La continuità di alcune funzioni elementari

Ricordiamo che scrivendo $f \in C^0(X)$ intendiamo che la funzione f è definita e continua nell'insieme X.

1. I polinomi appartengono a $C^0(\mathbb{R})$.

E' ovvio dalla definizione che la funzione costante è continua. Anche la funzione $f(x) = x$ lo è. Infatti, la continuità di una funzione f nel punto x_0 significa che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta_\varepsilon \;\;|\;\; |x - x_0| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,. \tag{1}$$

E' evidente che, nel caso particolare $f(x) = x$, è sufficiente prendere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ e la (1) risulta soddisfatta in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dalla continuità della funzione x segue anche quella di x^2, in quanto prodotto di funzioni continue. Procedendo induttivamente si trova che tutti i monomi x^n ($n \in \mathbb{N}$) risultano continui su tutto $\mathbb{R}$.

Consideriamo ora un polinomio:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n\,;$$

p risulta essere una combinazione lineare finita di funzioni continue e questo implica la sua continuità. Abbiamo quindi $p \in C^0(\mathbb{R})$.

2. Le funzioni razionali sono continue nel loro insieme di definizione.

Una funzione razionale è, per definizione, un quoziente di due polinomi:

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Sappiamo che il quoziente di due funzioni continue risulta continua purché il denominatore sia diverso da zero. Detto quindi $N = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$, abbiamo che $R \in C^0(\mathbb{R} \setminus N)$.

3. Continuità delle funzioni trigonometriche.

Dimostriamo che la funzione $\sin x$ risulta continua su tutto $\mathbb{R}$. Fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, dobbiamo far vedere che sussiste la (1).

Per le formule di prostaferesi [(1)], abbiamo

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2\,\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right|\,.$$

[(1)] Dalle formule di addizione e sottrazione degli archi

$$\sin(p \pm q) = \sin p \cos q \pm \cos p \sin q$$

Essendo

$$|\sin t| \leqslant |t| \qquad |\cos t| \leqslant 1$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, deduciamo

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|\,.$$

E' allora evidente che, fissato $\varepsilon > 0$, la (1) sussiste prendendo $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Resta così provato che $\sin x \in C^0(\mathbb{R})$.

Analogamente, dalla formula di prostaferesi per la differenza di coseni, si trae

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| -2\,\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leqslant |x - x_0|$$

e dunque $\cos x \in C^0(\mathbb{R})$.

Per quanto riguarda la tangente, essendo

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,,$$

la tangente risulta continua su tutto $\mathbb{R}$ privato degli zeri del denominatore, ossia $\tan x \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\})$.

---

segue

$$\sin(p+q) - \sin(p-q) = 2\,\cos p \sin q\,.$$

Ponendo poi $x = p+q$, $y = p-q$, ossia $p = (x+y)/2$, $q = (x-y)/2$, si ottiene la formula di prostaferesi per la differenza di seni:

$$\sin x - \sin y = 2\,\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Con un procedimento analogo, dalle formule

$$\cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q$$

si deduce la formula di prostaferesi per la differenza di coseni

$$\cos x - \cos y = -2\,\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

4. La funzione a^x $(a > 0)$ risulta continua su tutto $\mathbb{R}$.

Consideriamo dapprima il caso $a = e$. Fissiamo un qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}$ e consideriamo la disuguaglianza

$$|e^x - e^{x_0}| < \varepsilon \tag{2}$$

Evidentemente questa è equivalente a

$$-\varepsilon < e^x - e^{x_0} < \varepsilon$$

ossia

$$e^{x_0} - \varepsilon < e^x < e^{x_0} + \varepsilon\,. \tag{3}$$

Essendo la funzione $\log x$ crescente, la (3) è a sua volta equivalente a

$$\log(e^{x_0} - \varepsilon) < x < \log(e^{x_0} + \varepsilon) \tag{4}$$

Osserviamo che, sempre per la crescenza di $\log x$, risulta

$$\log(e^{x_0} - \varepsilon) < \log(e^{x_0}) = x_0 < \log(e^{x_0} + \varepsilon).$$

La (4) mostra quindi che esiste un intorno di x_0 in cui sussiste la (3) (ossia la (2)) e la continuità di e^x in x_0 è dimostrata [(2)]

Se $0 < a$, potendo scrivere

$$a^x = e^{x \log a},$$

[(2)] Si noti che nella definizione (1) l'intorno di x_0 in cui si richiede che valga $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ è preso simmetrico rispetto a x_0: $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$. E' evidente che dall'esistenza dell'intorno (non simmetrico!) (4) segue facilmente l'esistenza del predetto intorno simmetrico. Basta prendere

$$\delta_\varepsilon = \min\{x_0 - \log(e^{x_0} - \varepsilon), \log(e^{x_0} + \varepsilon) - x_0\}.$$

Infatti, osservando che $\delta_\varepsilon > 0$ ed essendo

$$x_0 + \delta_\varepsilon \leqslant \log(e^{x_0} + \varepsilon), \qquad \log(e^{x_0} - \varepsilon) \leqslant x_0 - \delta_\varepsilon,$$

abbiamo che la (4) è certamente soddisfatta se

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon.$$

la funzione a^x risulta continua, in quanto funzione composta $f \circ g$, con $f(t) = e^t$, $g(x) = x \log a$.

5. Le funzioni seno iperbolico, coseno iperbolico e tangente iperbolica sono continue su tutto $\mathbb{R}$.

Osserviamo che la funzione $e^{-x} = (1/e)^x$ risulta continua su $\mathbb{R}$. Essendo

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

abbiamo che il seno iperbolico e il coseno iperbolico sono continue, in quanto combinazione lineari finite di funzioni continue.

Per quanto attiene la tangente iperbolica, basta ricordare che

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

e che il coseno iperbolico non si annulla mai.

6. La funzione $\log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ risulta continua su $\mathbb{R}_+$.

Consideriamo dapprima il caso $a = e$. Fissiamo un qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}_+$ e consideriamo la disuguaglianza

$$|\log x - \log x_0| < \varepsilon \tag{5}$$

Questa equivale a

$$-\varepsilon < \log x - \log x_0 < \varepsilon$$

ossia

$$-\varepsilon + \log x_0 < \log x < \varepsilon + \log x_0 \,.$$

Essendo la funzione e^x crescente, abbiamo che le ultime disuguaglianze scritte equivalgono a

$$e^{-\varepsilon + \log x_0} < x < e^{\varepsilon + \log x_0}$$

ossia

$$x_0 \, e^{-\varepsilon} < x < x_0 \, e^{\varepsilon} \,.$$

Essendo

$$x_0 \, e^{-\varepsilon} < x_0 < x_0 \, e^{\varepsilon}$$

possiamo concludere che esiste un intorno di x_0 in cui sussiste la (5) e la continuità è dimostrata (cfr. nota [(2)]).

Per quanto riguarda un qualsiasi $a > 0$, $a \neq 1$, possiamo scrivere [3]

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \tag{6}$$

e la continuità segue subito da quanto dimostrato per il $\log x$.

7. La continuità della funzione x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Volendo considerare un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$, considereremo la funzione definita solo per $x > 0$. Potendo scrivere

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x}$$

il risultato segue dalla continuità della funzione composta $f \circ g$, dove $f(t) = e^t$, $g(x) = \alpha \log x$.

[3] Infatti, la (6) equivale a

$$\log x = \log a \log_a x$$

e questa è vera, perché

$$e^{\log a \log_a x} = \left(e^{\log a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x.$$