Relazioni tra la convergenza in probabilità e quella in legge

Dimostriamo due risultati che mostrano il legame che sussiste tra la convergenza in probabilità e quella in legge.

1. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Dimostrazione. Supponiamo $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ e fissiamo un $x \in \mathbb{R}$ che sia di continuità per la F. Considerato un $\delta > 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} F_n(x) = \mathbb{P}\left(X_n \leqslant x\right) &= \mathbb{P}\left(X_n \leqslant x, X \leqslant x+\delta\right) + \mathbb{P}\left(X_n \leqslant x, X > x+d\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}(X \leqslant x+\delta) + \mathbb{P}\left(X_n \leqslant x, X > x+\delta\right). \end{aligned}$$

Osserviamo ora che se $X_n \leqslant x$ e $X > x+\delta$, risulta $X - X_n > x + \delta - x = \delta$ e quindi

$$\mathbb{P}\left(X_n \leqslant x, X > x+\delta\right) \leqslant \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \delta).$$

Abbiamo così dimostrato che

$$F_n(x) \leqslant F(x+\delta) + \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \delta).$$

Tenendo presente che l'ultimo termine tende a 0 (dato che $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$), otteniamo

$$\lim_{n\to\infty}{}'' F_n(x) \leqslant F(x+\delta). \tag{1}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} 1 - F_n(x) = 1 - \mathbb{P}\left(X_n \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(X_n > x\right) = \mathbb{P}\left(X_n > x, X > x-\delta\right) + \\ + \mathbb{P}\left(X_n > x, X \leqslant x-\delta\right) \leqslant \mathbb{P}(X > x-\delta) + \mathbb{P}\left(X_n > x, X \leqslant x-\delta\right). \end{aligned}$$

se $X_n > x$ e $X \leqslant x - \delta$, risulta $X_n - X > x - (x-\delta) = \delta$, da cui segue

$$\mathbb{P}\left(X_n > x, X \leqslant x-\delta\right) \leqslant \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \delta).$$

Abbiamo dunque

$$\cancel{1} - F_n(x) \leqslant \cancel{1} - F(x-\delta) + \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \delta)$$

che implica

$$\lim_{n\to\infty}{}'' \left(-F_n(x)\right) \leqslant -F(x-\delta),$$

ossia

$$\lim_{n\to\infty}{}' F_n(x) \geqslant F(x-\delta). \tag{2}$$

Mettendo insieme la (1) e la (2), troviamo

$$F(x-\delta) \leqslant \lim_{n\to\infty}{}' F_n(x) \leqslant \lim_{n\to\infty}{}'' F_n(x) \leqslant F(x+\delta).$$

Ma essendo x un punto di continuità per la F, risulta

$$\lim_{\delta\to 0^+} F(x-\delta) = \lim_{\delta\to 0^+} F(x+\delta) = F(x)$$

e quindi

$$F(x) = \lim_{n\to\infty}{}' F_n(x) = \lim_{n\to\infty}{}'' F_n(x)$$

ossia $F_n(x) \to F(x)$. E' così dimostrato che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. $\square$

Il viceversa di questo risultato in generale non vale. Un esempio è il seguente: sia $Z \sim N(0,1)$ e definiamo $X_n = Z$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $X = -Z$. Essendo la normale standard Z una v.a. simmetrica (la relativa densità è una funzione pari), abbiamo che Z e $-Z$ hanno la stessa legge e quindi la stessa funzione di ripartizione. In altri termini $F_{X_n}(x) = F_X(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e questo ci permette di dire che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Se ci fosse però la convergenza in probabilità, dovremmo avere che, per ogni $\varepsilon > 0$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0. \tag{3}$$

Ma, nel nostro caso, $(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = (2\,|Z| \geqslant \varepsilon)$. Se valesse la (3), dovremmo avere

$$\mathbb{P}(2\,|Z| \geqslant \varepsilon) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0\,.$$

Ciò è possibile se e solo se $Z = 0$ q.c. e questo è assurdo. Abbiamo quindi che X_n non converge a X in probabilità.

Tuttavia, se la X è costante, sussiste il viceversa del teorema 1, come mostra il prossimo risultato.

2. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che, se $X = c$ allora la sua funzione di ripartizione F è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < c \\ 1, & \text{se } x \geqslant c. \end{cases}$$

Risultando la F continua in $\mathbb{R} \setminus \{c\}$, la supposta convergenza in legge significa che

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \qquad \forall\, x \neq c. \tag{4}$$

Fissato un $\delta > 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(|X_n - c| > \delta\right) = \mathbb{P}\left((X_n < c - \delta) \cup (X_n > c + \delta)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_n < c - \delta\right) + \mathbb{P}\left(X_n > c + \delta\right) \leqslant \mathbb{P}\left(X_n < c - \delta\right) + \mathbb{P}\left(X_n \geqslant c + \delta\right) \\ &= F_n(c - \delta) + 1 - F_n(c + \delta). \end{aligned}$$

Essendo $c - \delta < c < c + \delta$, e tenendo presente la (4), l'ultimo termine tende a

$$F(c - \delta) + 1 - F(c + \delta) = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Abbiamo così dimostrato che $\mathbb{P}\left(|X_n - c| > \delta\right) \to 0$. Per l'arbitrarietà di $\delta > 0$ si ha la tesi. $\square$