Dimostriamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}\,. \tag{1}$$

Calcoliamoci dapprima

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy\,.$$

Essendo la funzione integranda continua e non negativa, questo integrale si può calcolare come limite

$$\lim_{R\to+\infty} \iint_{A_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$$

dove $\{A_R\}$ è una famiglia di domini limitati misurabili che "invade" $\mathbb{R}^2$.

Prendendo $A_R = D_R(0)$ ed usando le coordinate polari, troviamo

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy &= \lim_{R\to+\infty} \iint_{D_R(0)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R e^{-\varrho^2} \varrho\, d\varrho = \lim_{R\to+\infty} 2\pi \frac{e^{-\varrho^2}}{-2}\Bigg|_0^R \\ &= \lim_{R\to+\infty} \pi\left(1 - e^{-R^2}\right) = \pi\,.\end{aligned} \tag{2}$$

D'altra parte, prendendo $A_R = Q_R$, dove Q_R è il quadrato $[-R,R]\times[-R,R]$, abbiamo

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy &= \lim_{R\to+\infty} \iint_{Q_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \\ = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \int_{-R}^R e^{-y^2} dy &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2.\end{aligned} \tag{3}$$

Confrontando (2) e (3) si trae

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi\,,$$

ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,.$$

La (1) si ottiene ora mediante il cambio di variabile $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi}\,.$$