Sulle funzioni assolutamente continue

Teorema 1 *Se f e g sono funzioni assolutamente continue in $[a,b]$, anche il loro prodotto (puntuale) $f \cdot g$ è assolutamente continua.*

Dim. Dire che $f \in AC([a,b])$ significa che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall\, [x_i, y_i] \subset [a,b],\; (x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) = \emptyset\, (i \neq j),$$
$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |f(y_j) - f(x_j)| < \varepsilon\,.$$

Analogamente,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \varrho_\varepsilon > 0 \mid \forall\, [x_i, y_i] \subset [a,b],\; (x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) = \emptyset\, (i \neq j),$$
$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) < \varrho_\varepsilon \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |g(y_j) - g(x_j)| < \varepsilon\,.$$

Poniamo $\sigma_\varepsilon = \min(\delta_\varepsilon, \varrho_\varepsilon)$. Si noti che $\sigma_\varepsilon > 0$. Siano ora $[x_i, y_i] \subset [a,b]$ intervalli a due a due privi di punti interni e tali che

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) < \sigma_\varepsilon\,. \tag{1}$$

Risulta

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} |f(y_j)\, g(y_j) - f(x_j)\, g(x_j)| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |f(y_j)\, g(y_j) - f(y_j)\, g(x_j) + f(y_j)\, g(x_j) - f(x_j)\, g(x_j)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |f(y_j)|\, |g(y_j) - g(x_j)| + \sum_{j=1}^{n} |f(y_j) - f(x_j)|\, |g(x_j)|\,.
\end{aligned}$$

Essendo le funzioni AC continue, esse sono limitate e quindi esiste una costante M che maggiora sia $|f|$ che $|g|$ su tutto $[a,b]$ e dunque

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} |f(y_j)\, g(y_j) - f(x_j)\, g(x_j)| \\
&\leqslant M \left(\sum_{j=1}^{n} |g(y_j) - g(x_j)| + \sum_{j=1}^{n} |f(y_j) - f(x_j)| \right)
\end{aligned}$$

In virtù della (1) e del fatto che σ_ε è minore sia di δ_ε che di ϱ_ε, otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n} |f(y_j)\, g(y_j) - f(x_j)\, g(x_j)| \leqslant 2\, M\, \varepsilon$$

e questo dimostra che $f \cdot g \in AC([a, b])$. $\square$

Teorema 2 *Siano $f, g \in AC([a, b])$. Sussiste la formula di integrazione per parti:*

$$\int_a^b f'\, g\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f\, g'\, dx \tag{2}$$

Dim. Essendo $f \cdot g \in AC([a, b])$, esiste la derivata $(fg)'$ q.o. e risulta

$$f(b)\, g(b) = \int_a^b (fg)'\, dx + f(a)\, g(a)\,.$$

D'altra parte, ricordando che f' e g' esistono q.o., abbiamo $(fg)' = f'g + fg'$ q.o. (si osservi che questa regola di derivazione si dimostra puntualmente, supponendo che le derivate di f e di g esistano nel punto). Essendo poi $f'g$ e fg' sommabili, possiamo applicare la linearità dell'integrale e scrivere

$$f(b)\, g(b) = \int_a^b f'g\, dx + \int_a^b fg'\, dx + f(a)\, g(a)\,,$$

che non è altro che la (2). $\square$

Ricordiamo che se $f \in AC([a, b])$, risulta $f \in BV([a, b])$, e quindi la variazione totale di f risulta finita. Il prossimo risultato mostra che, se $f \in AC([a, b])$, la sua variazione totale coincide con l'integrale di $|f'|$.

Teorema 3 *Sia $f \in AC([a, b])$. Detta T_a^b la sua variazione totale sull'intervallo $[a, b]$, risulta*

$$T_a^b = \int_a^b |f'|\, dx\,. \tag{3}$$

Dim. Otterremo la tesi facendo vedere che nella (3) sussistono sia il minore o uguale che il maggiore o uguale. Sia δ una decomposizione di $[a,b]$ e poniamo

$$t_\delta = \sum_{j=1}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|\,.$$

Essendo la f assolutamente continua, si ha

$$\begin{aligned} t_\delta &= \sum_{j=1}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| = \sum_{j=1}^{n-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)\,dx \right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f'(x)|\,dx = \int_a^b |f'|\,dx\,. \end{aligned}$$

Poiché

$$T_a^b = \sup_{\{\delta\}} t_\delta\,, \tag{4}$$

abbiamo

$$T_a^b \leqslant \int_a^b |f'|\,dx\,.$$

Osserviamo che possiamo ripetere lo stesso ragionamento su un qualsiasi intervallo $[x,y] \subset [a,b]$ ottenendo

$$T_x^y \leqslant \int_x^y |f'|\,dt\,, \tag{5}$$

per ogni $a \leqslant x < y \leqslant b$.

Sia ora $v(x) = T_a^x$. Dimostriamo che la v risulta assolutamente continua in $[a,b]$. Essendo f' sommabile, per l'assoluta continuità dell'integrale, dato un $\varepsilon > 0$, esiste un δ_ε tale che, per ogni insieme misurabile E contenuto in $[a,b]$ tale che $m(E) < \delta_\varepsilon$, risulta

$$\int_E |f'|\,dx < \varepsilon\,.$$

Siano $[x_i, y_i] \subset [a,b]$ intervalli a due a due privi di punti interni e tali che

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) < \delta_\varepsilon\,.$$

Poniamo

$$E = \bigcup_{j=1}^{n} [x_j, y_j]\,.$$

Ricordando l'additività della variazione totale e grazie alla (5), abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} |v(y_j) - v(x_j)| = \sum_{j=1}^{n} |T_a^{y_j} - T_a^{x_j}| = \sum_{j=1}^{n} T_{x_j}^{y_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{x_j}^{y_j} |f'|\,dt \\ = \int_E |f'|\,dt < \varepsilon\,,\end{aligned}$$

dato che

$$m(E) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) < \delta_\varepsilon\,.$$

Abbiamo così dimostrato che $v \in AC([a,b])$. Dico che le funzioni $v \pm f$ risultano crescenti. Infatti, sia $x < y$; facciamo vedere che

$$v(x) \pm f(x) \leqslant v(y) \pm f(y)\,. \tag{6}$$

Questa disuguaglianza è equivalente a

$$\pm f(x) \mp f(y) \leqslant v(y) - v(x) = T_a^y - T_a^x = T_x^y\,.$$

Ma quest'ultima disuguaglianza è ovvia, essendo

$$|f(y) - f(x)| \leqslant T_x^y$$

(basta pensare $[x,y]$ come una particolare decomposizione dello stesso intervallo $[x,y]$ e ricordare la definizione di variazione totale). La (6) è quindi dimostrata. Essendo f, v funzioni assolutamente continue, esistono le derivata f', v' q.o. . Inoltre, essendo $v \pm f$ monotona crescente, avremo $v' \pm f' \geqslant 0$ q.o., ossia $|f'| \leqslant v'$ q.o. . Deduciamo che

$$\int_a^b |f'|\,dx \leqslant \int_a^b v'\,dx = v(b) - v(a) = T_a^b\,. \tag{7}$$

Le disuguaglianze (4) e (7) provano la tesi. □