to\infty} < T^*f, x_n >=< T^*f, x >=< f, Tx >$$

(T^* è l'operatore aggiunto di T) e questo dimostra la tesi.

Un funzionale F definito in U (a valori in $I\!\!R$) è detto *debolmente semicontinuo inferiormente* se

$$F(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F(u_n)$$

per ogni successione $\{u_n\} \subset U$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ con $u \in U$.

Una successione $\{u_n\} \subset U$ è detta *minimizzante* per F se accade che

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = \inf_{u\in U} F(u).$$

È ovvio che esistono sempre successioni minimizzanti.

Il teorema fondamentale del Calcolo delle Variazioni, che estende il classico teorema di Weierstrass alle topologie deboli negli spazi di Banach, è il seguente

VII.13 *Supponiamo che*
1) B è uno spazio di Banach debolmente completo;
2) B^* è separabile;

3) $U \subset B$ è non vuoto e debolmente chiuso;
4) $F : U \to \mathbb{R}$ è debolmente semicontinuo inferiormente;
5) esiste in U una successione minimizzante $\{u_n\}$ per F la quale sia limitata, ossia tale che $\|u_n\| \leq L$.
Allora esiste il minimo di F, ossia esiste un punto $u_0 \in U$ per il quale

$$F(u_0) = \inf_{u \in U} F(u). \tag{VII.5.1}$$

Sia $\{u_n\}$ una successione minimizzante limitata, la cui esistenza è garantita da 5). Per l'ipotesi 2), ricordando il teorema VII.10, si ha che $\{u_n\}$ è debolmente precompatta, ossia si può estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ debolmente convergente verso un elemento $u_0 \in B$, dato che B è debolmente completo. Essendo poi U debolmente chiuso, si ha che $u_0 \in U$. Per la 4) :

$$F(u_0) \leq \liminf_{k \to \infty} F(u_{n_k})$$

ed essendo $\{u_n\}$ (e quindi anche $\{u_{n_k}\}$) una successione minimizzante ed essendo $u_0 \in U$:

$$\inf_{u \in U} F(u) \leq F(u_0) \leq \liminf_{k \to \infty} F(u_{n_k}) = \inf_{u \in U} F(u)$$

da cui segue la (VII.5.1).

Vogliamo ora dare qualche esempio notevole di funzionali debolmente semicontinui inferiormente.

VII.14 *Sia α un numero reale positivo. Il funzionale $F(x) = \|x\|^\alpha$ risulta debolmente semicontinuo inferiormente nello spazio di Banach B.*

Sia $x_n \rightharpoonup x$. Si ha

$$| < f, x > |^\alpha = \lim_{n \to \infty} | < f, x_n > |^\alpha \leq \|f\|^\alpha \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|^\alpha$$

per ogni $f \in B^*$. D'altra parte è noto che, per il teorema di Hahn-Banach, esiste un $f \in B^*$ con $\|f\| = 1$ tale che $< f, x >= \|x\|$. Si deve quindi avere

$$\|x\|^\alpha = | < f, x > |^\alpha \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|^\alpha$$

ossia la tesi.

Consideriamo ora una seminorma su B, ossia un funzionale a valori reali $|||x|||$ tale che
i) $|||x||| \geq 0$, $\forall\, x \in B$;
ii) $|||ax||| = |a|\, |||x|||$, $\forall\, x \in B, a \in \mathbb{R}$;
iii) $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$, $\forall\, x, y \in B$.

Supponiamo anche che $|||x|||$ è continua, ossia che esiste una costante K tale che
iv) $|||x||| \leq K\|x\|$, $\forall\, x \in B$.

VII.15 *Sia α un numero reale positivo. Il funzionale $F(x) = |||x|||^\alpha$, dove risultano soddisfatte le ipotesi i), ii), iii), iv), risulta debolmente semicontinuo inferiormente nello spazio di Banach B.*

Sia $V = \{v \in B \mid |||v||| = 0\}$. In base alla iv), V risulta un sottospazio chiuso di B, come si verifica facilmente. Consideriamo lo spazio quoziente $Q = B/V$. Indichiamo la classe di equivalenza individuata da x come $[x]$. Muniamo Q della norma

$$\|[x]\| = |||x|||.$$

Lasciamo al Lettore il compito di verificare che tale definizione è ben posta e che si tratta effettivamente di una norma nello spazio quoziente Q (diversa, in genere, dalla norma usuale negli spazi quoziente !). Indichiamo con $\overline{Q}$ il completamento di Q rispetto alla norma appena introdotta. Consideriamo l'applicazione $J : B \to \overline{Q}$ data da $Jx = [x]$. L'applicazione J è ovviamente lineare ed è anche continua, dato che

$$\|Jx\| = \|[x]\| = |||x||| \leq K \|x\| .$$

Per il teorema VII.12 J è anche debolmente continuo. Quindi, se $x_n \rightharpoonup x$, si ha $[x_n] = Jx_n \rightharpoonup [x] = Jx$ in $\overline{Q}$ e, per il teorema VII.14,

$$\|[x]\|^\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \|[x_n]\|^\alpha$$

ossia

$$|||x|||^\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} |||x_n|||^\alpha .$$

Sia ora H uno spazio di Hilbert (reale) e sia $B(u, v)$ una *forma bilineare continua*, ossia un'applicazione da $H \times H$ in $\mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned} B(au + bv, w) &= aB(u, w) + bB(v, w), \qquad \forall\, u, v, w \in H,\ a, b \in \mathbb{R} \\ B(u, av + bw) &= aB(u, v) + bB(u, w), \qquad \forall\, u, v, w \in H,\ a, b \in \mathbb{R} \\ |B(u, v)| &\leq K \|u\| \|v\|, \qquad \forall\, u, v \in H \end{aligned}$$

La funzione $Q(x) = B(x, x)$ è detta *forma quadratica continua.* La forma bilineare B che determina la Q in questo modo è detta *forma polare* della della Q. Non è restrittivo supporre che la forma bilineare $B(u, v)$ che corrisponde alla forma quadratica Q sia simmetrica, ossia tale che $B(u, v) = B(v, u)$. Infatti, se così non fosse, basterebbe sostituire alla forma bilineare B la forma $B_0(u, v) = \frac{1}{2}[B(u, v) + B(v, u)]$. Non è difficile vedere che una forma quadratica Q ammette infinite forme bilineari polari, ma, fra queste, ne esiste una sola simmetrica. La forma Q si dice semidefinita positiva se risulta $Q(x) \geq 0$ per ogni $x \in H$.

VII.16 *Una forma quadratica continua in uno spazio di Hilbert reale H che sia semidefinita positiva è debolmente semicontinua inferiormente.*

Questo teorema segue immediatamente dal VII.15, dato che la funzione $[Q(x)]^{\frac{1}{2}}$ soddisfa le condizioni i), ii), iii), iv).

6 Il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet in H^1.

VII.17 *Sia $\Omega \subset I\!R^n$ un campo propriamente regolare e sia $u \in H^1(\Omega)$. Risulta*

$$\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{R}{n}} \left(\int_{\partial\Omega} U^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2R}{n} \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{VII.6.1}$$

dove R indica il raggio di un qualsiasi campo sferico contenente Ω al suo interno.

Osserviamo che se $u \in H^1(\Omega)$, allora $u^2 \in H^{1,1}(\Omega)$. Infatti, se $u_n \in \mathcal{H}^{1,2}(\Omega)$ è ovvio che $u_n^2 \in \mathcal{H}^{1,1}(\Omega)$ e se $u_n \to u$ in $H^1(\Omega)$, si vede subito che, indicate con u_{x_h} le derivata deboli della u, si ha

$$u_n^2 \to u^2 \text{ in } L^1(\Omega); \qquad \frac{\partial u_n^2}{\partial x_h} = 2u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_h} \to 2u\, u_{x_h} \text{ in } L^1(\Omega)$$

ossia $u^2 \in H^{1,1}(\Omega)$ e si ha $(u^2)_{x_h} = 2u\, u_{x_h}$. Essendo poi $U_n^2 \to U^2$ in $L^1(\Sigma)$, abbiamo che la traccia di u^2 è proprio U^2.

Per il lemma VII.8 possiamo scrivere

$$\int_\Sigma U^2 \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma = \int_\Omega 2\, u \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx + \int_\Omega u^2 \Delta_2 v\, dx$$

per ogni v che soddisfa le ipotesi di tale lemma, in particolare per ogni $v \in C^\infty(I\!R^n)$. Prendendo $v(x) = |x|^2$ (per la quale si ha $v_{x_h} = 2x_h$ e quindi $|\operatorname{grad} v| = 2\,|x|$, $\Delta_2 v(x) = 2n$) si trova

$$2n \int_\Omega u^2 dx \leq 2 \int_\Sigma U^2 |x|\, d\sigma + 4 \int_\Omega |u|\, |\operatorname{grad} u|\, |x|\, dx\ .$$

Se Ω è contenuto nella palla di centro l'origine e raggio R, possiamo scrivere

$$\int_\Omega u^2 dx \leq \frac{R}{n} \int_\Sigma U^2 d\sigma + \frac{2R}{n} \int_\Omega |u|\, |\operatorname{grad} u|\, dx$$

e, per la disuguaglianza di Cauchy-Hölder

$$\int_\Omega u^2 dx \leq \frac{R}{n} \int_\Sigma U^2 d\sigma + \frac{2R}{n} \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{VII.6.2}$$

Si ponga:

$$a = \sqrt{\frac{R}{n}} \left(\int_\Sigma U^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{R}{n} \left(\int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t = \left(\int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

allora la (VII.6.2) non è altro che $t^2 \leq a^2 + 2bt$ e questo implica[36] $t \leq a + 2b$, ossia la tesi.

Siamo ora in grado di dimostrare il cosiddetto *principio di Dirichlet.*

VII.18 *Sia $\Omega \subset I\!R^n$ un campo propriamente regolare. Assegnata una $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega) & \\ \Delta_2 u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{su } \Sigma \end{cases} \tag{VII.6.3}$$

dove la condizione $u = f$ significa $\tau u = f$. Tale soluzione è la funzione u che rende minimo il funzionale

$$D(u) = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

nella classe $\mathcal{U}$ delle funzioni di $H^1(\Omega)$ che hanno f come traccia.

Dimostriamo che esiste il minimo del funzionale $D(u)$ in $\mathcal{U}$. A tal fine verifichiamo che sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema VII.13. Lo spazio $H^1(\Omega)$ è debolmente completo (in quanto spazio di Hilbert), è separabile (si può identificare con un sottospazio di $L^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^n$) e quindi anche il suo duale lo è. L'insieme $\mathcal{U}$ è non vuoto (perché $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$) ed è debolmente chiuso, perché se $u_n \in \mathcal{U}$ con $u_n \rightharpoonup u$, si ha $\tau u_n \rightharpoonup \tau u$ (si noti che τ è lineare e continuo e quindi debolmente continuo per il teorema VII.12). Essendo $\tau u_n = f$ si ha $\tau u = f$, ossia $u \in \mathcal{U}$. Sia ora $\{u_m\}$ una successione minimizzante. Esiste allora una costante K tale che

$$D(u_m) \leq K \qquad \forall\, m.$$

Per il lemma VII.17 si ha

$$\left(\int_\Omega u_m^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{R}{n}} \left(\int_{\partial\Omega} f^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2R}{n}\sqrt{K}$$

e quindi la successione $\{u_m\}$ è limitata nella norma H^1. Il funzionale $D(u)$ è debolmente semicontinuo inferiormente in H^1 per il teorema VII.16. Tutte le ipotesi del teorema

[36] Se $t^2 \leq a^2 + 2bt$, il numero t deve essere compreso tra le due radici dell'equazione $t^2 - 2bt - a = 0$; in particolare dovrà essere $t \leq b + \sqrt{b^2 + a^2}$ e, dato che $\sqrt{b^2 + a^2} \leq a + b$, si trae $t \leq a + 2b$.

fondamentale del Calcolo delle Variazioni sono così soddisfatte ed esiste quindi il minimo del funzionale $D(u)$ in $\mathcal{U}$.

Facciamo vedere che, se u rende minimo $D(u)$ in $\mathcal{U}$, allora u è soluzione del problema di Dirichlet (VII.6.3). Infatti, fissata ad arbitrio una $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ e posto

$$g(\varepsilon) = D(u + \varepsilon\varphi) = \int_\Omega |\operatorname{grad}(u + \varepsilon\varphi)|^2 dx$$

deve essere $g'(0) = 0$ (si noti che $u + \varepsilon\varphi \in \mathcal{H}$), dato che, essendo u un "punto" di minimo, risulta $g(\varepsilon) = D(u + \varepsilon\varphi) \geq D(u) = g(0)$. Poiché

$$g'(\varepsilon) = 2\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}\varphi\, dx + 2\varepsilon \int_\Omega |\operatorname{grad}\varphi|^2 dx$$

deve essere[(37)]

$$g'(0) = 2\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}\varphi\, dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega).$$

Integrando per parti

$$\int_\Omega u\, \Delta_2\varphi\, dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$$

e questo implica, per il lemma di Caccioppoli-Weyl, che u è (coincide q.o. con) una funzione di classe $C^2(\Omega)$ tale che $\Delta_2 u = 0$. Si è così dimostrato che, se esiste il minimo di $D(u)$ in $\mathcal{U}$, una funzione minimante è soluzione del problema di Dirichlet (VII.6.3).

Dimostriamo, infine, che il problema (VII.6.3) non può avere più di una soluzione. Supponiamo, infatti, che u_1 e u_2 siano soluzioni di (VII.6.3). Allora la funzione $u = u_1 - u_2$ sarà una funzione di $H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, armonica in Ω e nulla (nel senso delle tracce) su $\partial\Omega$. Per il lemma VII.9 (dove $p = 2$, $v = u$) si ha

$$0 = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

e quindi u è costante nelle componenti connesse di Ω ed essendo la traccia di u su $\partial\Omega$ nulla, segue $u = 0$.

Si noti che il problema di Dirichlet in $H^1(\Omega)$ e quello "classico" in $C^0(\overline{\Omega})$ sono due problemi distinti. Abbiamo già osservato con Hadamard che esistono funzioni continue che non appartengono ad $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, funzioni, quindi, per le quali esiste la soluzione del problema di Dirichlet in $C^0(\overline{\Omega})$ ma non in $H^1(\Omega)$. Viceversa, esistono funzioni di $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ che non sono continue. Un esempio di questo tipo è dato dalla funzione

$$f(\vartheta) = \log\log\frac{5}{2 - 2\cos\vartheta}$$

(37) L'equazione che si ottiene scrivendo la condizione $g'(0) = 0$ prende il nome di *equazione di Eulero* del funzionale D.

nel disco unitario $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$. Infatti f è la traccia della funzione

$$u(x,y) = \log\log\frac{5}{(x-1)^2+y^2}$$

la quale, come si verifica facilmente, appartiene a $H^1(\Omega)$ (anzi a $\mathcal{H}^1(\Omega)$). La funzione f appartiene allora ad $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, ma non è evidentemente continua. La soluzione del relativo problema di Dirichlet non sarà quindi continua in $\overline{\Omega}$. Questi esempi dimostrano che non si può dedurre la teoria "C^0" direttamente da quella "H^1" o viceversa.

7 Alcuni complementi.

In questo paragrafo vogliamo dare alcuni complementi che possono permettere di applicare le tecniche viste a problemi diversi. Premettiamo una disuguaglianza, detta di Poincaré.

VII.19 *Sia Ω un campo propriamente regolare. Esiste una costante K tale che*

$$\int_\Omega |u|^p dx \le K\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^p dx \qquad \forall\ u \in \mathring{H}^{1,p}(\Omega)\ .$$

Ricordiamo che

$$\mathring{H}^{1,p}(\Omega) = \{u \in H^{1,p}(\Omega) \mid \tau u = 0\}\ .$$

Sia $u \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$; per ogni $0<\varrho<\varrho_0$ si ha

$$u(x) = \int_{\Sigma_\varrho} u(y)\,\frac{\partial}{\partial\nu_y}s(x,y)\,d\sigma_{\varrho,y} - \int_{\Omega_\varrho}\sum_{h=1}^n \frac{\partial u_n(y)}{\partial y_h}\,\frac{\partial}{\partial y_h}s(x,y)\,dy \qquad x\in\Omega_\varrho$$

(si consideri la formula di rappresentazione integrale di Stokes e si integri per parti il potenziale di dominio che vi compare). Passando al limite per $\varrho\to 0^+$ (si ricordi la (VII.3.7)), si ha

$$u(x) = \int_\Sigma U(y)\,\frac{\partial s(x,y)}{\partial\nu_y}\,d\sigma_y - \int_\Omega\sum_{h=1}^n \frac{\partial u_n(y)}{\partial y_h}\,\frac{\partial s(x,y)}{\partial y_h}\,dy \qquad x\in\Omega\ .$$

Sia ora $u\in H^{1,p}(\Omega)$ e $\{u_m\}\subset\mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_m\to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$. Per quanto dimostrato possiamo scrivere

$$u_m(x) = \int_\Sigma U_m(y)\,\frac{\partial s(x,y)}{\partial\nu_y}\,d\sigma_y - \int_\Omega\sum_{h=1}^n \frac{\partial u_m(y)}{\partial y_h}\,\frac{\partial s(x,y)}{\partial y_h}\,dy \qquad x\in\Omega$$

da cui, passando al limite per $m \to \infty$ si trova

$$u(x) = -\int_\Omega \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial u(y)}{\partial y_h} \frac{\partial s(x,y)}{\partial y_h} dy \qquad \text{q.o. } x \in \Omega$$

(si badi che $U_m \to 0$ in $L^p(\Sigma)$ e che esiste una sottosuccessione $u_{m_k} \to u$ quasi ovunque in Ω).

Osservando che $s_{y_h}(x,y) = \mathcal{O}(|x-y|^{1-n})$, si ha che esiste una costante C tale che per $p > 1$:

$$\begin{gathered} |u(x)| \leq C \int_\Omega |\operatorname{grad} u(y)|\, |x-y|^{1-n} dy = C \int_\Omega |\operatorname{grad} u(y)|\, |x-y|^{\frac{1-n}{p}+\frac{1-n}{q}} dy \leq \\ C \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} u(y)|^p\, |x-y|^{1-n} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |x-y|^{1-n} dy \right)^{\frac{1}{q}} . \end{gathered} \tag{VII.7.1}$$

Sia ora $R > \operatorname{diam} \Omega$; allora, per ogni $x \in \Omega$, si ha che $\Omega \subset B_R(x)$ e quindi

$$\int_\Omega |x-y|^{1-n} dy \leq \int_{B_R(x)} |x-y|^{1-n} dy = \int_0^R d\varrho \int_{|\eta|=1} d\sigma_\eta \equiv K.$$

Dalla (VII.7.1) segue

$$|u(x)|^p \leq \widetilde{C} \int_\Omega |\operatorname{grad} u(y)|^p\, |x-y|^{1-n} dy$$

(dove $\widetilde{C} = C^p K^{\frac{p}{q}}$), e questa relazione sussiste ovviamente anche per $p = 1$. Per il teorema di Tonelli,

$$\begin{gathered} \int_\Omega |u(x)|^p dx \leq \widetilde{C} \int_\Omega dx \int_\Omega |\operatorname{grad} u(y)|^p\, |x-y|^{1-n} dy = \\ \widetilde{C} \int_\Omega |\operatorname{grad} u(y)|^p dy \int_\Omega |x-y|^{1-n} dx \leq \widetilde{C}\, K \int_\Omega |\operatorname{grad} u(y)|^p dy \end{gathered}$$

ossia la tesi.

Una conseguenza importante della disuguaglianza di Poincaré è che nello spazio normato $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega)$ le due norme

$$\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} \qquad \|\operatorname{grad} u\|_{L^p(\Omega)}$$

sono equivalenti, dato che

$$\|\operatorname{grad} u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq K \|\operatorname{grad} u\|_{L^p(\Omega)}$$

(la prima disuguaglianza è ovvia, mentre la seconda segue subito dalla disuguaglianza di Poincaré).

È possibile dimostrare che, se Ω è abbastanza regolare, ad esempio propriamente regolare, allora $\mathring{H}^{1,p}(\Omega)$ è proprio la chiusura di $\mathring{C}^\infty(\Omega)$ nella norma (VII.4.1), ossia u ha traccia nulla se e solo se u può essere approssimata nella norma (VII.4.1) da una successione di funzioni C^∞ il cui supporto è contenuto in Ω. Ci limitiamo a dimostrare questa proprietà nel caso $p = 2$:

VII.20 *Sia Ω propriamente regolare; indicato con $\widehat{H}^1(\Omega)$ la chiusura di $\mathring{C}^\infty(\Omega)$ nella norma di $H^1(\Omega)$ risulta*

$$\mathring{H}^1(\Omega) = \widehat{H}^1(\Omega)$$

È ovvio che $\widehat{H}^1(\Omega) \subset \mathring{H}^1(\Omega)$; infatti se $u \in \widehat{H}^1(\Omega)$ e $u_n \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$, $u_n \to u$ in $H^1(\Omega)$, per la continuità dell'operatore di traccia, si ha $\tau u = \lim \tau u_n = 0$, ossia $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Per dimostrare che i due spazi coincidono, supponiamo, per assurdo, che $\widehat{H}^1(\Omega)$ sia un sottospazio proprio di $\mathring{H}^1(\Omega)$. Si noti che, per definizione, $\widehat{H}^1(\Omega)$ è chiuso. Per una conseguenza del teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale lineare e continuo G non identicamente nullo che si annulla su $\widehat{H}^1(\Omega)$. Essendo per il teorema VII.19 la norma L^2 del gradiente equivalente alla norma usuale di H^1, possiamo pensare lo spazio $\mathring{H}^1(\Omega)$ munito del prodotto scalare

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \ .$$

Identificando tale spazio di Hilbert col suo duale e quindi il funzionale G con una funzione $g \in \mathring{H}^1(\Omega)$, si deve avere

$$\int_\Omega \operatorname{grad} g \cdot \operatorname{grad} v \, dx = 0 \qquad \forall\ v \in \widehat{H}^1(\Omega)$$

e, in particolare,

$$\int_\Omega \operatorname{grad} g \cdot \operatorname{grad} \varphi \, dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega).$$

Integrando per parti

$$\int_\Omega g\, \Delta_2 \varphi \, dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$$

da cui, per il lemma di Caccioppoli-Weyl, $\Delta_2 g = 0$; essendo la traccia di g nulla ($g \in \mathring{H}^1(\Omega)$!) deve essere $g = 0$ (per via dell'unicità dimostrata nel teorema VII.18) e questo è assurdo.

Consideriamo adesso l'equazione $-\Delta_2 u + u = f$, dove $f \in L^2(\Omega)$ e la soluzione u è cercata in $H^1(\Omega)$. Cosa vuol dire che la funzione u è soluzione di questa equazione ? Se la u fosse regolare, integrando per parti avremmo

$$\int_\Omega (-\Delta_2 u + u)\, \varphi \, dx = \int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \varphi + u\, \varphi)\, dx \qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$$

e quindi

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \varphi + u\,\varphi)\,dx = \int_\Omega f\,\varphi\,dx \qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega). \tag{VII.7.2}$$

Viceversa, se u è regolare e soddisfa la (VII.7.2), si trae

$$\int_\Omega (-\Delta_2 u + u)\,\varphi\,dx = \int_\Omega f\,\varphi\,dx \qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$$

e questo, per il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni (lemma VII.3), implica che $-\Delta_2 u + u = f$. Per una u regolare, quindi, tale equazione è equivalente alle (VII.7.2). Dato che le (VII.7.2) hanno senso anche per una $u \in H^1(\Omega)$, diremo che $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole dell'equazione $-\Delta_2 u + u = f$ se le (VII.7.2) sono soddisfatte.

Più in generale, supponiamo di avere un operatore del seguente tipo

$$E[u] = -\sum_{i,j}^{1,n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + c(x)\,u \tag{VII.7.3}$$

dove le funzioni a_{ij} e c sono supposte soltanto misurabili e appartenenti a $L^\infty(\Omega)$. Analogamente a quanto fatto per l'operatore $-\Delta_2 u + u$, diremo che la funzione $u \in H^1(\Omega)$ è soluzione dell'equazione $E[u] = f$ (dove f è una funzione assegnata di $L^2(\Omega)$ se

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + c\,u\,\varphi\right) dx = \int_\Omega f\,\varphi\,dx \qquad \forall\ \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega). \tag{VII.7.4}$$

Supporremo l'operatore E *(uniformemente) ellittico*; ciò significa che esiste una costante $\mu > 0$ tale che

$$\sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geq \mu|\lambda|^2 \qquad \text{q.o. } x \in \Omega,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{VII.7.5}$$

Supporremo anche che sia

$$c(x) \geq 0 \qquad \text{q.o. } x \in \Omega. \tag{VII.7.6}$$

VII.21 *Sia Ω propriamente regolare. Sia E l'operatore (VII.7.3), che supponiamo uniformemente ellittico e tale che la (VII.7.6) sia soddisfatta. Assegnate $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ esiste ed è unica la soluzione del problema*

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ E[u] = f & \textit{in } \Omega \\ u = g & \textit{su } \Sigma\ . \end{cases} \tag{VII.7.7}$$

Tale soluzione è la funzione che rende minimo il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + c\,u^2\right) dx - \int_\Omega f\,u\,dx$$

nella classe $\mathcal{U}$ delle funzioni di $H^1(\Omega)$ che hanno g come traccia.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema VII.18. Sappiamo già che $H^1(\Omega)$ è debolmente completo e il suo duale è separabile. Inoltre $\mathcal{U}$ è non vuoto e debolmente chiuso. Il funzionale

$$J_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + c\,u^2\right) dx$$

è un funzionale quadratico continuo (dato che a_{ij} e c sono essenzialmente limitate) semidefinito positivo (per (VII.7.5), (VII.7.6)) e quindi debolmente semicontinuo inferiormente (teorema VII.16), mentre il funzionale

$$\int_\Omega f\,u\,dx\ ,$$

essendo lineare e continuo, è debolmente continuo (teorema VII.12). Ciò dimostra che J è debolmente semicontinuo inferiormente. Sia ora $\{u_m\}$ una successione minimizzante; deve essere

$$J(u_m) \leq L \qquad \forall\ m$$

da cui, tenendo presente la (VII.7.5) e la (VII.7.6),

$$\frac{\mu}{2}\,\|\operatorname{grad} u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq J_0(u_m) \leq L + \int_\Omega f\,u_m dx \leq L + \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_m\|_{L^2(\Omega)}\ .$$

Per il lemma VII.17 possiamo scrivere

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq K\left(\|g\|_{L^2(\Sigma)} + \|\operatorname{grad} u_m\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

e quindi

$$\frac{\mu}{2}\,\|\operatorname{grad} u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq L + K\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|g\|_{L^2(\Sigma)} + K\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|\operatorname{grad} u_m\|_{L^2(\Omega)}$$

e questo implica (cfr. nota [36], p.188) che esiste una costante K' tale che

$$\|\operatorname{grad} u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq K'\ .$$

Riapplicando ancora la (VII.6.1) si deduce che $\{u_m\}$ è limitata in $H^1(\Omega)$. Esiste quindi il minimo del funzionale J in $\mathcal{U}$.

Sia u una funzione che rende minimo il funzionale J in $\mathcal{U}$; con dimostrazione analoga a quella svolta in VII.18, si trova che l'equazione di Eulero del funzionale J è proprio la (VII.7.4), e quindi la u è soluzione del problema (VII.7.7), dato che certamente si ha $\tau u = g$.

Per completare la dimostrazione, facciamo vedere che il problema (VII.7.7) non ammette più di una soluzione; siano u_1 e u_2 due soluzioni di (VII.7.7); la funzione $v = u_1 - u_2$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} v \in H^1(\Omega) \\ E[v] = 0 & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \Sigma \end{cases} .$$

Essendo $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$, per il teorema VII.20, esiste una successione di funzioni $\varphi_m \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$ tale che $\varphi_m \to v$ in $H^1(\Omega)$. Si ha allora

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j}^{1,n} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + c\, v^2 \right) dx = \lim_{m \to \infty} \int_\Omega \left(\sum_{i,j}^{1,n} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} + c\, v\, \varphi_m \right) dx = 0$$

(si tenga presente cosa vuol dire che $E[v] = 0$!) e quindi per (VII.7.5), (VII.7.6)

$$\mu \| \operatorname{grad} v \|_{L^2(\Omega)} = 0$$

ossia v è costante sulle componenti connesse di Ω; essendo la traccia di v nulla su Σ, si trae $v = 0$.

È bene avvisare che un teorema di esistenza per il problema (VII.7.7) può essere ottenuto anche con altre tecniche (ad es. usando il cosiddetto teorema di Lax-Milgram), ma qui ci premeva illustrare il legame che c'è tra questi problemi differenziali e i problemi del Calcolo delle Variazioni, legame brillantemente intuito da Riemann.

Capitolo VIII
Il teorema di Hille-Josida.

1 Il problema di Cauchy in spazi di Banach.

Sia $u(t)$ una funzione definita in un intervallo $I \subset I\!R$ a valori in uno spazio di Banach B. Diremo che u è continua in I e scriveremo $u \in C^0(I; B)$ se

$$\lim_{t \to t_0} \|u(t) - u(t_0)\| = 0$$

per ogni $t_0 \in I$. Diremo che u è derivabile in I se accade che, per ogni $t \in I$, esiste un $u'(t) \in B$ tale che

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\| = 0$$

(con le ovvie modifiche nei punti estremi di I qualora tali punti appartengano all'intervallo). È chiaro cosa si intenda dicendo che $u \in C^1(I; B)$ e, più in generale, che $u \in C^k(I; B)$ con k intero positivo.

Sia ora $u \in C^0([a, b]; B)$ e consideriamo le decomposizioni dell'intervallo $[a, b]$: $a = t_1 < t_2 \ldots < t_n < t_{n+1} = b$; ripetendo classici ragionamenti, si prova che esiste il seguente limite in B:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} u(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$$

dove $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ e δ è la norma della decomposizione, ossia il $\max(t_2 - t_1, \ldots, t_{n+1} - t_n)$. L'elemento di B dato da predetto limite si chiama integrale della u e si indica

$$\int_a^b u(t)\, dt \ .$$

Si dimostra facilmente che esso soddisfa le classiche proprietà:
1) è additivo: se $c \in [a, b]$ si ha

$$\int_a^b u(t)\, dt = \int_a^c u(t)\, dt + \int_c^b u(t)\, dt \ ;$$

2) è lineare: se $u, v \in C^0([a, b]; B)$ e se α, $\beta \in I\!R$:

$$\int_a^b (\alpha u(t) + \beta v(t))\, dt = \alpha \int_a^b u(t)\, dt + \beta \int_a^b v(t)\, dt \ ;$$

3) si ha:

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\, dt$$

(si noti che se $u \in C^0([a,b];B)$, allora $\|u(t)\|$ risulta una funzione reale definita in $[a,b]$ ed ivi continua).
4) sussiste il teorema fondamentale del calcolo: se $u \in C^0([a,b];B)$, allora

$$\frac{d}{dt}\int_a^t u(s)\,ds = u(t).$$

Allo scopo di mostrare come questi risultati si provino, facciamo vedere come si ottiene il teorema fondamentale del calcolo; per ogni Δt abbastanza piccolo, e tenendo presente 1) e 3), abbiamo

$$\left\| \frac{\int_a^{t+\Delta t} u(s)\,ds - \int_a^t u(s)\,ds}{\Delta t} - u(t) \right\| = \left\| \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} u(s)\,ds - u(t) \right\| =$$
$$\left\| \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} [u(s)-u(t)]\,ds \right\| \le \left| \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \|u(s)-u(t)\|\,ds \right| < \varepsilon$$

per Δt abbastanza piccolo in virtù della continuità della u.

Dimostriamo ora che in questa situazione astratta continua a sussistere il teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie.

VIII.1 *Sia $F: B \to B$ un operatore (non necessariamente lineare) uniformemente lipschitziano, ossia tale che esiste una costante L per la quale*

$$\|Fu - Fv\| \le L\,\|u-v\| \qquad \forall\ u,v \in B.$$

Allora per ogni $u_0 \in B$ esiste ed è unica una $u \in C^1([0,+\infty);B)$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = F[u(t)] & t \in [0,+\infty) \\ u(0) = u_0\ . \end{cases} \tag{VIII.1.1}$$

Sfruttando il teorema fondamentale del calcolo dimostrato pocanzi, è facile vedere che il problema di Cauchy (VIII.1.1) è equivalente a dimostrare che esiste ed è unica una $u \in C^0([0,+\infty);B)$ tale che

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F[u(s)]\,ds\ . \tag{VIII.1.2}$$

Sia $\mathcal{K}$ lo spazio delle $u \in C^0([0,+\infty);B)$ tali che

$$\sup_{0\le t<\infty} e^{-2Lt}\|u(t)\| < \infty\ ;$$

lo spazio $\mathcal{K}$ risulta un Banach rispetto alla norma

$$\|u\|_{\mathcal{K}} = \sup_{0\leq t<\infty} e^{-2Lt}\|u(t)\| . \tag{VIII.1.3}$$

Infatti, sia $\{u_n\} \subset C^0([0,+\infty);B)$ una successione di Cauchy rispetto alla norma (VIII.1.3), ossia tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_ε tale che per ogni $n > n_\varepsilon$, $p > 0$ risulta

$$\|u_{n+p} - u_n\|_{\mathcal{K}} = \sup_{0\leq t<\infty} e^{-2Lt}\|u_{n+p}(t) - u_n(t)\| < \varepsilon \ .$$

Si ha, per ogni $n > n_\varepsilon$, $p > 0$:

$$\|u_{n+p}(t) - u_n(t)\| < \varepsilon\, e^{2Lt} \qquad \forall\ t \in [0,+\infty) \ . \tag{VIII.1.4}$$

Questo dimostra che, per ogni fissato $t \in [0,+\infty)$ la successione $\{u_n(t)\}$ è di Cauchy in B e quindi convergente verso un elemento $u(t) \in B$, ossia

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - u(t)\| = 0 \ .$$

Passando al limite per $p \to \infty$ nella (VIII.1.4) si trova

$$\|u(t) - u_n(t)\| \leq \varepsilon\, e^{2Lt} \qquad \forall\ n > n_\varepsilon,\ t \in [0,+\infty) \ . \tag{VIII.1.5}$$

Proviamo che $u \in C^0([0,+\infty);B)$. Fissato un $n > n_\varepsilon$ sia δ_ε tale che per $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$ risulta $\|u_n(t) - u_n(t_0)\| < \varepsilon$; possiamo allora scrivere, tenendo presente la (VIII.1.5),

$$\|u(t) - u(t_0)\| \leq \|u(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(t_0)\| + \|u_n(t_0) - u(t_0)\| \leq \varepsilon(e^{2Lt} + e^{2Lt_0}) + \varepsilon$$

non appena $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$ e questo dimostra la continuità di $u(t)$. Infine, dalla (VIII.1.5), segue

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{K}} = \sup_{0\leq t<\infty} e^{-2Lt}\|u_n(t) - u(t)\| \leq \varepsilon \qquad \forall\ n > n_\varepsilon$$

ossia $u_n \to u$ rispetto alla norma (VIII.1.3) e quindi $\mathcal{K}$ è un Banach.

Sia ora T la seguente trasformazione

$$Tu(t) = u_0 + \int_0^t F[u(s)]\, ds \ ;$$

osservando che si ha $\|F[u]\| \leq \|F[u] - F[0]\| + \|F[0]\| \leq L\|u\| + \|F[0]\|$, possiamo scrivere

$$\|Tu(t) - Tu(t_0)\| \leq \left|\int_{t_0}^t \|F[u(s)]\|\, ds\right| \leq L\, \left|\int_{t_0}^t \|u(s)\|\, ds\right| + \|F[0]\|\, |t - t_0|$$

e questo prova la continuità della trasformata $Tu(t)$ quando $u \in C^0([0,+\infty), B)$. Verifichiamo ora che, se $u \in \mathcal{K}$, allora anche $Tu(t)$ appartiene a $\mathcal{K}$; infatti, essendo $\|u(s)\| \leq \|u\|_{\mathcal{K}} e^{2Ls}$, abbiamo[38]

$$e^{-2Lt}\|Tu(t)\| \leq e^{-2Lt}\|u_0\| + e^{-2Lt}\int_0^t \|F[u(s)]\|\, ds \leq$$
$$\|u_0\| + L\, e^{-2Lt}\int_0^t \|u(s)\|\, ds + e^{-2Lt}t\,\|F[0]\| \leq \|u_0\| + \|u\|_{\mathcal{K}}\, L\, e^{-2Lt}\int_0^t e^{2Ls}ds + \frac{\|F[0]\|}{2Le} =$$
$$\|u_0\| + \|u\|_{\mathcal{K}}\, L\, e^{-2Lt}\frac{e^{2Lt}-1}{2L} + \frac{\|F[0]\|}{2Le} \leq \|u_0\| + \frac{1}{2}\,\|u\|_{\mathcal{K}} + \frac{\|F[0]\|}{2Le}$$

da cui

$$\|Tu\|_{\mathcal{K}} \leq \|u_0\| + \frac{1}{2}\,\|u\|_{\mathcal{K}} + \frac{\|F[0]\|}{2Le} < \infty\ .$$

Proviamo, infine, che $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ risulta una contrazione:

$$e^{-2Lt}\|Tu(t) - Tv(t)\| \leq e^{-2Lt}\int_0^t \|F[u(s)] - F[v(s)]\|\, ds \leq L\, e^{-2Lt}\int_0^t \|u(s) - v(s)\|\, ds \leq$$
$$\|u - v\|_{\mathcal{K}} L\, e^{-2Lt}\int_0^t e^{2Ls}ds \leq \frac{1}{2}\,\|u - v\|_{\mathcal{K}}$$

da cui

$$\|Tu - Tv\|_{\mathcal{K}} \leq \frac{1}{2}\,|u - v\|_{\mathcal{K}}.$$

Per il teorema di Banach-Caccioppoli esiste ed è unico il punto unito della trasformazione T in $\mathcal{K}$ e quindi esiste una soluzione dell'equazione integrale (VIII.1.2) (unica in $\mathcal{K}$). Mostriamo ora che non ci sono altre soluzioni di (VIII.1.2) in tutto $C^0([0,+\infty); B)$. Siano, infatti, u e v due soluzioni; si ha

$$u(t) - v(t) = \int_0^t (F[u(s)] - F[v(s)])\, ds$$

e quindi, posto $g(t) = \|u(t) - v(t)\|$,

$$g(t) \leq L\int_0^t g(s)\, ds \qquad \forall\ t \in [0,\infty)\ .$$

Per il lemma di Peano-Gronwall, $g \equiv 0$ e il teorema è così dimostrato.

Osservazione. Il teorema VIII.1 è valido, in particolare, per un qualsiasi operatore lineare e continuo $F : B \to B$; un tale F è, infatti, uniformemente lipschitziano, dato che: $\|Fu - Fv\| = \|F(u - v)\| \leq \|F\|\,\|u - v\|$.

[38]Si noti che $te^{-2Lt} \leq (2Le)^{-1}$. Infatti, se $f(t) = te^{-2Lt}$, si ha $f'(t) = e^{-2Lt}(1 - 2Lt) > 0 \iff t < (2L)^{-1}$ e quindi $f(t) \leq f((2L)^{-1}) = (2Le)^{-1}$.

2 Il teorema di Hille-Josida.

Sia H uno spazio di Hilbert (reale); un operatore lineare $A : \mathcal{D}_A \subset H \to H$ si dice *monotono* se accade che

$$(Ax, x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}_A$$

dove $\mathcal{D}_A$ indica il dominio di A. Si noti che A può essere anche non limitato. L'operatore monotono A è detto *massimale monotono* se $\mathcal{R}(I + A) = H$, ossia se per ogni $y \in H$ esiste un $x \in \mathcal{D}_A$ tale che $x + Ax = y$.

Il teorema di Hille-Josida, alla dimostrazione del quale è dedicato questo § , garantisce l'esistenza ed unicità del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + A[u(t)] = 0 & t \in [0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{VIII.2.1}$$

nell'ipotesi che A sia un operatore massimale monotono e u_0 appartenga al $\mathcal{D}_A$.

Dalla definizione di operatore massimale monotono seguono subito alcune proprietà notevoli di A.

VIII.2 *Sia A massimale monotono. Allora per ogni $y \in H$ esiste ed è unica in H la soluzione x dell'equazione $x + Ax = y$. L'operatore $(I + A)^{-1}$ è lineare, continuo e risulta $\|(I + A)^{-1}\| \leq 1$.*

L'esistenza della x, ossia la suriettività dell'operatore $I + A$, è garantita per definizione. Facciamo vedere ora che l'operatore $I + A$ è iniettivo, ossia che $\mathcal{N}(I + A) = \{0\}$. Infatti, se $z + Az = 0$, si ha

$$0 = (z + Az, z) = \|z\|^2 + (Az, z) \geq \|z\|^2$$

e quindi $z = 0$. Ciò dimostra che l'equazione $x + Ax = y$ non può avere più di una soluzione (se ce ne fossero due, la loro differenza dovrebbe stare nel $\mathcal{N}(I + A)$).

Infine, se $x + Ax = y$ risulta

$$(y, x) = (x + Ax, x) = \|x\|^2 + (Ax, x) \geq \|x\|^2$$

da cui $\|x\|^2 \leq \|y\|\,\|x\|$ ossia $\|(I + A)^{-1}y\| = \|x\| \leq \|y\|$ per ogni $y \in H$.

VIII.3 *Sia A massimale monotono. Allora $\mathcal{D}_A$ è denso in H.*

Supponiamo che $\overline{\mathcal{D}}_A \neq H$; per il teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale lineare e continuo $F : H \to I\!R$ non identicamente nullo tale che $F(x) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}_A$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz possiamo identificare F con un elemento $f \in H$ e risulta $F(x) = (f, x)$. Si ha allora

$$(f, x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}_A \tag{VIII.2.2}$$

D'altra parte, essendo A massimale monotono, esiste un $y \in \mathcal{D}_A$ tale che $y + Ay = f$ e quindi la (VIII.2.2) implica

$$0 = (y + Ay, y) = \|y\|^2 + (Ay, y) \geq \|y\|^2$$

ossia $y = 0$ e quindi $f = 0$. Ma questo è assurdo, essendo F non identicamente nullo.

VIII.4 *Sia A massimale monotono. Allora A è un operatore chiuso.*

Ricordiamo che A si dice chiuso se dall'essere $x_n \in \mathcal{D}_A$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ segue $x \in \mathcal{D}_A$ e $Ax = y$. Essendo $x_n + Ax_n \to x + y$ abbiamo $x_n = (I+A)^{-1}x_n \to (I+A)^{-1}(x+y)$. Poiché $x_n \to x$, si ha $x = (I + A)^{-1}(x + y)$, e quindi $x \in \mathcal{D}_A$ e $x + Ax = x + y$, ossia $Ax = y$.

VIII.5 *Sia A massimale monotono. Allora per ogni $\lambda > 0$ l'operatore $I + \lambda A : \mathcal{D}_A \to H$ è biunivoco, l'operatore inverso $(I + \lambda A)^{-1}$ è continuo e si ha $\|(I + \lambda A)^{-1}\| \leq 1$.*

Sappiamo, per il lemma VIII.2, che la tesi è vera per $\lambda = 1$. Consideriamo l'equazione

$$x + \lambda A x = y \tag{VIII.2.3}$$

per un certo $\lambda > 0$. Possiamo riscriverla come

$$\frac{x}{\lambda} + Ax = \frac{y}{\lambda}$$

ossia

$$x + Ax = \frac{y}{\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x.$$

Essendo $I + A$ suriettivo si ha

$$x = (I + A)^{-1} \left(\frac{y}{\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x\right) \ . \tag{VIII.2.4}$$

Indichiamo con Gx l'operatore a secondo membro; x è soluzione di (VIII.2.3) se e solo se x è punto unito per la trasformazione G. Tenendo presente che $\|(I + A)^{-1}\| \leq 1$ si ha

$$\|Gx - G\tilde{x}\| \leq \left|1 - \frac{1}{\lambda}\right| \|x - \tilde{x}\| \qquad \forall\, x, \tilde{x} \in H$$

e quindi G è una contrazione se $\lambda > \frac{1}{2}$ dato che

$$\left|1 - \frac{1}{\lambda}\right| < 1 \iff |\lambda - 1| < \lambda \iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 < \lambda^2 \iff \lambda > \frac{1}{2} .$$

Per $\lambda > \frac{1}{2}$ esiste una ed una sola soluzione di (VIII.2.4) ossia dell'equazione (VIII.2.3). Che la norma di $(I + \lambda A)^{-1}$ sia minore di 1 si ottiene esattamente come nel lemma VIII.2.

Abbiamo ottenuto che la tesi è vera per ogni $\lambda > \frac{1}{2}$. Sia $\lambda_0 > \frac{1}{2}$; l'equazione

$$x + \lambda\, Ax = y$$

si può riscrivere come

$$x + \lambda_0 Ax = \frac{\lambda_0}{\lambda}\, y + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) x \iff x = (I + \lambda_0 A)^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\, y + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) x\right) .$$

Ripetendo il ragionamento precedente, si trova che la tesi è vera per ogni $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$ e quindi, per l'arbitrarietà di $\lambda_0 > \frac{1}{2}$, per ogni $\lambda > \frac{1}{4}$. Per induzione si trova che la tesi è vera per ogni $\lambda > 0$.

D'ora in poi λ denota un numero reale positivo. L'operatore

$$R_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$$

prende il nome di *risolvente*, mentre l'operatore

$$A_\lambda = AR_\lambda$$

$(\lambda > 0)$ si chiama la *regolarizzata Josida* di A.

Osserviamo che, in base al teorema VIII.5, R_λ, è un operatore lineare e continuo, definito in tutto H e tale che

$$\|R_\lambda\| \leq 1 . \tag{VIII.2.5}$$

Vediamo alcune relazioni: essendo

$$(I + \lambda A)R_\lambda = I$$

si ha

$$R_\lambda + \lambda AR_\lambda = I \iff AR_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - R_\lambda)$$

ossia

$$A_\lambda u = \frac{1}{\lambda}(I - R_\lambda)u \qquad \forall\, u \in H . \tag{VIII.2.6}$$

Questo dimostra che A_λ è continuo e definito in tutto H. Essendo poi

$$R_\lambda(I + \lambda A) = I$$

sul $\mathcal{D}_A$, si ha

$$R_\lambda + \lambda R_\lambda A = I \iff \lambda R_\lambda A = I - R_\lambda$$

ossia

$$A_\lambda u = R_\lambda A u \qquad \forall\ u \in \mathcal{D}_A. \tag{VIII.2.7}$$

In particolare $AR_\lambda = R_\lambda A$ sul $\mathcal{D}_A$, ossia A e R_λ commutano sul $\mathcal{D}_A$.

È interessante osservare che gli A_λ sono operatori monotoni, ossia

$$(A_\lambda v, v) \geq 0 \qquad \forall\ v \in H\ ; \tag{VIII.2.8}$$

infatti si ha

$$(A_\lambda v, v) = (A_\lambda v, v - R_\lambda v) + (A_\lambda v, R_\lambda v) = \lambda\,(A_\lambda v, A_\lambda v) + (AR_\lambda v, R_\lambda v) \geq \lambda\,\|A_\lambda v\|^2\ .$$

Da quest'ultima relazione segue anche

$$\lambda\,\|A_\lambda v\|^2 \leq \|A_\lambda v\|\,\|v\| \qquad \forall\ v \in H$$

da cui

$$\|A_\lambda v\| \leq \frac{1}{\lambda}\|v\| \qquad \forall\ v \in H\ .$$

Ciò dimostra che

$$\|A_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda} \tag{VIII.2.9}$$

Vedremo che gli operatori A_λ "approssimano" in qualche senso l'operatore A. Ciò suggerisce di considerare, al posto del problema di Cauchy (VIII.2.1), i problemi seguenti (i quali presentano il vantaggio di avere l'operatore A_λ lineare e continuo)

$$\begin{cases} u_\lambda'(t) + A_\lambda[u_\lambda(t)] = 0 & t \in [0, +\infty) \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{VIII.2.10}$$

e di ottenere la soluzione del problema (VIII.2.1) come limite delle u_λ. La (VIII.2.9) fa intuire che le norme di A_λ non si mantengono limitate per $\lambda \to 0^+$ e questo renderà l'analisi che svilupperemo piuttosto delicata.

VIII.6 *Per ogni $u \in H$ si ha*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|R_\lambda u - u\| = 0\ . \tag{VIII.2.11}$$

Cominciamo col dimostrare che

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \|R_\lambda v - v\| = 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}_A \ ; \tag{VIII.2.12}$$

infatti, (VIII.2.6) e (VIII.2.7) implicano

$$\|R_\lambda v - v\| = \lambda\, \|R_\lambda A v\| \leq \lambda\, \|Av\| \to 0 \qquad (\lambda \to 0^+)\ .$$

Se v è un qualsiasi elemento di H, essendo il $\mathcal{D}_A$ denso, dato un $\varepsilon > 0$, esiste un $v_\varepsilon \in \mathcal{D}_A$ tale che $\|v - v_\varepsilon\| < \varepsilon$; possiamo allora scrivere

$$\|R_\lambda v - v\| \leq \|R_\lambda v - R_\lambda v_\varepsilon\| + \|R_\lambda v_\varepsilon - v_\varepsilon\| + \|v_\varepsilon - v\| \leq 2\varepsilon + \|R_\lambda v_\varepsilon - v_\varepsilon\|$$

da cui, per la (VIII.2.12), segue

$$\limsup_{\lambda\to 0^+} \|R_\lambda v - v\| \leq 2\varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di ε, la tesi.

VIII.7 *Sia A massimale monotono in H. Denotata con A_λ la sua regolarizzata Josida, si ha che per ogni $u_0 \in \mathcal{D}_A$ esiste ed è unica $u_\lambda \in C^1([0,+\infty), H)$ soluzione del problema di Cauchy (VIII.2.10). Inoltre*

$$\|u_\lambda(t)\| \leq \|u_0\|; \qquad \|u'_\lambda(t)\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|Au_0\| \qquad t \in [0,+\infty)\ . \tag{VIII.2.13}$$

Abbiamo già osservato che A_λ è lineare e continuo in tutto H e quindi si può applicare il teorema VIII.1 (cfr. l'osservazione alla fine dell § 1, p.199). Per quanto riguarda le (VIII.2.13), dimostriamo che le funzione $\|u_\lambda(t)\|$ e $\|u'_\lambda(t)\|$ sono non crescenti. Intanto

$$(u'_\lambda, u_\lambda) + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = 0 \tag{VIII.2.14}$$

e quindi, per la monotonia di A_λ (cfr. la (VIII.2.8)), si ha(39)

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)\|^2 \leq 0$$

(39) Se $w(t)$ è derivabile, allora $\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 = 2\,(v'(t), v(t))$. Infatti

$$\frac{\|v(t+h)\|^2 - \|v(t)\|^2}{h} = \frac{(v(t+h), v(t+h)) - (v(t), v(t))}{h} =$$
$$\left[\left(\frac{v(t+h)-v(t)}{h}, v(t+h)\right) + \left(v(t), \frac{v(t+h)-v(t)}{h}\right)\right] \to$$
$$(v'(t), v(t)) + (v(t), v'(t)) = 2\,(v'(t), v(t))\ .$$

e quindi $\|u_\lambda(t)\|$ è non crescente (al crescere di t). Deve allora essere

$$\|u_\lambda(t)\| \leq \|u_\lambda(0)\| = \|u_0\|$$

ossia la prima delle (VIII.2.13).

Sia ora $w_\lambda = u'_\lambda$; dal fatto che[(40)] $u''_\lambda + A_\lambda[u'_\lambda] = 0$, deduciamo, procedendo come per u_λ, che $\|u'_\lambda(t)\|$ è non crescente. Deve quindi essere

$$\|u'_\lambda(t)\| \leq \|u'_\lambda(0)\|$$

ossia

$$\|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|A_\lambda u_\lambda(0)\| = \|A_\lambda u_0\| \tag{VIII.2.15}$$

e quindi, ricordando (VIII.2.7) e (VIII.2.5), (si noti che $u_0 \in \mathcal{D}_A$)

$$\|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|A_\lambda u_0\| = \|R_\lambda A u_0\| \leq \|A u_0\|$$

VIII.8 *Con le stesse ipotesi e notazioni del teorema precedente, si ha che $\{u_\lambda(t)\}$ converge verso una $u(t)$ uniformemente sui compatti, ossia sugli intervalli del tipo $[0,T]$. Se, inoltre, $u_0 \in \mathcal{D}_{A^2}$, allora anche $\{u'_\lambda(t)\}$ converge uniformemente sui compatti verso $u'(t)$.*

Siano u_λ e u_μ le soluzioni del problema (VIII.2.10) relative a λ e μ rispettivamente. Allora, sottointendendo la dipendenza da t,

$$u'_\lambda - u'_\mu + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

da cui

$$(u'_\lambda - u'_\mu, u_\lambda - u_\mu) = -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu)\ . \tag{VIII.2.16}$$

Allo scopo di maggiorare l'ultimo membro, osserviamo che, qualunque siano u, v e per ogni $\lambda, \mu > 0$, risulta

$$(A_\lambda u, v) = (A_\lambda u, v - R_\mu v) + (A_\lambda u, R_\mu v) = \mu\,(A_\lambda u, A_\mu v) + (A_\lambda u, R_\mu v)\ .$$

(40) Essendo A_λ lineare e continuo ed esistendo $u'_\lambda(T)$, si ha

$$\frac{d}{dt}A_\lambda[u_\lambda(t)] = \lim_{h\to 0}\frac{A_\lambda[u_\lambda(t+h)] - A_\lambda[u_\lambda(t)]}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} A_\lambda\left[\frac{u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)}{h}\right] = A_\lambda[u'_\lambda(t)]\ .$$

Ciò dimostra che, essendo $u'_\lambda = -A_\lambda[u_\lambda]$, esiste anche u''_λ. Ovviamente tale ragionamento potrebbe essere iterato.

Allora

$$\begin{gathered}(A_\lambda u - A_\mu v, u - v) = (A_\lambda u, u) + (A_\mu v, v) - (A_\lambda u, v) - (A_\mu v, u) = \\ \lambda\,(A_\lambda u, A_\lambda u) + (A_\lambda u, R_\lambda u) + \mu\,(A_\mu v, A_\mu v) + (A_\mu v, R_\mu v) - \\ \mu\,(A_\lambda u, A_\mu v) - (A_\lambda u, R_\mu v) - \lambda\,(A_\mu v, A_\lambda u) - (A_\mu v, R_\lambda u) = \\ (A_\lambda u, \lambda A_\lambda u - \mu A_\mu v) + (A_\mu v, \mu A_\mu v - \lambda A_\lambda u) + (A_\lambda u, R_\lambda u - R_\mu v) + (A_\mu v, R_\mu v - R_\lambda u) = \\ (A_\lambda u - A_\mu v, \lambda A_\lambda u - \mu A_\mu v) + (A_\lambda u - A_\mu v, R_\lambda u - R_\mu v) \geq (A_\lambda u - A_\mu v, \lambda A_\lambda u - \mu A_\mu v)\end{gathered}$$

dato che $(A_\lambda u - A_\mu v, R_\lambda u - R_\mu v) = (A(R_\lambda u - R_\mu v), R_\lambda u - R_\mu v) \geq 0$. Abbiamo così dimostrato che

$$(A_\lambda u - A_\mu v, u - v) \geq (A_\lambda u - A_\mu v, \lambda A_\lambda u - \mu A_\mu v)\ .$$

Per (VIII.2.16) e (VIII.2.13), si ha

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \leq \\ \|A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu\|\,\|\lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\| \leq (\|A_\lambda u_\lambda\| + \|A_\mu u_\mu\|)\,(\lambda\,\|A_\lambda u_\lambda\| + \mu\,\|A_\mu u_\mu\|) \leq \\ 2\,\|Au_0\|\,(\lambda+\mu)\,\|Au_0\| = 2\,(\lambda+\mu)\,\|Au_0\|^2\end{gathered}$$

da cui, integrando e tenendo presente che $u_\lambda(0) = u_\mu(0) = u_0$,

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq 4\,(\lambda+\mu)\,t\,\|Au_0\|^2\ .$$

Essendo quindi

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)\,T}\|Au_0\|$$

in $[0,T]$, abbiamo che la successione $\{u_\lambda(t)\}$ è di Cauchy uniforme in $[0,T]$ e dunque convergente verso una $u(t)$.

Sia ora $u_0 \in \mathcal{D}_{A^2}$; posto $v_\lambda = u'_\lambda$, si ha $v'_\lambda + A_\lambda v_\lambda = 0$ (cfr. nota [40], p.205) e allora, per il ragionamento precedente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|v_\lambda - v_\mu\|^2 \leq (\|A_\lambda v_\lambda\| + \|A_\mu v_\mu\|)\,(\lambda\,\|A_\lambda v_\lambda\| + \mu\,\|A_\mu v_\mu\|)\ . \tag{VIII.2.17}$$

D'altra parte, essendo

$$v_\lambda(0) = u'_\lambda(0) = -A_\lambda[u_\lambda(0)] = -A_\lambda u_0\ , \tag{VIII.2.18}$$

per la (VIII.2.13), si deve avere

$$\|A_\lambda v_\lambda(t)\| \leq \|A_\lambda v_\lambda(0)\| = \|A^2_\lambda u_0\|\ . \tag{VIII.2.19}$$

Poiché $A_\lambda = R_\lambda A$ sul $\mathcal{D}_A$, possiamo scrivere

$$A_\lambda^2 u_0 = R_\lambda A R_\lambda A u_0 = R_\lambda R_\lambda A A u_0 = R_\lambda^2 A^2 u_0$$

(si noti che $R_\lambda w \in \mathcal{D}_A$ per ogni $w \in H$, che $Au_0 \in \mathcal{D}_A$ e che, sul $\mathcal{D}_A$ si ha $R_\lambda A = AR_\lambda$) e quindi

$$\|A_\lambda^2 u_0\| = \|R_\lambda^2 A^2 u_0\| \leq \|A^2 u_0\| \ .$$

Da (VIII.2.17) e (VIII.2.19) segue dunque

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\lambda - v_\mu\|^2 \leq 2\,(\lambda + \mu)\,\|A^2 u_0\|^2$$

e, integrando,

$$\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|^2 \leq \|v_\lambda(0) - v_\mu(0)\|^2 + 4\,(\lambda + \mu)\,t\,\|A^2 u_0\|^2.$$

Ma si ha (cfr. (VIII.2.18)): $v_\lambda(0) = -A_\lambda u_0 = -R_\lambda A u_0$; poiché per il lemma VIII.6 $R_\lambda A u_0$ tende a Au_0, la successione $R_\lambda A u_0$ è di Cauchy e quindi, per λ e μ abbastanza piccoli $\|v_\lambda(0) - v_\mu(0)\| < \varepsilon$. Si può allora concludere, come per la $\{u_\lambda(t)\}$, che la $\{v_\lambda(t)\} \equiv \{u'_\lambda(t)\}$ è uniformemente convergente sugli intervalli del tipo $[0, T]$. È poi ovvio (cfr. teoremi del biennio !) che $\{u'_\lambda(t)\}$ converge proprio all $u'(t)$.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di Hille-Josida

VIII.9 *Sia A massimale monotono sul spazio di Hilbert H. Per ogni $u_0 \in \mathcal{D}_A$ esiste ed è unica $u \in C^1([0, +\infty), H) \cap C^0([0, +\infty), \mathcal{D}_A)$ soluzione del problema*

$$\begin{cases} u'(t) + A[u(t)] = 0 & t \in [0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \ . \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|\,, \qquad \|u'(t)\| = \|A[u(t)]\| \leq \|Au_0\| \qquad t \in [0, +\infty). \tag{VIII.2.20}$$

Supponiamo $u_0 \in \mathcal{D}_{A^2}$. Per quanto già dimostrato, sappiamo che per ogni $\lambda > 0$ esiste ed è unica la soluzione del problema (VIII.2.10); sappiamo anche che $\{u_\lambda(t)\}$ converge verso una $u(t)$ e che $\{u'_\lambda(t)\}$ converge verso la $u'(t)$ uniformemente su $[0, T]$, essendo T un qualsiasi numero positivo. Facciamo vedere, che dall'essere

$$u'_\lambda(t) + A_\lambda[u_\lambda(t)] = 0 \tag{VIII.2.21}$$

segue $u' + Au = 0$.

Dalla (VIII.2.11) si trae che $R_\lambda u_\lambda \to u$, dato che

$$\|R_\lambda u_\lambda - u\| \leq \|R_\lambda u_\lambda - R_\lambda u\| + \|R_\lambda u - u\| \leq \|u_\lambda - u\| + \|R_\lambda u - u\| \,.$$

D'altra parte la (VIII.2.21), che non è altro che $u'_\lambda + AR_\lambda u_\lambda = 0$, mostra che $AR_\lambda u_\lambda$ è convergente. Abbiamo quindi che $R_\lambda u_\lambda \in \mathcal{D}_A$, $R_\lambda u_\lambda \to u$ e $AR_\lambda u_\lambda$ è convergente; per la chiusura dell'operatore A (lemma VIII.4) segue che

$$u \in \mathcal{D}_A, \qquad \lim_{\lambda\to 0^+} AR_\lambda u_\lambda = Au \;,$$

da cui, per la (VIII.2.21), $u' + Au = 0$. Dalle (VIII.2.13) seguono subito le (VIII.2.20).

Facciamo ora vedere che il $\mathcal{D}_{A^2}$ è denso in $\mathcal{D}_A$ nella norma del grafico, ossia che, assegnato comunque $u_0 \in \mathcal{D}_A$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $u_\varepsilon \in \mathcal{D}_{A^2}$ tale che

$$\|u_0 - u_\varepsilon\| < \varepsilon\,, \qquad \|Au_0 - Au_\varepsilon\| < \varepsilon\,.$$

Sia $v_\lambda = R_\lambda u_0$; si ha $v_\lambda \in \mathcal{D}_A$ ed essendo $(I + \lambda A)v_\lambda = u_0$ si ha anche $Av_\lambda \in \mathcal{D}_A$, ossia $v_\lambda \in \mathcal{D}_{A^2}$. Inoltre, osservato che abbiamo $Av_\lambda = AR_\lambda u_0 = R_\lambda Au_0$ e ricordando il lemma VIII.6, si ha

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \|v_\lambda - u_0\| = \lim_{\lambda\to 0^+} \|R_\lambda u_0 - u_0\| = 0\,, \ \lim_{\lambda\to 0^+} \|Av_\lambda - Au_0\| = \lim_{\lambda\to 0^+} \|R_\lambda Au_0 - Au_0\| = 0$$

che dimostra l'asserita densità.

Sia $u_0 \in \mathcal{D}_A$ e sia $u_{0n} \in \mathcal{D}_{A^2}$ tale che $\|u_{0n} - u_0\| \to 0$, $\|Au_{0n} - Au_0\| \to 0$. Per quanto dimostrato nella prima parte esiste u_n tale che

$$\begin{cases} u'_n(t) + A[u_n(t)] = 0 \quad t \in [0, +\infty) \\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases} \tag{VIII.2.22}$$

Le successione $\{u_n(t)\}$, $\{u'_n(t)\}$ sono di Cauchy uniforme, dato che per le (VIII.2.20) (che sappiamo valgono con i dati in $\mathcal{D}_{A^2}$)

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|u_{0n} - u_{0m}\|\,, \qquad \|u'_n(t) - u'_m(t)\| \leq \|Au_{0n} - Au_{0m}\|$$

e quindi $u_n(t) \to u(t)$, $u'_n(t) \to u'(t)$ uniformemente in $[0, +\infty)$.

Ne segue $u \in C^1([0, +\infty), H)$; dalla (VIII.2.22), tenendo conto che A è chiuso, si ha che u è soluzione dell'equazione $u' + Au = 0$. Valendo poi le (VIII.2.20) per ogni u_n, passando al limite per $n \to \infty$, si ottengono anche per la u. Infine è $u \in C^0([0, +\infty), \mathcal{D}_A)$, dato che u è continua e per ogni t si ha $u(t) \in \mathcal{D}_A$. Infine risulta

$$u(0) = \lim_{n\to\infty} u_n(0) = \lim_{n\to\infty} u_{0n} = u_0.$$

Per concludere la dimostrazione, occorre dimostrare l'unicità. Supponiamo che u_1 e u_2 siano due soluzioni dello stesso problema di Cauchy. Allora

$$(u_1' - u_2', u_1 - u_2) = -(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) \leq 0$$

ossia

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq 0.$$

La funzione $\|u_1(t) - u_2(t)\|$ è dunque non crescente, non negativa e tale che $\|u_1(0) - u_2(0)\| = \|u_0 - u_0\| = 0$; deve quindi essere $\|u_1(t) - u_2(t)\| \equiv 0$, ossia $u_1(t) \equiv u_2(t)$.

3 Il teorema di Hille-Josida nel caso autoaggiunto.

Il teorema VIII.9 dimostra esistenza ed unicità della soluzione quando il dato u_0 appartiene a $\mathcal{D}_A$. In questo paragrafo vedremo che il teorema è ancora vero (tranne la stima per $\|u'(t)\|$) anche se $u_0 \in H$, purché l'operatore A sia autoaggiunto.

Premettiamo alcune definizioni. Siano B e B' due spazi di Banach e se $T : B \to B'$ un operatore densamente definito. Ricordiamo brevemente come si definisce l'operatore aggiunto T^*. Il suo dominio è dato da:

$$\mathcal{D}_{T^*} = \{y \in B'^* \mid \exists\ c \geq 0,\ | < Tx, y > | \leq c\,\|x\|,\ \forall\ x \in \mathcal{D}_T\}\ .$$

Fissiamo un $y \in \mathcal{D}_{T^*}$ e consideriamo il funzionale

$$f(x) =< Tx, y > ;$$

tale funzionale lineare risulta definito in $\mathcal{D}_T$ e continuo, dato che $|f(x)| \leq c\,\|x\|$, $\forall\ x \in \mathcal{D}_T$; essendo il $\mathcal{D}_T$ denso in B, f si estende in modo unico ad un funzionale F lineare e continuo su tutto B. Abbiamo così determinato (in modo univoco) un $F \in B^*$ tale che

$$F(x) =< Tx, y > \qquad \forall\ x \in \mathcal{D}_T.$$

Si pone $T^*y = F$. Non è difficile verificare che l'operatore T^* risulta lineare e inoltre

$$< Tx, y >=< x, T^*y > \qquad \forall\ x \in \mathcal{D}_T,\ y \in \mathcal{D}_{T^*}.$$

Si può dimostrare che se B' è riflessivo e T è un operatore chiuso, allora $\mathcal{D}_{T^*}$ è denso in B'^* (cfr. ad es., H. Brezis, Analisi Funzionale, Liguori Ed., p.71).

Sia ora H uno spazio di Hilbert, dove identifichiamo H^* con H tramite il teorema di Riesz. Un operatore $A : \mathcal{D}_A \subset H \to H$ densamente definito, si dice *simmetrico* se

$$(Ax, y) = (x, Ay) \qquad \forall\ x, y \in \mathcal{D}_A. \qquad \text{(VIII.3.1)}$$

È ovvio che per un operatore simmetrico risulta $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{A^*}$, dato che $|(Ax, y)| \leq \|Ay\| \, \|x\|$. L'operatore A è detto *autoaggiunto* se $A = A^*$. Si noti che così dicendo intendiamo che $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*}$ e $Ax = A^*x$ per ogni $x \in \mathcal{D}_A$. Per avere un operatore autoaggiunto, insomma, non basta la (VIII.3.1), ma bisogna anche avere $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*}$. Si possono costruire esempi di operatori simmetrici che non sono autoaggiunti e che non ammettono alcuna estensione autoaggiunta.

Nel caso di operatori massimali monotoni, però, abbiamo il seguente lemma

VIII.10 *Se A è un operatore massimale monotono simmetrico allora A è autoaggiunto.*

Essendo $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{A^*}$, basterà dimostrare l'inclusione inversa. Sia $g \in \mathcal{D}_{A^*}$; posto $f = g + A^*g$, si ha

$$(f, u) = (g + A^*g, u) = (g, u) + (A^*g, u) = (g, u) + (g, Au) = (g, u + Au) \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}_A.$$

Se indichiamo $v = u + Au$, ossia $u = Rv$, possiamo riscrivere la precedente formula come

$$(f, Rv) = (g, v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{R}(I + A) = H. \tag{VIII.3.2}$$

La tesi sarà dimostrata se facciamo vedere che R è autoaggiunto:

$$(x, Ry) = (Rx, y) \qquad \forall\, x,\, y \in H \tag{VIII.3.3}$$

dato che, in tal caso, da (VIII.3.2) e (VIII.3.3) segue

$$(Rf, v) = (f, Rv) = (g, v) \qquad \forall\, v \in H$$

da cui $g = Rf$ e quindi $g \in \mathcal{D}_A$.

Si tratta, quindi, di dimostrare la (VIII.3.3). Poniamo $\xi = Rx$, $\eta = Ry$, ossia $x = \xi + A\xi$, $y = \eta + A\eta$, con $\xi,\, \eta \in \mathcal{D}_A$. Risulta

$$\begin{aligned}(x, Ry) &= (\xi + A\xi, \eta) = (\xi, \eta) + (A\xi, \eta)\\ (Rx, y) &= (\xi, \eta + A\eta) = (\xi, \eta) + (\xi, A\eta)\end{aligned}$$

e poiché $(A\xi, \eta) = (\xi, A\eta)$, sussiste la tesi.

VIII.11 *Sia A un operatore massimale monotono autoaggiunto. Per ogni $u_0 \in H$ esiste ed è unica una $u \in C^0([0, +\infty), H) \cap C^1((0, +\infty), H) \cap C^0((0, +\infty), \mathcal{D}_A)$ soluzione del problema*

$$\begin{cases} u'(t) + A[u(t)] = 0 & t \in (0, +\infty) \\ u(0) = u_0\ . \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|, \quad t \in [0, +\infty), \qquad \|u'(t)\| = \|A[u(t)]\| \leq \frac{1}{t}\|u_0\| \quad t \in (0, +\infty). \tag{VIII.3.4}$$

Anche in questo caso il teorema si dimostra per densità. Consideriamo dapprima un $u_0 \in \mathcal{D}_{A^2}$ e sia u la soluzione fornita dal teorema VIII.8. La prima disugualianza delle (VIII.3.4) è vera. Per quanto riguarda l'altra, consideriamo la soluzione u_λ del problema (VIII.2.10). Integrando la (VIII.2.14) tra 0 e un $T > 0$ abbiamo

$$\frac{1}{2}(\|u_\lambda(T)\|^2 - \|u_0\|^2) + \int_0^T (A_\lambda[u_\lambda(t)], u_\lambda(t))\, dt = 0\ . \tag{VIII.3.5}$$

Integrando per parti nell'ultimo integrale, si trova

$$\int_0^T (A_\lambda[u_\lambda(t)], u_\lambda(t))\, dt = [(A_\lambda[u_\lambda(t)], u_\lambda(t))\, t]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T t\, \frac{d}{dt}(A_\lambda[u_\lambda(t)], u_\lambda(t))\, dt\ . \tag{VIII.3.6}$$

Ricordando la nota 40 (p.205) e in analogia alla nota 39 (p.204), si ha

$$\frac{d}{dt}(A_\lambda[u_\lambda(t)], u_\lambda(t)) = (A_\lambda[u'_\lambda(t)], u_\lambda(t)) + (A_\lambda[u_\lambda(t)], u'_\lambda(t))$$

ed essendo l'operatore A_λ autoaggiunto[41]

$$\frac{d}{dt}(A_\lambda[u_\lambda(t)], u_\lambda(t)) = 2\,(A_\lambda[u_\lambda(t)], u'_\lambda(t))\ .$$

La (VIII.3.6) si scrive dunque

$$\int_0^T (A_\lambda[u_\lambda(t)], u_\lambda(t))\, dt = T\,(A_\lambda[u_\lambda(T)], u_\lambda(T)) - 2\int_0^T t\,(A_\lambda[u_\lambda(t)], u'_\lambda(t))\, dt$$

D'altra parte possiamo scrivere $(u'_\lambda, u'_\lambda) + (A_\lambda u_\lambda, u'_\lambda) = 0$, da cui, moltiplicando per t ed integrando, si ottiene

$$\int_0^T t\,\|u'_\lambda(t)\|^2 dt + \int_0^T t\,(A_\lambda[u_\lambda(t)], u'_\lambda(t))\, dt = 0$$

e quindi

$$\int_0^T (A_\lambda[u_\lambda(t)], u_\lambda(t))\, dt = T\,(A_\lambda[u_\lambda(T)], u_\lambda(T)) + 2\int_0^T t\,\|u'_\lambda(t)\|^2 dt\ .$$

---

(41) Ripetendo l'ultima parte della dimostrazione del lemma VIII.10, si vede che R_λ è autoaggiunto. Poiché $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - R_\lambda)$, si ha subito che anche A_λ è autoaggiunto.

Inserendo questa relazione nella (VIII.3.5) si perviene a

$$\frac{1}{2}\left(\|u_\lambda(T)\|^2 - \|u_0\|^2\right) + T\left(A_\lambda[u_\lambda(T)], u_\lambda(T)\right) + 2\int_0^T t\,\|u_\lambda'(t)\|^2 dt = 0\ . \qquad \text{(VIII.3.7)}$$

Sappiamo anche (cfr. la dimostrazione del teorema VIII.7) che $\|u_\lambda'(t)\|^2$ è non crescente (al crescere di t) e quindi

$$\int_0^T t\,\|u_\lambda'(t)\|^2 dt \geq \|u_\lambda'(T)\|^2 \int_0^T t\,dt = \frac{T^2}{2}\,\|u_\lambda'(T)\|^2\,;$$

questa disuguaglianza e la (VIII.3.7) (ricordando la monotonia di A_λ) portano a

$$0 \geq -\frac{1}{2}\,\|u_0\|^2 + T^2\|u_\lambda'(T)\|^2$$

ossia a

$$\|u_\lambda'(T)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\,T}\,\|u_0\|$$

per ogni $T > 0$. Passando al limite per $\lambda \to 0^+$, si trae la seconda delle (VIII.3.4) (il fattore $\frac{1}{\sqrt{2}}$ non ha alcuna importanza e perciò si maggiora con 1). Il teorema è quindi vero se $u_0 \in \mathcal{D}_{A^2}$.

Sia ora $u \in H$; essendo il $\mathcal{D}_A$ denso, possiamo approssimare u in norma con elementi di $\mathcal{D}_A$, i quali, a loro volta, possono essere approssimati da elementi di $\mathcal{D}_{A^2}$ (cfr. la dimostrazione del teorema VIII.9). Sia quindi $u_{0n} \in \mathcal{D}_{A^2}$ tale che $\|u - u_{0n}\| \to 0$ e sia $u_n(t)$ la relativa soluzione del problema di Cauchy (VIII.2.22). Dato che $u_{0n} \in \mathcal{D}_{A^2}$, per quanto appena dimostrato possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_m(t)\| &\leq \|u_{0n} - u_{0m}\| \qquad & t \in [0, +\infty); \\ \|u_n'(t) - u_m'(t)\| &\leq \frac{1}{t}\,\|u_{0n} - u_{0m}\| \qquad & t \in (0, +\infty)\ . \end{aligned}$$

Queste disuguaglianze dimostrano che $\{u_n(t)\}$ è una successione uniformemente convergente su tutto $[0, +\infty)$ verso una $u(t)$ che apparterrà a $C^0([0, +\infty), H)$. Inoltre $\{u_n'(t)\}$ è una successione uniformemente convergente in intervalli del tipo $[\delta, +\infty)$ $(\delta > 0)$ verso $u'(t)$. Si ha dunque $u \in C^1((0, +\infty), H)$.

Ripetendo un ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema VIII.9, sfruttando la chiusura dell'operatore A, si prova che $u(t) \in \mathcal{D}_A$ per ogni $t > 0$ (questa volta non possiamo considerare anche $t = 0$) e quindi si ha $u \in C^0((0, +\infty), \mathcal{D}_A)$. Infine anche l'unicità si dimostra esattamente come in VIII.9.

Si noti come la norma della $u'(t)$ possa divergere per $t \to 0^+$, cosa che non succede quando il dato $u_0 \in \mathcal{D}_A$.

4 L'equazione del calore.

Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t - \Delta_2 u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{VIII.4.1}$$

dove $\Omega \subset I\!R^n$ è un dominio propriamente regolare. Il prossimo teorema, nel quale specificheremo dove viene assegnato il dato u_0 e in quale classe cerchiamo la soluzione, fornisce un teorema di esistenza ed unicità per il predetto problema.

Premettiamo un'osservazione. Dai risultati provati sul principio di Dirichlet (teorema VII.21), sappiamo che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta_2 u + u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Sigma \end{cases} \tag{VIII.4.2}$$

dove la condizione al contorno significa che cerchiamo $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ e l'equazione differenziale va interpretata in senso debole:

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \varphi + u\,\varphi)\, dx = \int_\Omega f\,\varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)\ . \tag{VIII.4.3}$$

Indichiamo ora con $\mathcal{D}(\Omega)$ la classe delle $u \in L^2(\Omega)$ che ammettono un laplaciano in $L^2(\Omega)$ "nel senso delle distribuzioni"; questo significa che esiste una $\psi \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega u\,\Delta_2\varphi\, dx = \int_\Omega \psi\,\varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)\ .$$

È ovvio che se $u \in C^2(\Omega)$ ha il laplaciano (in senso "classico") in $L^2(\Omega)$, allora tale laplaciano è proprio la ψ di cui sopra. È immediato constatare, mediante il teorema di rappresentazione di Riesz, che una funzione u di $\in L^2(\Omega)$ appartiene a $\mathcal{D}(\Omega)$ se e solo se esiste una costante K tale che

$$\left| \int_\Omega u\,\Delta_2\varphi\, dx \right| \le K\, \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)\ . \tag{VIII.4.4}$$

Abbiamo allora che la soluzione del problema di Dirichlet (VIII.4.2) deve appartenere a $\mathcal{D}(\Omega)$, ossia che la u, a priori solo in H^1, ammette un laplaciano nel senso delle distribuzioni in $L^2(\Omega)$. Ciò segue dal fatto che, integrando per parti la (VIII.4.3), si trova

$$\int_\Omega u\,\Delta_2\varphi\, dx = \int_\Omega (u - f)\,\varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$$

da cui

$$\left|\int_\Omega u\,\Delta_2\varphi\,dx\right| \leq \|u-f\|_{L^2(\Omega)}\,\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\,\varphi\in \mathring{C}^\infty(\Omega)$$

ossia sussiste la (VIII.4.4) e quindi $u\in\mathcal{D}(\Omega)^{(42)}$.

VIII.12 *Per ogni* $u_0\in L^2(\Omega)$ *esiste ed è unica la*

$$u\in C^0([0,+\infty),L^2(\Omega))\,\cap\, C^1((0,+\infty),L^2(\Omega))\,\cap\, C^0((0,+\infty),\mathcal{D}(\Omega)\cap\mathring{H}^1(\Omega))$$

soluzione del problema (VIII.4.1). Inoltre si ha

$$\frac{1}{2}\,\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\|\operatorname{grad}u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt=\frac{1}{2}\,\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad \text{(VIII.4.5)}$$

Per dimostrare l'esistenza ed unicità basterà applicare il teorema VIII.11, dove $H=L^2(\Omega)$, $A=-\Delta_2$, $\mathcal{D}_A=\mathcal{D}(\Omega)\cap\mathring{H}^1(\Omega)$. Per poter applicare tale teorema dobbiamo solo verificare che, con le definizioni appena date, l'operatore A è massimale monotono e autoaggiunto.

Sia $u\in\mathring{H}^1(\Omega)$; esiste una successione $\varphi_n\in\mathring{C}^\infty(\Omega)$ tali che $\varphi_n\to u$ in H^1 (cfr. teorema VII.20) e quindi si ha

$$(Au,u)=-\int_\Omega\Delta_2u\,u\,dx=-\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\Delta_2u\;\varphi_n\,dx={}^{(43)}-\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u\,\Delta_2\varphi_n\,dx=$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}\varphi_n\,dx=\int_\Omega|\operatorname{grad}u|^2\,dx\geq 0$$

ossia A è monotono.

Per dimostrare che A è massimale monotono occorre verificare che $\mathcal{R}(I+A)=L^2(\Omega)$, ossia che per ogni $f\in L^2(\Omega)$ esiste una $u\in\mathcal{D}_A$ tale che $u+Au=f$. In altri termini, dobbiamo verificare che per ogni $f\in L^2(\Omega)$ esiste una $u\in\mathcal{D}(\Omega)\cap\mathring{H}^1(\Omega)$ tale che $u-\Delta_2u=f$ e questo è vero per l'osservazione che precede il presente teorema.

(42) È bene avvisare che, in realtà, si può dire di più; è infatti possibile dimostrare il seguente risultato di regolarità: *assegnata comunque* $f\in L^2(\Omega)$*, la soluzione del problema (VIII.4.2) appartiene ad* $H^2(\Omega)$. Tale risultato è sorprendente, perché è abbastanza naturale dedurre, come abbiamo fatto nel testo, dall'equazione $-\Delta_2u+u=f$ (sia pure soddisfatta in senso debole) che il laplaciano (inteso in qualche senso) di u appartiene a $L^2(\Omega)$, ma non è affatto evidente - e, infatti, tutt'altro che banale da dimostrare - che **tutte** le derivate seconde appartengano a $L^2(\Omega)$.

(43) Si ricordi cosa vuol dire che il laplaciano è inteso nel senso delle distribuzioni. Nel passaggio seguente, poi, si integra per parti, cosa lecita perché $u\in\mathring{H}^1(\Omega)$.

Infine, verifichiamo che A è autoaggiunto; se u e v sono in $\mathring{H}^1(\Omega)$ si ha

$$-\int_\Omega \Delta_2 u\, v\, dx = -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \Delta_2 u\ \psi_n\, dx = \int_\Omega \operatorname{grad} u\cdot \operatorname{grad}\psi_n\, dx = \int_\Omega \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v\, dx \tag{VIII.4.6}$$

dove $\psi_n \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$, $\psi_n \to v$ in H^1 e quindi si ha

$$(Au, v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v\, dx = (u, Av) \qquad \forall\ u,\ v\in\mathcal{D}_A. \tag{VIII.4.7}$$

Ciò mostra che A è simmetrico e quindi, per il lemma VIII.10, A è autoaggiunto. Per il teorema di Hille-Josida nel caso autoaggiunto abbiamo l'esistenza e l'unicità nella classe indicata.

Per quanto riguarda la (VIII.4.5) si ha

$$\frac{d}{dt}\,\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\,(u'(t), u(t)) = -2\,(A[u(t)], u(t)) = -2\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

per $t > 0$ (N. B. non sappiamo se esiste $u'(0)$!). Integrando tra un $\varepsilon > 0$ e $T > 0$

$$\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u(\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega)} = -2\int_\varepsilon^T \|\operatorname{grad} u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt$$

ed essendo $\|u(\varepsilon)\| \to \|u(0)\|$ per la continuità di $u(t)$, passando al limite per $\varepsilon\to 0^+$, si trae

$$\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = -2\int_0^T \|\operatorname{grad} u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt$$

ossia la (VIII.4.5).

Se il dato u_0 è più regolare, allora anche la soluzione è più regolare, come illustrato dal seguente risultato.

VIII.13 *Per ogni* $u_0 \in \mathcal{D}(\Omega)\cap\mathring{H}^1(\Omega)$ *esiste ed è unica*

$$u \in C^1([0,+\infty), L^2(\Omega))\ \cap\ C^0([0,+\infty), \mathcal{D}(\Omega)\cap\mathring{H}^1(\Omega))$$

soluzione del problema (VIII.4.1) e sussiste la (VIII.4.5).

Basta applicare il teorema VIII.9, dove H, $\mathcal{D}_A$, A sono gli stessi del teorema precedente. La (VIII.4.5) si dimostra esattamente come in VIII.12.

5 L'equazione delle onde.

Consideriamo il seguente problema per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_2 u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{VIII.5.1}$$

dove $\Omega \subset I\!R^n$ è un dominio propriamente regolare. Il teorema di Hille-Josida permette di ottenere un teorema di esistenza ed unicità anche per questo problema.

VIII.14 *Per ogni* $u_0 \in \mathcal{D}(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$, $u_1 \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *esiste ed è unica la*

$$u \in C^1([0, +\infty), \mathring{H}^1(\Omega))) \cap C^0([0, +\infty), \mathcal{D}(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega))$$

soluzione del problema (VIII.5.1). Inoltre si ha

$$\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{grad} u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{grad} u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \ . \tag{VIII.5.2}$$

La (VIII.5.2) esprime il fatto che l'energia si conserva.

Mostriamo che è possibile applicare il teorema di Hille-Josida VIII.9 (in questo caso, come vedremo, non c'è la simmetria dell'operatore). L'idea base è quella di riscrivere l'equazione $u_{tt} - \Delta_2 u = 0$ come un sistema "del primo ordine", così come si fa con le equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} u_t - v = 0 \\ v_t - \Delta_2 u = 0 \ . \end{cases}$$

Consideriamo lo spazio prodotto $H = \mathring{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dove il prodotto scalare è quello usuale negli spazi prodotti. Se indichiamo con U il generico elemento $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ di H il prodotto scalare è

$$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \int_\Omega (u_1 u_2 + \operatorname{grad} u_1 \cdot \operatorname{grad} u_2)\, dx + \int_\Omega v_1 v_2 \, dx \ .$$

Introduciamo l'operatore A definito come

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ossia $AU = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta_2 u \end{pmatrix}$; il problema (VIII.5.1) può essere allora riscritto come

$$\begin{cases} U'(t) + A[U(t)] = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{VIII.5.3}$$

dove $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ (si noti che $v(0) = u_t(0) = u_1$). Come dominio dell'operatore A prendiamo: $\mathcal{D}_A = (\mathcal{D}(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)) \times \mathring{H}^1(\Omega)$. Con le definizioni appena date, l'operatore A non è neanche monotono, dato che (si ricordi la (VIII.4.6) e si noti che $u,\, v \in \mathring{H}^1(\Omega)$):

$$(AU, U) = -\int_\Omega (u\,v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)\,dx - \int_\Omega v\,\Delta_2 u\,dx = -\int_\Omega u\,v\,dx\ .$$

Tuttavia riusciremo ancora ad applicare il teorema VIII.9 considerando $A + I$ invece di A con, ovviamente, $\mathcal{D}_{A+I} = \mathcal{D}_A$. Facciamo vedere che $A + I$ risulta massimale monotono in H. Per quanto riguarda la monotonia, per ogni $U \in \mathcal{D}_A$ abbiamo

$$(AU + U, U) = (AU, U) + (U, U) = -\int_\Omega u\,v\,dx + \int_\Omega (u^2 + |\operatorname{grad} u|^2)\,dx + \int_\Omega v^2\,dx =$$
$$\int_\Omega (u^2 + v^2 - u\,v)\,dx + \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx \geq 0\ .$$

Per far vedere che $A + I$ è massimale monotono, occorre dimostrare che $\mathcal{R}((A + I) + I) \equiv \mathcal{R}(A + 2\,I)$ è tutto H. In altri termini bisogna far vedere che per ogni $(f, g) \in \mathring{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ esistono $u \in \mathcal{D}(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$, $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ tali che

$$\begin{cases} -v & + & 2u & = & f \\ -\Delta_2 u & + & 2v & = & g \end{cases} \tag{VIII.5.4}$$

Infatti, tale sistema si può scrivere in maniera equivalente come

$$\begin{cases} -v & + & 2u & = & f \\ -\Delta_2 u & + & 4u & = & 2f + g \end{cases} \tag{VIII.5.5}$$

(per ottenere la prima equazione in (VIII.5.5) basta moltiplicare la prima equazione in (VIII.5.4) per 2 e sommare con la seconda). Sappiamo che la seconda equazione, essendo $2f + g \in L^2(\Omega)$, ammette una e una sola soluzione u nello spazio $\mathcal{D}(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$. La v si ottiene allora semplicemente prendendo $v = 2u - f$ (si noti che sia u che f appartengono a $\mathring{H}^1(\Omega)$). Si è così dimostrato che $\mathcal{R}(A + 2\,I) = H$ e quindi $A + I$ è massimale monotono.

Il teorema di Hille-Josida fornisce quindi il teorema di esistenza ed unicità per il problema

$$\begin{cases} V'(t) + A[V(t)] + V(t) = 0 \\ V(0) = U_0 \end{cases} \tag{VIII.5.6}$$

qualunque sia il dato iniziale $U_0 \in \mathcal{D}_A$. Sia, allora, $U(t) = e^t V(t)$; essendo $U'(t) = e^t V(t) + e^t V'(t)$ e $A[U(t)] = e^t A[V(t)]$ si ha

$$\begin{cases} U'(t) + A[U(t)] = e^t \left(V'(t) + V(t) + A[V(t)]\right) = 0 \\ U(0) = V(0) = U_0 \end{cases}$$

ossia la $U(t)$, ottenuta in questo modo, è soluzione del problema (VIII.5.3). Tale soluzione è poi necessariamente unica, perché se $U(t)$ è soluzione di (VIII.5.3), allora, invertendo il ragionamento appena fatto, si trova che $V(t) = e^{-t}U(t)$ è soluzione di (VIII.5.6).

Infine, per ottenere la (VIII.5.2), basterà far vedere che

$$\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{grad} u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \text{cost.}\ . \tag{VIII.5.7}$$

Derivando rispetto a t si ottiene (con ovvio significato dei simboli)

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left(\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{grad} u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = 2(u'(t), u''(t)) + 2(\operatorname{grad} u'(t), \operatorname{grad} u(t)) = \\ 2\int_\Omega u'(t)\, u''(t)\, dx + 2\int_\Omega \operatorname{grad} u'(t) \cdot \operatorname{grad} u(t)\, dx = 2\int_\Omega u'(t)\, u''(t)\, dx - \\ -2\int_\Omega u'(t)\, \Delta_2 u(t)\, dx = 2\int_\Omega u'(t)\,(u''(t) - \Delta_2 u(t))\, dx = 0 \end{gathered}$$

e quindi la (VIII.5.7).