Il lemma di Borel-Cantelli.

1. *Sia* $(X, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità. Se gli eventi* $E_k \in \mathscr{A}$ *sono tali che*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_k) < \infty \tag{1}$$

allora il "limsup" degli E_k *ha probabilità nulla, ossia*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = 0\,.$$

Dim. Essendo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

per la monotonia e la subadditività della probabilità, abbiamo

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(E_k) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Poiché la serie (1) è convergente, fissato un $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere un n_ε tale che

$$\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} \mathbb{P}(E_k) < \varepsilon$$

da cui segue

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) < \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi. □

Il lemma di Borel-Cantelli può essere interpretato nel seguente modo: supponiamo che E_k sia un evento che accade all'istante k con probabilità $\mathbb{P}(E_k)$. Il lemma di Borel-Cantelli mostra che, se la somma delle probabilità degli eventi E_k è finita, allora la probabilità che si verifichino infiniti eventi E_k è nulla. Per riconoscere ciò basta osservare che l'insieme

$$\limsup_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

rappresenta la situazione in cui, per ogni istante n, esiste un istante successivo $k \geqslant n$, in cui si verifica E_k. E' chiaro che questo accade se e solo se l'evento E_k si verifica per infiniti "istanti" k. Questo è il motivo per cui, a volte, il $\limsup_{k\to\infty} E_k$ viene indicato con

$$[E_k \text{ i.o.}]\,,$$

dove “i.o." sta per “infinitely often”, ossia infinitamente spesso. Con questa notazione, il lemma di Borel-Cantelli può enunciarsi scrivendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_k) < \infty \implies \mathbb{P}([E_k \text{ i.o.}]) = 0.$$