Relazioni fra alcuni tipi di convergenza.

Supponiamo di avere uno spazio di misura $(X, \mathscr{B}, \mu)$. Tutte le funzioni che considereremo qui saranno supposte misurabili. Ricordiamo alcune definizioni di convergenza,

La successione $\{f_n\}$ *converge ad* f *quasi ovunque* (brevemente, $f_n \to f$ q.o.) se esiste un insieme $N \in \mathscr{B}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X - N$ e $\mu(N) = 0$.

La successione $\{f_n\}$ *converge ad* f *uniformemente* se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ :\ \forall\, n > n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in X. \tag{1}$$

La successione $\{f_n\}$ *converge ad* f *in norma* (brevemente, in $L^1(X, \mu)$) se

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0.$$

La successione $\{f_n\}$ *converge ad* f *in misura* se, per ogni $\varepsilon > 0$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0 \tag{2}$$

o, equivalentemente,[1]

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ :\ \mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_\varepsilon. \tag{3}$$

[1] Infatti, se sussiste la (2) significa che, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, si ha

$$\forall\, \sigma > 0\ \exists\, m_\sigma\ :\ \forall\, n > m_\sigma \Longrightarrow \mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} < \sigma. \tag{$*$}$$

Prendendo $\sigma = \varepsilon$, $n_\varepsilon = m_\sigma$ si ottiene la (3). Viceversa, supponiamo che sussista la (3). Se $\sigma \geqslant \varepsilon$ si ha

$$\mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} < \varepsilon \leqslant \sigma \qquad \forall\, n > n_\varepsilon;$$

se, invece, $\sigma < \varepsilon$, risulta

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}$$

da cui

$$\mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\} < \sigma \qquad \forall\, n > n_\sigma.$$

In ogni caso, quindi, esiste un m_σ per cui vale la $(*)$, ossia la (2) è vera.

Vogliamo determinare quale tipo di legame ci sia tra questi concetti di convergenza. Converrà distinguere due casi.

Caso 1. $\mu(X) < +\infty$**.**

Le varie implicazioni che troveremo sono riassunte dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\text{conv. uniforme} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"'] & \text{conv. q.o.} \arrow[d, shift left, "4"] \\
\text{conv. in norma} \arrow[r, "3"] \arrow[ur, dashed, "6"'] & \text{conv. in misura} \arrow[u, dashed, shift left, "5"]
\end{tikzcd}$$

dove le frecce tratteggiate indicano che, pur essendo - in generale - l'implicazione falsa, è sempre possibile estrarre una sottosuccessione con la convergenza richiesta. Infine, i numeri rimandano all'enunciato corrispondente.

1. *Se $f_n \to f$ uniformemente, allora $f_n \to f$ q.o.. In generale, se $f_n \to f$ q.o., non esiste alcuna sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converga uniformemente a f.*

Dim. La prima parte dell'enunciato è ovvia. Per quanto riguarda il viceversa, basta considerare, ad esempio, la successione $\{x^n\}$ nell'intervallo $[0, 1]$, la quale converge puntualmente, ma non esiste alcuna sottosuccessione che converge uniformemente. $\square$

2. *Se $f_n \to f$ uniformemente, allora $f_n \to f$ in norma. In generale, se $f_n \to f$ in norma, non esiste alcuna sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converga uniformemente a f.*

Dim. Se $f_n \to f$ uniformemente sussiste la (1) e quindi risulta

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu < \varepsilon \, \mu(X) \quad \forall \ n > n_\varepsilon;$$

ciò dimostra che $f_n \to f$ in norma.

Consideriamo ora la successione $\{x^n\}$ nell'intervallo $[0,1]$ ($\mu =$ misura di Lebesgue); si ha

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0$$

ossia $x^n \to 0$ in norma, ma x^n, così come ogni sua sottosuccessione, non tende a 0 uniformemente in $[0,1]$. $\square$

3. *Se $f_n \to f$ in norma, allora $f_n \to f$ in misura. In generale, se $f_n \to f$ in misura, non esiste alcuna sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converga in norma a f.*

Dim. Grazie alla disuguaglianza di Čebičev, si ha

$$\mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \ \leqslant\ \frac{1}{\varepsilon}\int_X |f_n - f|\, d\mu$$

e questo dimostra la prima parte dell'enunciato.

Consideriamo la successione

$$f_n(x) = n\, \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \tag{4}$$

nell'intervallo $[0,1]$ ($\mu =$ misura di Lebesgue). Essendo

$$\{x \in X \mid |f_n(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset \left[0, \frac{1}{n}\right] \qquad n > \varepsilon,$$

risulta definitivamente

$$m\{x \in X \mid |f_n(x)| \geqslant \varepsilon\} \ \leqslant \frac{1}{n}$$

da cui segue che $f_n \to 0$ in misura.

D'altra parte si ha

$$\int_0^1 f_n dx = n \int_0^{\frac{1}{n}} dx = 1 \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e perciò non esiste alcuna sottosuccessione di f_n convergente a 0 in norma. $\square$

4. *Se $f_n \to f$ q.o. allora $f_n \to f$ in misura.*

Dim. Per il teorema di Severini-Egorov, fissato un $\sigma > 0$, esiste un insieme $D \in \mathscr{B}$ tale che $\mu(D) < \sigma$ e $f_n \to f$ uniformemente in $X - D$. Fissato un $\varepsilon > 0$, possiamo scrivere

$$\begin{gathered}\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = \\ \{x \in D \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \cup \{x \in X - D \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset \\ D \cup \{x \in X - D \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}\end{gathered}$$

e quindi

$$\mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mu(D) + \mu\{x \in X - D \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Ma, in virtù della convergenza uniforme su $X - D$, abbiamo che $f_n \to f$ in misura su $X - D$ (cfr. 2 e 3) e dunque

$$\limsup_{n\to\infty} \mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mu(D) < \sigma.$$

Per l'arbitrarietà di σ si trae la tesi. $\square$

Per quanto riguarda il viceversa, in generale è falso. Si consideri, ad esempio, la successione

$$(5) \quad f_{2^m+k}(x) = \chi_{[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]}(x) \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1;\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

nel solito intervallo $[0, 1]$. Risulta

$$\int_0^1 f_{2^m+k} dx = \frac{1}{2^m}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n|\, dx = 0.$$

Questo dimostra che $f_n \to 0$ in norma e quindi in misura (cfr. 3). D'altra parte, essendo

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \qquad \forall\ x \in [0, 1],$$

la successione $\{f_n\}$ non converge in nessun punto.

Il viceversa del teorema 4 è quindi falso. Tuttavia sussiste il seguente risultato.

5. *Se* $f_n \to f$ *in misura, esiste una sottosuccessione* $\{f_{n_k}\}$ *convergente ad* f *q.o..*

Dim. In virtù della (3), è possibile trovare una successione crescente di indici n_k tale che [2]

$$\mu\{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\} < \frac{1}{2^k}\ . \tag{6}$$

Poniamo

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k$$

dove

$$E_k = \{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\}.$$

L'insieme E risulta misurabile e, per il lemma di Borel-Cantelli (cfr. appendice, p.8), si ha $\mu E = 0$. Mostriamo che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per ogni $x \notin E$. Infatti

$$x \notin E \iff x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} \widetilde{E}_k \iff \exists\ m \in \mathbb{N}\ :\ x \in \bigcap_{k=m}^{\infty} \widetilde{E}_k \iff$$
$$\exists\ m \in \mathbb{N}\ :\ x \in \widetilde{E}_k, \quad \forall\ k \geqslant m.$$

Ma questo significa che, se $x \notin E$, esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k} \qquad\qquad \forall\ k \geqslant m$$

e quindi

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \qquad\qquad \forall\ x \in X - E$$

ossia la tesi. □

[2] Si cominicia col fissare un n_1 in modo tale che sia

$$\mu\{x \in X \mid |f_{n_1}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2}\} < \frac{1}{2}\ .$$

Si procede quindi per induzione: supponiamo di aver già determinato $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ in modo tale che valgano le relative (6). Essendo, per la (3),

$$\mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\} < \frac{1}{2^k}$$

definitivamente, possiamo trovare un indice $n_k > n_{k-1}$ tale che valga la (6).

6. *Se $f_n \to f$ in norma, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ convergente ad f q.o.. In generale, se $f_n \to f$ q.o., non esiste alcuna sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converga in norma a f.*

Dim. La prima parte dell'enunciato è una conseguenza immediata dei teoremi 3 e 5. Osserviamo che l'esempio (5) mostra che - in generale - se $f_n \to f$ in norma, non si ha $f_n \to f$ q.o.. Inoltre la (4) fornisce un esempio di successione convergente q.o. (in effetti tende a 0 per ogni $x \in (0, 1]$) per la quale, come abbiamo già visto, non esiste alcuna sottosuccessione convergente a 0 in norma. $\square$

Caso 2. $\mu(X) = +\infty$**.**

In questo secondo caso si ha la situazione seguente

$$\begin{tikzcd}
\text{conv. uniforme} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{conv. q.o.} \\
\text{conv. in norma} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \text{conv. in misura} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

Per quanto riguarda le "frecce" presenti in entrambi i diagrammi, basta osservare che nelle dimostrazioni degli enunciati 1, 3, 5 e 6 non abbiamo mai usato il fatto che lo spazio fosse di misura finita e quindi questi risultati sussistono in spazi di misura qualsiasi. I controesempi che avevamo trovato sono validi anche nel caso $\mu(X) = +\infty$ (basta, infatti, prolungare a zero fuori dell'intervallo $[0, 1]$ le varie funzioni considerate e immaginarle definite su tutto $\mathbb{R}$).

L'implicazione "convergenza uniforme" implica "convergenza in misura" (che nel caso $\mu X < +\infty$ era conseguenza delle implicazioni 2 e 3) è fornita dal seguente teorema

7. *Se $f_n \to f$ uniformemente, allora $f_n \to f$ in misura. In generale, se $f_n \to f$ in misura, non esiste alcuna sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converga uniformemente a f.*

Dim. Dire che $f_n \to f$ uniformemente significa che sussiste la (1). Avremo quindi che, per $n > n_\varepsilon$ risulta

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = \emptyset\,.$$

Da qui segue

$$\mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0$$

per ogni $n > n_\varepsilon$ e quindi sussiste la (2).

L'esempio considerato nel teorema 2 fornisce una successione che converge in misura (in quanto convergente in norma), ma per la quale non esiste alcuna sottosuccessione che converga uniformemente. □

Per completare lo schema, rimane soltanto da mostrare che, se $\mu(X) = \infty$, la convergenza uniforme non implica quella in norma e che la convergenza q.o. non implica quella in misura.

Si consideri, infatti, su $\mathbb{R}$, la successione

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\ \chi_{[0,n]}(x)$$

($\mu =$ misura di Lebesgue). Risulta

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n}$$

e quindi $f_n \to 0$ uniformemente in $\mathbb{R}$, laddove, essendo

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n dx = 1 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

la successione $\{f_n\}$, così come una qualsiasi sua sottosuccessione, non tende a 0 in norma.

Si consideri ora, sempre in $\mathbb{R}$, la successione

$$f_n(x) = \chi_{(n,+\infty)}(x)$$

($\mu =$ misura di Lebesgue). Risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

mentre, se $0 < \varepsilon < 1$, si ha

$$m\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| \geqslant \varepsilon\} = m(n,+\infty) = +\infty \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Questo dimostra che $f_n \to 0$ q.o. (anzi dappertutto !) ma la successione $\{f_n\}$, così come una qualsiasi sua sottosuccessione, non tende a 0 in misura.

APPENDICE

8 (Lemma di Borel-Cantelli)**.** *Sia* $(X, \mathscr{B}, \mu)$ *uno spazio di misura. Se gli insiemi misurabilie* E_k *sono tali che*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k < \infty \tag{7}$$

il "limsup" degli E_k *ha misura nulla, ossia*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = 0\,.$$

Essendo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \ \subset \ \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

per la monotonia e la subadditività della misura, abbiamo

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu E_k \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Poiché la serie (7) è convergente, fissato un $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere un n_ε tale che

$$\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} \mu E_k < \varepsilon$$

da cui segue

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) < \varepsilon\ .$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi.