## Alcuni complementi sulle successioni

**1 (Teorema del confronto)** *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni regolari tali che si abbia*

$$a_n \leqslant b_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

*Allora:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{2}$$

DIM.
Sia $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ ed $L' = \lim_{n\to\infty} b_n$.
Se $L = -\infty$ non c'è niente da dimostrare.
Supponiamo $L = +\infty$. Dato comunque un $k > 0$, esiste un $\nu_k$ tale che

$$\forall\, n > \nu_k \quad \Rightarrow \quad a_n > k,$$

e quindi, per la (1)

$$\forall\, n > \nu_k \quad \Rightarrow \quad b_n > k,$$

ossia $L' = +\infty$.
Supponiamo ora

$$-\infty < L < +\infty. \tag{3}$$

Se $L' = +\infty$ allora la (2) è ovvia.
D'altra parte non può essere $L' = -\infty$. Infatti, se così fosse, dato che, per la (1), $-b_n \leqslant -a_n$ e che $\lim_{n\to\infty} -b_n = +\infty$, per quanto già dimostrato dovrebbe essere $\lim_{n\to\infty} -a_n = +\infty$, ossia $L = -\infty$. E ciò è assurdo (per la (3)).
Sia quindi $-\infty < L' < +\infty$. Dobbiamo dimostrare che $L \leqslant L'$.
Dato un $\varepsilon > 0$, esistono due interi $\nu_\varepsilon$, $\overline{\nu}_\varepsilon$ tali che:

$$\begin{aligned} \forall\, n > \nu_\varepsilon \quad &\Rightarrow \quad L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \\ \forall\, n > \overline{\nu}\varepsilon \quad &\Rightarrow \quad L' - \varepsilon < b_n < L' + \varepsilon. \end{aligned}$$

Allora, per ogni $n > max\{\nu_\varepsilon, \overline{\nu}_\varepsilon\}$, si ha

$$L - \varepsilon < a_n \leqslant b_n < L' + \varepsilon,$$

ossia: $L < L' + 2\varepsilon$. Per l'arbitrariet di $\varepsilon$ segue $L \leqslant L'$.
Il teorema è così completamente dimostrato. □

**Osservazione 1** Se $\{a_n\}$ è una successione divergente positivamente e $\{b_n\}$ è una successione tale che vale la (1), allora necessariamente la $\{b_n\}$ è regolare e diverge anch'essa. Ciò è evidente dalla dimostrazione stessa del teorema.

**Osservazione 2** Se la (1) è sostituita dalla condizione

$$a_n < b_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

non è vero, in generale, che

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Basta considerare l'esempio $a_n = 0$, $b_n = 1/n$.

**Osservazione 3** Il teorema 1 è ancora vero se la (1) sussiste solo definitivamente.

**2 (Teorema della permanenza del segno)** *Sia $\{a_n\}$ una successione regolare tale che $lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ $(a < 0)$. Allora si ha definitivamente $a_n > 0$ $(a_n < 0)$.*

DIM. Sia $0 < a < +\infty$ e sia $\varepsilon$ tale che $a - \varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste un $\nu_\varepsilon$ tale che

$$n > \nu_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

da cui la tesi. Lasciamo al lettore la verifica nel caso $a = +\infty$. In modo analogo si ragiona se $a < 0$. □

**3** *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che*

$$a_n \to +\infty, \qquad b_n \geqslant m,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

*essendo $m$ una costante reale. Allora: $a_n + b_n \to +\infty$.*

DIM. Per ipotesi, si ha: $a_n + b_n \geqslant a_n + m$. Poiché si constata immediatamente che la successione $\{a_n + m\}$ diverge positivamente, la tesi segue dal Teorema 1 e dall'Osservazione 1. □

In modo perfettamente analogo si prova:

**4** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni tali che*

$$a_n \to -\infty, \qquad b_n \leqslant m, \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$

*essendo* $m$ *una costante reale. Allora:* $a_n + b_n \to -\infty$.

Come applicazione di questi lemmi si possono studiare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 + (-1)^n)\,; \qquad \lim_{n\to\infty} (-(n)^n + \operatorname{sen} n).$$

Tenendo presente che le successioni convergenti sono limitate, che le successioni divergenti positivamente sono limitate inferiormente e che quelle divergenti negativamente sono limitate superiormente, si ottengono le seguenti regole

$$+\infty + \infty = +\infty; \ +\infty + L = +\infty; \ -\infty - \infty = -\infty; \ -\infty + L = -\infty \,^{(1)}.$$

Non abbiamo considerato il caso $+\infty - \infty$, ossia il caso di una successione del tipo $\{a_n + b_n\}$, dove $\{a_n\}$ diverge positivamente e $\{b_n\}$ diverge negativamente. In effetti, in generale, non si può dire nulla, nel senso che la successione $\{a_n + b_n\}$ può convergere, divergere o essere indeterminata. Quando si presenta una situazione di questo tipo, si dice che abbiamo una *forma indeterminata*. A tale proposito si studino le successioni seguenti:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n); \quad \lim_{n\to\infty} [(n+1)^2 - (n^a + 2n)]; \quad \lim_{n\to\infty} \{[n + (-1)^n] - n^a\}$$

$(a > 0)$.

**5** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni tali che*

$$|a_n| \to +\infty, \quad |b_n| \geqslant m > 0 \ \text{ definitivamente.}$$

*Allora:* $|a_n b_n| \to +\infty$. *Se inoltre* $\{a_n b_n\}$ *risulta definitivamente positiva (negativa), allora* $a_n b_n \to +\infty$ ($a_n b_n \to -\infty$).

Dim. Per ipotesi si ha: $|a_n b_n| \geqslant |a_n|\, m$ definitivamente. Essendo $m > 0$, si ha che $\{|a_n|\, m\}$ diverge positivamente. Dal Teorema 1 e dalle Osservazioni 1 e 3 segue che $|a_n b_n| \to +\infty$. Il resto della tesi è ovvio. □

(1) Scrivendo $+\infty + L = +\infty$ intendiamo questo: se $a_n \to +\infty$, $b_n \to L$, allora $a_n + b_n \to +\infty$. Analogo significato hanno le altre relazioni.

Dai Teoremi 5 e 2 seguono le seguenti regole:

$$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty;\quad (-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty;$$
$$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty;\ (+\infty)\cdot L\begin{cases} =+\infty & \text{se } L>0,\\ =-\infty & \text{se } L<0\end{cases}$$

Anche per il prodotto si può presentare una forma indeterminata: $(+\infty)\cdot 0$. A tale proposito proponiamo di studiare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\frac{(-1)^n}{n};\qquad \lim_{n\to\infty} n^a(\sqrt{n^2+1}-n)$$

$(a>0)$.

Per lo studio delle successioni prodotto può essere di qualche utilità anche il seguente lemma:

**6** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni tali che*

$$a_n\to 0,\qquad |b_n|\leqslant m,\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

*Allora* $a_nb_n\to 0$.

Dim. Poiché: $0\leqslant|a_nb_n|\leqslant m\,|a_n|$, per il "Teorema dei Carabinieri" si ha che $|a_nb_n|\to 0$, ossia che $a_nb_n\to 0$. □

Utilizzando questo lemma si trova subito che i seguenti limiti sono tutti nulli:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n};\quad \lim_{n\to\infty}(\operatorname{sen} n)\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right);\quad \lim_{n\to\infty} e^{-n^2}\tanh n\,.$$

Dal lemma 6 si trae il seguente, relativo alle successioni quoziente

**7** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni tali che*

$$a_n\to 0,\qquad |b_n|\geqslant m,\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

*Allora si ha*

$$\frac{a_n}{b_n}\to 0.$$

**8** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni tali che*

$$a_n \to +\infty, \qquad 0 < |b_n| \leqslant m, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

*Allora si ha*

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty.$$

Dim. Basta applicare il lemma 7 alle successioni $\{1/a_n\}$ (si osservi che risulta $a_n > 0$ definitivamente) e $\{1/b_n\}$. □

Questi ultimi due lemmi dimostrano le seguenti regole: se $-\infty < L < +\infty$ si ha

$$\left|\frac{\pm\infty}{L}\right| = +\infty, \quad \frac{L}{\pm\infty} = 0,$$

mentre, se $-\infty \leqslant L < 0$ oppure $0 < L \leqslant +\infty$,

$$\frac{0}{L} = 0, \quad \left|\frac{L}{0}\right| = +\infty.$$

Per questo tipo di successione si presentano le seguenti forme indeterminate: $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$. Proponiamo di studiare i limiti delle seguenti successioni al variare dei parametri reali che vi compaiono:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}-n}\,; \qquad \frac{an+b}{cn+d}\,; \qquad \frac{(n+1)^a}{n[2+(-1)^n]}\,.$$

**9** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni* *convergenti* *e siano* $a$ *e* $b$ *i rispettivi limiti. Supponiamo inoltre che* $a_n > 0$, $\forall\, n$. *Se* $a > 0$ *oppure se* $a = 0$ *e* $b > 0$, *si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

Dim. Per ottenere la tesi basta osservare che

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}. \tag{4}$$

□

Dalla formula (4) seguono anche le seguenti regole (da interpretare sempre nel senso della nota [(1)]):

$$L^{+\infty} \begin{cases} = +\infty & \text{se } 1 < L \leqslant +\infty \\ = 0 & \text{se } 0 \leqslant L < 1 \end{cases} \quad ; \qquad L^{-\infty} \begin{cases} = 0 & \text{se } 1 < L \leqslant +\infty, \\ = +\infty & \text{se } 0 \leqslant L < 1 \end{cases} \quad .$$

Le forme indeterminate relative a questo tipo di successione sono le seguenti: $1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$. Ad esempio, la successione il cui limite è il numero di Nepero $e$:

$$\left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

è una forma indeterminata del tipo $1^\infty$. Proponiamo di studiare anche i due limiti seguenti:

$$\lim_{n\to\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} ; \qquad \lim_{n\to\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n} .$$