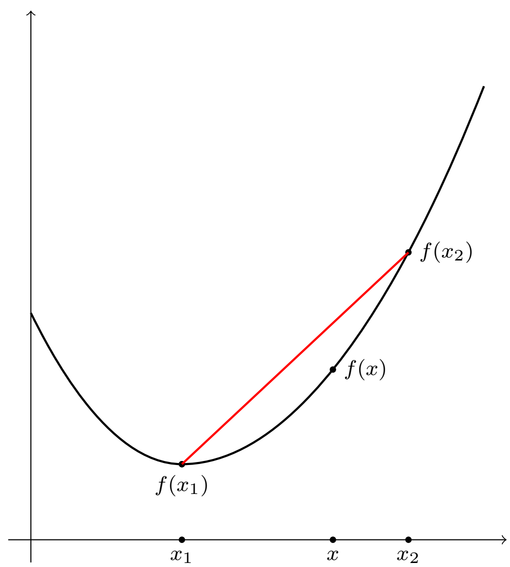
Sulla funzioni convesse di una variabile reale

Definizione e prime proprietà

Sia f una funzione definita in un intervallo aperto I (limitato o no). Diremo che la funzione f è convessa in I se, presi comunque due punti $x_1, x_2 \in I$, il grafico della funzione f non si trova - per nessun $x \in (x_1, x_2)$ - al di sopra della secante il grafico passante per i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (cfr. figura qui sotto).



Dato che la retta passante per i suddetti punti ha equazione

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

ossia

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

la condizione di convessità si descrive analiticamente dicendo che f è convessa in I se, presi comunque $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, risulta

$$f(x) \leqslant f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2). \tag{1}$$

D'altra parte la retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ si può scrivere anche nella forma

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)},$$

ossia

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2),$$

e quindi la condizione di convessità può esprimersi anche nel modo seguente:

$$f(x) \leqslant f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2), \tag{2}$$

per ogni $x_1 < x < x_2$.

Teorema 1 *Se f è convessa in I, si ha*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \tag{3}$$

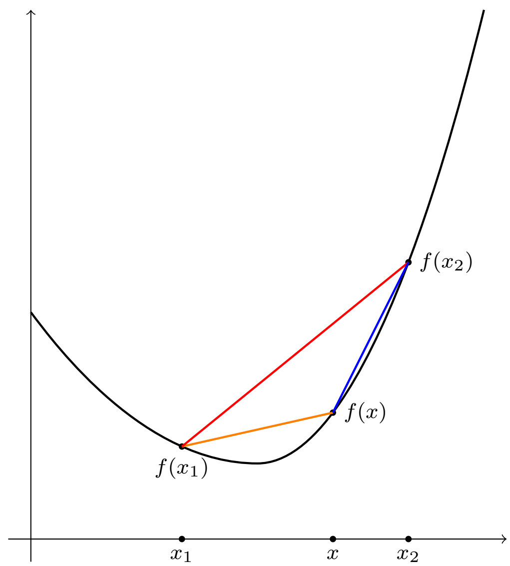
per ogni terna di punti $x, x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x < x_2$.

Dim. La prima disuguaglianza in (3) segue immediatamente dalla (1), mentre la seconda segue dalla (2). Si noti che $x - x_1 > 0$, mentre $x - x_2 < 0$ (e quindi, nell'ultimo caso, cambia il verso della disuguaglianza quando si divide per $x - x_2$). $\square$

E' interessante osservare il significato geometrico delle disuguaglianze (3). Ricordiamo che il rapporto incrementale $(f(b) - f(a))/(b - a)$ non è altro che il coefficiente angolare della retta che passa per i punti $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. La prima disuguaglianza in (3) dice quindi che il coefficiente angolare della secante passante per i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x, f(x))$ è minore o uguale a quello della secante passante per i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$. Analogamente, la seconda disuguaglianza significa che il coefficiente angolare della secante passante per i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ è minore o uguale a quello della secante passante per i punti $(x, f(x))$, $(x_2, f(x_2))$.

In altri termini, consideriamo la secante che passa per due punti del grafico corrispondenti ai due valori $x_1 < x_2$. Se teniamo fisso x_1 e facciamo variare x_2, il coefficiente angolare della corrispondente secante cresce al crescere di

x_2. Lo stesso si verifica se, invece, teniamo fisso x_2 e facciamo variare x_1 (cfr. la figura, dove, appare evidente che, al crescere di $x \in (x_1, x_2)$, il coefficiente angolare della retta arancione cresce, rimanendo sempre minore di quello della rossa; analogamente, il coefficiente angolare della retta blu cresce, rimanendo sempre maggiore di quello della rossa).



Nella definizione di convessità non si richiede a priori alcuna regolarità alla funzione f. Tuttavia vale il seguente risultato:

Teorema 2 *Sia f convessa nell'intervallo aperto I. La funzione f risulta continua ed esistono $f'_+(x)$ ed $f'_-(x)$ per ogni $x \in I$, e risulta $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.*

Dim. Fissiamo un $x \in I$ e consideriamo la funzione

$$\Phi : t \to \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

definita per $t \in I \setminus \{x\}$. Per il teorema 1, la funzione Φ risulta crescente, sia a sinistra di x che a destra. Per il teorema di regolarità delle funzioni monotone, abbiamo che esistono i limiti seguenti e risulta:

$$\lim_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \sup_{t \in I, t < x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$
$$\lim_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \inf_{t \in I, t > x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Verifichiamo che questi limiti non solo esistono, ma risultano finiti.

Fissiamo un $x \in I$. Per ogni x_1 e x_2 con $x_1 < x < x_2$; abbiamo (basta prendere il primo e l'ultimo membro della (3)):

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} . \tag{4}$$

Se nella (4) teniamo fisso anche x_2 e facciamo tendere $x_1 \to x^-$, troviamo

$$\lim_{x_1 \to x^-} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} < +\infty$$

e quindi esiste $f'_-(x)$ e possiamo scrivere

$$f'_-(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} .$$

Se ora facciamo tendere $x_2 \to x^+$, otteniamo

$$\lim_{x_2 \to x^+} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geqslant f'_-(x) > -\infty$$

e dunque esiste anche $f'_+(x)$ e si ha

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x).$$

E' noto che l'esistenza della derivata destra (sinistra) in x implica la continuità da destra (sinistra) della funzione f in x. Quindi f è continua. $\square$

In generale non si può sperare che una funzione convessa sia derivabile. Basta considerare la funzione $f(x) = |x|$. Essa è convessa su tutto $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in 0, dove esistono solo le derivate destre e sinistre: $f'_-(0) = -1, f'_+(0) = 1$.

La convessità delle funzioni derivabili

Se supponiamo che la funzione f sia derivabile dappertutto in I, possiamo dire qualcosa in più.

Teorema 3 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile per ogni $x \in I$. Le seguenti condizioni sono equivalenti*

(a) f è convessa in I;

(b) f' è crescente in I;

(c) $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x, x_0 \in I$.

Dim. $(a) \Rightarrow (b)$. Essendo la f convessa, sussistono le disuguaglianze (3) per $x_1 < x < x_2$. Se facciamo tendere $x \to x_1^+$ nella prima disuguaglianza, abbiamo

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{5}$$

(si noti che per ipotesi esiste $f'(x)$ per ogni $x \in I$).

Se facciamo tendere $x \to x_2^-$ nella seconda disuguaglianza di (3), otteniamo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2). \tag{6}$$

Dalle (5) e (6) segue

$$f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$$

per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, ossia che la f' è crescente.

$(b) \Rightarrow (c)$. Fissati $x, x_0 \in I$ con $x > x_0$, per il teorema di Lagrange, esiste un punto ξ, $x_0 < \xi < x$ tale che

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0). \tag{7}$$

Essendo f' crescente, abbiamo $f'(\xi) \geqslant f'(x_0)$ e quindi

$$f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0).$$

Se, invece, $x < x_0$, abbiamo ancora la (7) per un certo punto ξ, dove $x < \xi < x_0$. La crescenza di f' implica $f'(\xi) \leqslant f'(x_0)$ e dunque

$$f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0)$$

(si noti che stavolta $x - x_0 < 0$).

$(c) \Rightarrow (a)$. Fissiamo una coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Sia x_0 un punto arbitrario di (x_1, x_2). Poniamo

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad s(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

($s(x)$ rappresenta la secante al grafico passante per i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, mentre $t(x)$ la retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$).

Dobbiamo far vedere che $s(x_0) \geqslant f(x_0)$.

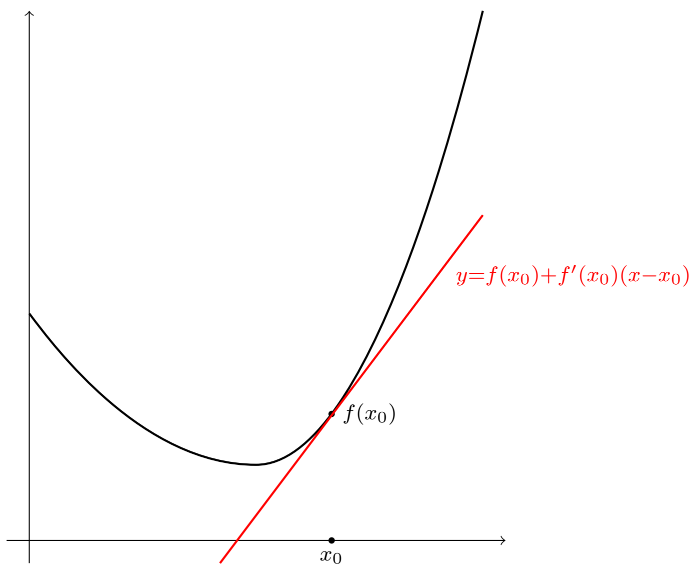
Osserviamo che $s(x_1) = f(x_1) \geqslant t(x_1)$ (l'ultima disuguaglianza vale per la (c), ossia per ipotesi). Analogamente $s(x_2) = f(x_2) \geqslant t(x_2)$. Essendo sia $s(x)$ che $t(x)$ delle funzioni lineari, avremo

$$s(x) \geqslant t(x), \qquad \forall\, x \in [x_1, x_2].$$

In particolare si ha $s(x_0) \geqslant t(x_0)$. Ma essendo $t(x_0) = f(x_0)$, abbiamo la tesi.

Avendo fatto vedere che $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$, le tre condizioni risultano equivalenti. $\square$

La condizione (c) ha il seguente ovvio significato geometrico: comunque si consideri un punto $x_0 \in I$, il grafico della funzione non scende mai al disotto della retta tangente al grafico nel punto x (cfr. figura).



Se supponiamo l'esistenza anche della derivata seconda, abbiamo il seguente utile corollario:

Teorema 4 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte per ogni $x \in I$. Allora f è convessa in I se, e solo se, $f''(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in I$.*

Dim. Sappiamo (Teorema 3) che una funzione è convessa in I se, e solo se, f' è crescente in I. D'altra parte, una funzione derivabile, è crescente in I

se, e solo se, la sua derivata è non negativa in I. Quindi f' è crescente se, e solo se, f'' è non negativa in I. $\square$

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice concava in I se la funzione $-f$ risulta convessa in I. E' ovvio come si modifichino i risultati dimostrati per le funzioni convesse nel caso di funzioni concave. Ad esempio, dal teorema 4 segue subito

Teorema 5 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte per ogni $x \in I$. Allora f è concava in I se, e solo se, $f''(x) \leqslant 0$ per ogni $x \in I$.*

Flessi

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto in cui esiste $f'(x_0)$. Se in un intorno sinistro di x_0 la funzione f è convessa (concava) e in un intorno destro è concava (convessa), allora si dice che x_0 è un *punto di flesso* per la funzione f. Si parla di flesso anche nel caso in cui il punto x_0 sia un punto a tangente verticale.

Dai Teoremi 4 e 5 segue immediatamente che se x_0 è un punto di flesso ed esiste $f''(x)$ per ogni $x \in I$, allora $f''(x_0) = 0$. I punti di flesso, quindi, vanno cercati tra gli zeri della derivata seconda.

Si noti, tuttavia, che non vale il viceversa, ossia $f''(x_0) = 0$ non implica necessariamente che x_0 sia un flesso. Si consideri, ad esempio, la funzione $f(x) = x^4$. Risulta $f''(x) = 12x^2$ e quindi $f''(0) = 0$. Ma $x_0 = 0$ non è un punto di flesso, dato che la funzione risulta convessa su tutto $\mathbb{R}$.