1 Il teorema di Cauchy e il Teorema di De L'Hôpital

1 (Teorema di Cauchy.) *Sia* $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato. Siano* f *e* g *due funzioni continue su* $[a, b]$ *e derivabili in* (a, b)*. Supponiamo, inoltre,* $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$*. Esiste, allora, un punto* $\eta \in (a, b)$ *tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} \tag{1.1}$$

DIM. Osserviamo preliminarmente che i denominatori che compaiono nella (1.1) sono diversi da zero: $g'(\eta) \neq 0$ perché, per ipotesi, g' è sempre non nulla, mentre $g(b) - g(a) \neq 0$ per il Teorema di Rolle. Se, infatti, fosse $g(b) = g(a)$, per questo teorema dovrebbe esistere un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $g'(\xi) = 0$, e questo contraddice le ipotesi fatte.

Introduciamo ora una nuova funzione [(1)]

$$\varphi(x) = [f(x) - f(a)][g(b) - g(a)] - [g(x) - g(a)][f(b) - f(a)]$$

La funzione φ risulta continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= [f(a) - f(a)][g(b) - g(a)] - [g(a) - g(a)][f(b) - f(a)] = 0, \\
\varphi(b) &= [f(b) - f(a)][g(b) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(b) - f(a)] = 0.
\end{aligned}$$

Per il Teorema di Rolle esiste un punto $\eta \in (a, b)$ tale che $\varphi'(\eta) = 0$, ossia tale che

$$f'(\eta)[g(b) - g(a)] - g'(\eta)[f(b) - f(a)] = 0,$$

e il teorema è dimostrato. □

Osservazione 1 Si noti l'analogia di questo Teorema con il Teorema di Lagrange, al quale si riduce ponendo $g(x) = x$.

Una delle applicazioni del Teorema di Cauchy è la dimostrazione della *Regola di De l'Hôpital*. Di fatto, sotto lo stesso nome, vengono indicati diversi risultati. Qui ci limiteremo a dimostrare il più semplice.

[(1)] Un modo per ricordare la definizione di φ può essere quello di pensarla come sviluppo del determinante

$$\begin{vmatrix} f(x) - f(a) & g(x) - g(a) \\ f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \end{vmatrix}.$$

2 (Regola di De l'Hôpital.) *Siano f, g due funzioni definite in un intervallo I e sia x_0 un punto di $\mathring{I}$. Supponiamo che f, g siano continue in I e derivabili in $\mathring{I} \setminus \{x_0\}$. Supponiamo, inoltre, che sia $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e che $g'(x) \neq 0$ in $\mathring{I} \setminus \{x_0\}$. Se esiste il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \tag{1.2}$$

$(-\infty \leqslant \lambda \leqslant +\infty)$, *risulta*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda\,. \tag{1.3}$$

Dim. Fissiamo un $x \in I$ con $x > x_0$. Essendo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\,,$$

per il Teorema di Cauchy esiste un punto $\eta \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}\,.$$

Facciamo ora tendere $x \to x_0^+$. Essendo $x_0 < \eta < x$, il punto η tenderà a x_0 da destra. Dato che, per ipotesi, il limite

$$\lim_{\eta \to x_0^+} \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

esiste ed è uguale a λ [(2)], abbiamo che esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e si ha

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\eta \to x_0^+} \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = \lambda\,.$$

Analogamente si prova che

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\eta \to x_0^-} \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = \lambda\,,$$

[(2)] Per ipotesi esiste il limite per $\eta \to x_0$ e sappiamo che un limite in un punto esiste se e solo se esistono i relativi limiti da destra e da sinistra e sono uguali.

e quindi la tesi. $\square$

Sussiste anche il seguente risultato analogo, del quale omettiamo la dimostrazione:

3 *Siano f, g due funzioni definite in un intervallo $I \setminus \{x_0\}$ dove $x_0 \in \mathring{I}$. Supponiamo che f, g siano continue e derivabili in $\mathring{I} \setminus \{x_0\}$. Supponiamo, inoltre, che sia*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

e che $g'(x) \neq 0$ in $\mathring{I} \setminus \{x_0\}$. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

($-\infty \leqslant \lambda \leqslant +\infty$), risulta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda\,.$$

Osservazione 2 Nell'enunciato del Teorema 2 abbiamo considerato il limite per $x \to x_0$, ma è evidente dalla dimostrazione che un analogo risultato sussiste se consideriamo solamente il limite per $x \to x_0^+$ o per $x \to x_0^-$. La stessa Osservazione vale per il Teorema 3.

Osservazione 3 Gli enunciati dei Teoremi 2 e 3 continuano a sussistere se, invece del limite $x \to x_0$, si considera il limite per $x \to +\infty$ ($-\infty$). Omettiamo la dimostrazione di questa affermazione.

Osservazione 4 La regola di De l'Hôpital mostra che, in presenza della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se esiste il limite (1.2), allora esiste anche il limite (1.3) e sono uguali. Si noti, però, che la non esistenza del limite (1.2) non implica la non esistenza del limite (1.3). Si consideri, ad esempio, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\log(1+x)}\,. \tag{1.4}$$

Se consideriamo il rapporto delle derivate, otteniamo

$$\frac{2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)}{\frac{1}{1+x}} \tag{1.5}$$

e poiché $1 + x \to 1$, $x \operatorname{sen}(1/x) \to 0$, mentre $\cos(1/x)$ non tende ad alcun limite, è evidente che non esiste il limite per $x \to 0$ di (1.5). D'altra parte, essendo

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\log(1+x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1/(1+x)} = 1\,,$$

il limite (1.4) esiste (ed è nullo).

Osservazione 5 Si noti che per la validità dei Teoremi 2 e 3 è essenziale avere a che fare con la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. Si consideri, ad esempio, la funzione

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3 - x^2}{1 + x}\,.$$

Risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{1} = -2\,,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 3.$$