

Combinazioni con ripetizione

1. Le combinazioni con ripetizione di classe k di n elementi sono

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Proof. Osserviamo preliminarmente che una combinazione di classe k di p elementi senza ripetizione può pensarsi come una k -pla di numeri interi (j_1, \dots, j_k) tale che $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq p$, e, viceversa, ogni k -pla di questo tipo determina una combinazione di classe k di p elementi senza ripetizioni. In altre parole, possiamo identificare questo tipo di combinazioni con dette k -ple.

In modo analogo una combinazione di classe k di n elementi con ripetizione si può identificare con una k -pla di numeri interi (i_1, \dots, i_k) tale che:

$$(1) \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$$

Associamo ad ogni k -pla (i_1, \dots, i_k) soddisfacente la (1) un'altra k -pla (j_1, \dots, j_k) definita nel modo seguente:

$$(2) \quad j_1 = i_1, j_2 = i_2 + 1, \dots, j_k = i_k + k - 1$$

Risulta evidentemente: $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n + k - 1$. Abbiamo in questo modo associato ad ogni combinazione di classe k di n elementi con ripetizione una combinazione di classe k di $(n + k - 1)$ elementi **senza ripetizione**. Tale corrispondenza è biunivoca (basta osservare che la (2) è invertibile) e, poiché le combinazioni di classe k di $(n + k - 1)$ elementi senza ripetizione sono date da $\binom{n+k-1}{k}$, si ha la tesi. □