Sulla continuità della funzione inversa

1 *Sia $X \subset \mathbb{R}$ un compatto. Supponiamo che la funzione $f \in C^0(X)$ sia invertibile. Allora la funzione $f^{-1} : f(X) \to X$ è continua.*

Dim. Dobbiamo far vedere che, qualunque sia $y_0 \in f(X)$, abbiamo

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \ : \forall\, y \in f(X), |y - y_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

Procediamo per assurdo. Supponiamo che questo non sia vero, ossia che esista un $y_0 \in f(X)$ per il quale

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \delta > 0 \ : \exists\, y_\delta \in f(X), |y_\delta - y_0| < \delta,\ |f^{-1}(y_\delta) - f^{-1}(y_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Prendendo $\delta = 1/n$ abbiamo che, fissato questo particolare $\varepsilon > 0$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ : \exists\, y_n \in f(X), |y_n - y_0| < \frac{1}{n},\ |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Osserviamo che, essendo $|y_n - y_0| < 1/n$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0\,. \tag{2}$$

Sia

$$x_n = f^{-1}(y_n). \tag{3}$$

La successione $\{x_n\}$ risulta contenuta in X e quindi, essendo X compatto, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \tag{4}$$

dove x_0 appartiene a X. Per la continuità della funzione f (si ricordi il teorema "ponte"!) abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

D'altra parte, la (3) ci dice che $f(x_n) = y_n$ e l'ultima relazione di limite può scriversi come

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = f(x_0).$$

Ma essendo $\{y_{n_k}\}$ una sottosuccessione della successione $\{y_n\}$ convergente a y_0 (cfr. (2)), dobbiamo avere $f(x_0) = y_0$, ossia $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Possiamo quindi riscrivere l'ultima condizione nella (1) come $|x_n - x_0| \geqslant \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare dobbiamo avere $|x_{n_k} - x_0| \geqslant \varepsilon$ (per ogni $k \in \mathbb{N}$). Ricordando la (4) e passando al limite per $k \to \infty$, troviamo $0 \geqslant \varepsilon$.

Siamo arrivati a un assurdo e quindi la (1) non può sussistere. Questo significa che non esistono punti $y_0 \in f(X)$ in cui la funzione f^{-1} non è continua, e la tesi è dimostrata. $\square$