L'equazione $T' = S$ nel senso delle distribuzioni

Supponiamo assegnata una distribuzione $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e consideriamo l'equazione differenziale ordinaria

$$T' = S \tag{1}$$

con T distribuzione da determinare. In altri termini, vogliamo determinare le distribuzioni T "primitive" della S.

In base alla definizione di derivata distribuzionale, l'equazione (1) significa

$$\langle T, \varphi' \rangle = -\langle S, \varphi \rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Supponiamo che esista una distribuzione T soluzione di (2). Fissiamo una funzione ϱ tale che

$$\varrho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \quad \varrho \geqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x)\, dx = 1. \tag{3}$$

Presa un'arbitraria funzione $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, scriviamo

$$\varphi(x) = \left[\varphi(x) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds\right) \varrho(x)\right] + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds\right) \varrho(x). \tag{4}$$

Osserviamo che

$$\varphi(x) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) ds\right) \varrho(x)$$

risulta essere una funzione test a media nulla. Consideriamo il seguente operatore μ

$$\mu(\varphi)(x) = \int_{x}^{+\infty} \left[\varphi(t) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds\right) \varrho(t)\right] dt\,.$$

Come sappiamo, il fatto che la funzione test integranda abbia media nulla implica che $\mu(\varphi)$ ha il supporto compatto e quindi μ può essere pensato come un operatore da $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ in sé stesso. Ovviamente abbiamo anche

$$(\mu(\varphi))'(x) = -\varphi(x) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) ds\right) \varrho(x)\,. \tag{5}$$

e, più in generale,

$$(\mu(\varphi))^{(m)}(x) = -\varphi^{(m-1)}(x) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) ds\right) \varrho^{(m-1)}(x)\,. \tag{6}$$

Tenendo presente la (4), possiamo scrivere

$$\langle T, \varphi \rangle = -\langle T, (\mu(\varphi))' \rangle + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds \right) \langle T, \varrho \rangle,$$

ossia (si ricordi la (2))

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \mu(\varphi) \rangle + C\langle 1, \varphi \rangle \, . \tag{7}$$

Abbiamo quindi fatto vedere che, se esiste una $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ soluzione dell'equazione $T' = S$, necessariamente questa deve avere la rappresentazione (7) per una certa costante C.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema

1 *Sia $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Qualunque sia la costante C, l'operatore* (7) *definisce una distribuzione T che soddisfa l'equazione $T' = S$. Inoltra, una qualsiasi primitiva di S ha la forma* (7)*.*

Dim. Facciamo vedere che l'operatore T definito da (7) è effettivamente una distribuzione. E' chiaro che T è un operatore lineare. Abbiamo le seguenti stime, supponendo che k sia tale che $\operatorname{spt} \varphi \subset [-\mathrm{k}, \mathrm{k}]$ e ricordando le (3):

$$\left| \int_{x}^{+\infty} \varphi(x) \, dx \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \, dx = \int_{-k}^{k} |\varphi(x)| \, dx \leqslant 2k \sup |\varphi| \, ;$$

$$\left| \int_{x}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds \right) \varrho(t) \, dt \right| \leqslant 2k \sup |\varphi| \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(t) \, dt = 2k \sup |\varphi| \, ,$$

dalle quali - tenendo presente anche le (5) e (6) - si deduce che

$$\begin{gathered} |\mu(f)(x)| \leqslant 4k \sup |\varphi| \, ; \\ |\mu(f)'(x)| \leqslant (1 + 2k \sup \varrho) \sup |\varphi|) \, ; \\ |\mu(f)^{(m)}(x)| \leqslant \sup |\varphi^{(m-1)}| + 2k \sup |\varphi| \sup |\varrho^{(m-1)}| \, . \end{gathered}$$

Le disuguaglianze appena ottenute e il fatto che il supporto di $\mu(f)$ è contenuto in quello di f, mostrano che

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi \implies \mu(\varphi_n) \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \mu(\varphi) \, .$$

Da questo segue subito che l'operatore $\langle S, \mu(\varphi) \rangle$ definisce una distribuzione. Abbiamo quindi che l'operatore (7) appartiene a $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Inoltre

$$\langle T, \varphi' \rangle = \langle S, \mu(\varphi') \rangle + C\langle 1, \varphi' \rangle = -\langle S, \varphi \rangle$$

dato che

$$\langle 1, \varphi' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = 0$$

e

$$\mu(\varphi')(x) = \int_{x}^{+\infty} \varphi'(t)\, dt = -\varphi(x).$$

Il viceversa è stato già dimostrato prima dell'enunciato del teorema. $\square$

Osserviamo che, analogamente a quanto accade per l'equazione differenziale ordinaria $y' = f$, tutte le soluzioni si ottengono da una soluzione particolare, aggiungendo una costante arbitraria. Ad esempio, tutte e sole le soluzioni dell'equazione

$$T' = \delta$$

sono date dalla formula $T = H + C$, dove H è la funzione di Heaviside e C è una costante arbitraria.