Il teorema di Ascoli-Arzelà

Il teorema di Ascoli-Arzelà caratterizza gli insiemi precompatti (e quindi i compatti) dello spazio $C(X)$, essendo X uno spazio metrico compatto.

Premettiamo un paio di lemmi.

1 *Sia (X,d) uno spazio metrico compatto. Se f è continua su X, allora essa è uniformemente continua.*

Dim. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella che si fa nel caso $X = \mathbb{R}^n$. Si tratta, infatti, di far vedere che, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, presi comunque $x, y \in X$ tali che $d(x,y) < \delta_\varepsilon$, allora risulta $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Supponiamo che ciò non sia vero. Esiste, allora, un $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono due punti $x_n, y_n \in X$ tali che $d(x_n, y_n) < 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$. Essendo X compatto, dalla successione $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $x_{n_k} \to x_0$. Anche la sottosuccessione y_{n_k} convergerà a x_0, dato che

$$d(y_{n_k}, x_0) \leqslant d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x_0).$$

Per la continuità della f si avrà

$$0 < \varepsilon_0 \leqslant \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

e questo è assurdo. □

2 *Uno spazio metrico compatto (X,d) risulta separabile.*

Dim. Essendo X compatto, risulterà iperlimitato. Di conseguenza, dato un $n \in \mathbb{N}$, esistono m_n punti $x_j^{(n)} \in X$ $(j = 1, \dots, m_n)$ tali che

$$X = \bigcup_{j=1}^{m_n} B\left(x_j^{(n)}, \frac{1}{n}\right).$$

L'insieme

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_n} \{x_j^{(n)}\}$$

risulta numerabile (ovvio) e denso (come si verifica facilmente). □

3 (Ascoli-Arzelà) *Siano X uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni di $C(X)$. La famiglia $\mathcal{F}$ è precompatta se e solo se essa risulta equilimitata ed equicontinua.*

DIM. Ricordiamo che dire che la famiglia $\mathcal{F}$ è equilimitata ed equicontinua significa, rispettivamente, che esiste una costante M tale che

$$|f(x)| \leqslant M \qquad \forall\, f \in \mathcal{F},\ \forall\, x \in X, \tag{1}$$

e che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta_\varepsilon$, risulta

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}. \tag{2}$$

Necessità. Essendo precompatta, $\mathcal{F}$ risulta iperlimitata e quindi limitata.

Inoltre, dato un $\varepsilon > 0$, dovranno esistere p funzioni $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{F}$ tali che

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(f_j, \varepsilon).$$

Questo significa che, presa comunque una $f \in \mathcal{F}$, esiste un j ($1 \leqslant j \leqslant p$) tale che

$$\|f - f_j\| < \varepsilon. \tag{3}$$

Inoltre, essendo le f_j uniformemente continue (vedi Lemma 1), esiste un $\delta_\varepsilon^{(j)} > 0$ tale che per $x, y \in K$ con $d(x, y) < \delta_\varepsilon^{(j)}$, risulta

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon\,. \tag{4}$$

Sia

$$\delta_\varepsilon = \min_{j=1,\ldots,p} \delta_\varepsilon^{(j)}$$

(si noti che risulta $\delta_\varepsilon > 0$) e siano $x, y \in K$ tali che $d(x, y) < \delta_\varepsilon$. Presa comunque una $f \in \mathcal{F}$ e scelto j in modo che valga la (3), abbiamo

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

in virtù della (4), e anche la equicontinuità di $\mathcal{F}$ è dimostrata.

Sufficienza. Essendo compatto, X è separabile (Lemma 2). Esiste dunque una successione di punti $\{y_j\}$ densa in X.

In virtù della (1), la successione $\{f_n(y_1)\}$ è limitata e quindi esiste una sottosuccessione di $\{f_n\}$, che indichiamo con $\{f_n^{(1)}\}$, tale che esiste finito il limite seguente

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(y_1).$$

Sempre per la (1), la successione $\{f_n^{(1)}(y_2)\}$ è limitata e possiamo estrarre da $\{f_n^{(1)}\}$ una sottosuccessione $\{f_n^{(2)}\}$ in modo che esista finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(y_2).$$

Procedendo induttivamente, otteniamo una successione $\{f_n^{(k)}\}$ estratta dalla $\{f_n^{(k-1)}\}$, per la quale esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(y_k). \tag{5}$$

Consideriamo ora la *successione diagonale* $\{f_n^{(n)}\}$. Un'occhiata al diagramma

$$\begin{array}{cccccc} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & . & . & . \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & . & . & . \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{array}$$

mostra che l'indice relativo al termine $f_k^{(k)}$ è strettamente maggiore di quello relativo al termine $f_{k-1}^{(k-1)}$. Quindi $\{f_n^{(n)}\}$ risulta una sottosuccessione di $\{f_n\}$.

Essendo $\{f_n^{(n)}(y_j)\}_{n\geqslant j}$ una sottosuccessione di $\{f_n^{(j)}(y_j)\}_{n\in\mathbb{N}}$, dall'esistenza di (5) segue quella del

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(n)}(y_j),$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Per semplificare la notazione, poniamo $f_{n_k} = f_k^{(k)}$. Mostriamo che, per ogni $\in X$, esiste finito il limite

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

e che tale limite è uniforme.

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e sia δ_ε il numero positivo per il quale $d(x,y) < \delta_\varepsilon$ implica la (2) per ogni $f \in \mathcal{F}$. Essendo $\{y_j\}$ densa in X, possiamo scrivere

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(y_j, \delta_\varepsilon).$$

Per la compattezza di X esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, \delta_\varepsilon).$$

Fissato un $x \in X$, esiste un j tale che $d(x, y_j) < \delta_\varepsilon$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Tenendo presente la (2), si ha

$$\begin{gathered} |f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_k}(x)| \leqslant \\ |f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_{k+p}}(y_j)| + |f_{n_{k+p}}(y_j) - f_{n_k}(y_j)| + |f_{n_k}(y_j) - f_{n_k}(x)| < \\ 2\varepsilon + |f_{n_{k+p}}(y_j) - f_{n_k}(y_j)|. \end{gathered}$$

Essendo la successione $\{f_{n_k}(y_j)\}$ convergente, esisterà un $n_\varepsilon^{(j)}$ tale che

$$|f_{n_{k+p}}(y_j) - f_{n_k}(y_j)| < \varepsilon$$

non appena $n_k > n_\varepsilon^{(j)}$, qualunque sia $p \in \mathbb{N}$. Posto

$$n_\varepsilon = \max_{j=1,\dots m} n_\varepsilon^{(j)}$$

avremo

$$|f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_k}(x)| < 3\varepsilon$$

non appena $n_k > n_\varepsilon$.

Questo dimostra che la successione $\{f_{n_k}\}$ soddisfa una condizione di Cauchy uniforme. Per teoremi ben noti, essa converge uniformemente verso una $f \in C(X)$. □

Come semplice applicazione del teorema di Ascoli-Arzelà, verifichiamo che $C^1([a,b])$ è immerso compattamente in $C^0([a,b])$. Si tratta di far vedere che l'operatore di immersione $i : C^1([a,b]) \to C^0([a,b])$ che associa a una funzione $f \in C^1([a,b])$ la stessa funzione, pensata come elemento di $C^0([a,b])$, è compatta.

In altri termini, si tratta di far vedere che se una famiglia di funzioni $\mathcal{F} \subset C^1([a,b])$ è limitata (nella norma C^1), essa è precompatta in $C^0([a,b])$.

Supponiamo, quindi, che per la famiglia $\mathcal{F}$ esista una costante M tale che

$$\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leqslant M, \qquad \forall\ f \in \mathcal{F}.$$

Per ogni $f \in \mathcal{F}$ risulta

$$\|f\| \leqslant M, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \|f'\| \, |x-y| \leqslant M \, |x-y|$$

e quindi la famiglia $\mathcal{F}$ è limitata (nella norma di C^0) ed equicontinua. Per il teorema di Ascoli-Arzelà essa è precompatta in $C^0([a,b])$.

Il teorema di Schauder

.

Il teorema di Ascoli-Arzelà permette una rapida dimostrazione del teorema di Schauder.

4 (Schauder) *Siano X e Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare e compatto. L'operatore $T^\star : Y^\star \to X^\star$ risulta compatto.*

Dim. Sia $\{\varphi_n\}$ una successione limitata di operatori lineari e continui su Y, ossia sia $\{\varphi_n\}$ una successione in $Y^\star$ tale che esiste una costante M per cui

$$\|\varphi_n\| \leqslant M. \tag{6}$$

Dobbiamo far vedere che esiste una sottosuccessione $\{\varphi_{n_k}\}$ tale che $T^\star \varphi_{n_k}$ è di Cauchy in $X^\star$.

Sia $B = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$; essendo T compatto, $\overline{T(B)}$ è uno spazio metrico compatto. Definiamo

$$f_n(y) = \langle \varphi_n, y \rangle$$

per $y \in \overline{T(B)}$. La successione $\{f_n\}$ è una successione di funzioni di $C(\overline{T(B)})$ equilimitata ed equicontinua.

Infatti, per ogni $y \in T(B)$, risulta, in virtù della (6),

$$|f_n(y)| = |\langle \varphi_n, Tx \rangle| \leqslant \|\varphi_n\| \, \|Tx\| \leqslant M \, \|T\|,$$

e quindi

$$|f_n(y)| \leqslant M \, \|T\|, \qquad \forall \; y \in \overline{T(B)}.$$

Inoltre si ha anche

$$|f_n(y) - f_n(y')| \leqslant \|\varphi_n\| \, \|y - y'\| \leqslant M \, \|y - y'\|, \qquad \forall \; n \in \mathbb{N}, \; y, y' \in \overline{T(B)}.$$

Il Teorema di Ascoli-Arzelà garantisce la precompattezza della successione $\{f_n\}$, ossia l'esistenza di una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ uniformemente convergente nella norma di $C(\overline{T(B)})$.

Questo significa che, dato un $\varepsilon > 0$, esiste un n_ε tale che per $n_k > n_\varepsilon$ e qualunque sia $p \in \mathbb{N}$, risulta

$$\max_{y \in \overline{T(B)}} |f_{n_{k+p}}(y) - f_{n_k}(y)| < \varepsilon \,.$$

In particolare avremo

$$\sup_{y \in T(B)} |f_{n_{k+p}}(y) - f_{n_k}(y)| < \varepsilon \,,$$

ossia

$$\sup_{x \in B} |f_{n_{k+p}}(Tx) - f_{n_k}(Tx)| < \varepsilon \,.$$

Ma questo può riscriversi come

$$\sup_{x \in B} |\langle \varphi_{n_{k+p}}, Tx \rangle - \langle \varphi_{n_k}, Tx \rangle| < \varepsilon \,,$$

ossia

$$\sup_{x \in B} |\langle T^\star \varphi_{n_{k+p}}, x \rangle - \langle T^\star \varphi_{n_k}, x \rangle| < \varepsilon \,.$$

Il primo membro dell'ultima relazione non è altro che $\|T^\star \varphi_{n_{k+p}} - T^\star \varphi_{n_k}\|$ e quindi la successione $\{T^\star \varphi_{n_k}\}$ è di Cauchy in $X^\star$. $\square$