Completamento di una misura.

Dato $(X, \mathscr{B}, \mu)$ esiste una σ-algebra $\mathscr{B}_0$ e una misura μ_0 tali che:
- $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}_0$;
- $\mu_0(D) = \mu(D), \ \forall \ D \in \mathscr{B}$ (ossia μ_0 è un'estensione di μ);
- μ_0 è completa.

Definiamo $\mathscr{B}_0$ al modo seguente:

$$\mathscr{B}_0 = \{D \subset X \mid D = A \cup B, \ A \in \mathscr{B}, \ \exists \ C \in \mathscr{B} \ : \ B \subset C, \ \mu C = 0\}.$$

È ovvio che $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}_0$ (ogni $A \subset \mathscr{B}$ si può scrivere come $A = A \cup \emptyset$). Dimostriamo che $\mathscr{B}_0$ risulta una σ-algebra:

i) $\emptyset, \ X \ \in \mathscr{B}_0$.

Ovvio: $\emptyset, \ X \in \mathscr{B}$ e $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}_0$.

ii) $D \in \mathscr{B}_0 \Rightarrow \widetilde{D} \in \mathscr{B}_0$.

Per ipotesi abbiamo:

$$D = A \cup B, \ A \in \mathscr{B}, \ B \subset C \in \mathscr{B}, \mu C = 0. \tag{1}$$

Ciò implica che $\tilde{C} \subset \tilde{B}$ e quindi: $\tilde{B} = \tilde{C} \cup (\tilde{B} - \tilde{C}) = \tilde{C} \cup (\tilde{B} \cap C)$. Da ciò segue che: $\widetilde{D} = \tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{A} \cap [\tilde{C} \cup (\tilde{B} \cap C)] = (\tilde{A} \cap \tilde{C}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap C)$ ed essendo $(\tilde{A} \cap \tilde{C}) \in B, (\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap C) \subset C \in \mathscr{B}, \mu C = 0$, si ha che $\widetilde{D} \in \mathscr{B}_0$.

iii) $D_j \in \mathscr{B}_0 \Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathscr{B}_0$.

Per ipotesi:

$$D_j = A_j \cup B_j, A_j \in B, B_j \subset C_j \in B, \ \mu C_j = 0. \tag{2}$$

Risulta: $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j = \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j\right) \in \mathscr{B}_0$, perché $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) \in \mathscr{B}$ ($\mathscr{B}$ è una σ-algebra!), $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j \in \mathscr{B}$ e $\mu \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j\right) = 0$.

Definiamo ora μ_0 come $\mu_0 D = \mu A$, essenda A dato da (1).

Mostriamo prima di tutto che la definizione è ben posta, ossia che se $A \cup B = A' \cup B'$ ($A' \in B, B' \subset C' \in \mathscr{B}, \ \mu C' = 0$) allora $\mu A = \mu A'$. Infatti, essendo $A \subset (A' \cup B') \subset (A' \cup C')$, segue che $\mu A \leq \mu A' + \mu C' = \mu A'$; analogamente si dimostra che $\mu A' \leq \mu A$. Verifichiamo ora che μ_0 è una misura: è evidentemente nonnegativa; inoltre se $D_j \in \mathscr{B}_0$ sussistendo la (2) ed inoltre $D_i \cap D_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ risulta (N.B. $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$):

$$\mu_0(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j) = \mu_0\left((\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)\cup(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j)\right) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0 D_j.$$

La misura μ_0 è un'estensione di μ, perché se $D \in \mathscr{B}$, essendo $D = D \cup \emptyset$, si ha $\mu_0 D = \mu D$. Infine osserviamo che μ_0 è completa: sia $F \subset D$, con $D \in \mathscr{B}_0$ e $\mu_0 D = 0$; si ha $\mu_0 D = \mu A = 0$, essendo A dato da (1). Allora risulta $F \subset D \subset (A \cup C)$, con $(A \cup C) \in B$, $\mu(A \cup C) = 0$. Quindi, essendo evidentemente $F = \emptyset \cup F$, si ha $F \in \mathscr{B}_0$.